壳体结构文汇

第五册

壳体结构文汇编辑委员会

中国工业出版社

壳 体 結 构 文 汇

第 五 册

壳体結构文汇編輯委員会

中 国 工 业 出 版 社

本文汇的目的在于向讀者介紹一些国外比較重要的有关壳体結构新发展的文献資料，涉及范围主要是同土木工程有关的壳体結构。本册重点是：壳体理論的綜合性論述、金属网状穹頂的有矩計算、反对称荷載下球壳的边界干扰問題、壳体孔洞中应力集中問題，同时，也涉及了球壳的試驗研究、薄壳屋頂屈皺，以及80.18米直径的带肋鋼筋混凝土球壳的施工等方面的文献。

本文汇讀者对象为土木工程技术人員、科研工作人員和高等院校教学人員。

壳体結构文汇

第五册

壳体結构文汇編輯委員会

*

建筑工程部图书編輯部編輯（北京西郊百万庄）

中国工业出版社出版（北京佟麟閣路丙10号）

北京市书刊出版业营业許可証出字第110号

中国工业出版社第一印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行·各地新华书店經售

*

开本787×1092 1/16·印张13 1/2·字数261,000

1966年2月北京第一版·1966年2月北京第一次印刷

印数0001—2,010·定价（科六）1.60元

*

統一书号：15165·4258（建工-482）

目　录

弹 性 理 論 文 献 綜 述

F.W.Bornschener E.Stein

【提　要】本文对1961年以前多年来国际上弹性壳板理論的四百余篇重要文献，在建筑技术領域获得的进展，以及求得簡化計算方法的趋势，作了綜合性的評价。其中，关于薄壳理論方面的有：圓柱形壳体、圓柱形管和容器、受非旋轉对称荷載的圓柱形管、一般柱壳、旋轉壳体、球形壳体、圓錐形壳体、平移壳体、双曲抛物面壳体、劈錐壳体和拱垻；此外，还有立板方面的、平板方面的以及褶板結构方面的。

引　　言

德国工程师协会杂志❶（VDI-Zeitschrift）报导弹性理論方面一年来的情况，这还是第一次。这里首先介紹了最近几年来直到1961年8月为止所发表的最重要的著作。但是为了能够对現今所常用的計算方法及各种問題的当前发展情况有个清楚的了解，常常需要追溯到更早的时期。

弹性理論在这里几乎仅仅是指在狭义上所理解的，如均质的、理想弹性的、各向同性連續体，特别是各向同性和各向異性空間結构的古典线性理論或工程线性理論；討論所涉及的主要是靜力荷載。此外还要叙述到关于弹性和振动的論著。模型試驗只附带談到。这些都是在弹性理論的当前发展状况下，为理解总受力情况和由于开孔或加固造成的局部应力状态所常常不可缺少的。这类模型測定常常是唯一的靜力証明，或者是探求新形式的手段。

与通过单維杆件靜力学来掌握的杆和梁不同，壳体、立板、薄板和褶板結构的一个重要特点是至少二維（平面）受力。对于薄壁結构，我們要将用二維理論分析的薄壁結构，和需要应用三維理論的厚壁結构区别开来。后者只有某些体系有解，如厚板、圓筒和球壳，而且又仅仅适用于簡单的荷載情况。除此以外，还应提到在各种不同荷載下的弹性半空間的解。

大多数的建筑結构是薄壁結构，即厚度对平面尺寸（长度、半径）而言很微小；它們的弹性性能可以通过中間面的位移，作极精确的描繪。

由于近年来发表了大量文章，特别是作者又不能看到所有的外国文献，这里只能选择其中一小部分，加以論述。

在[1]❷中每月都很广泛地报导了新的研究工作。除此以外，知名的科学家还經常詳尽地綜述力学的个别領域。这里可以提到1958年11月号中Langhaar的“一般稳定理論”和1959年2月号中Truesdell的“过去、現在和将来的材料的一般力学”这两篇文章。[1]

❶ 本杂志系在西德出版——譯者注。
❷ 方括号內数碼系指文献編号，以下同——譯者注。

出版于1948年。从1933年到1945年担負这項任务的是[2]。但是遺憾的是，这一刊物在第二次世界大战以后就沒有再出版。[3]包括了平板、壳体和一般弹性理論的部分。极限原理用了公式的形式来表示。在利用文献卡片方面，[4]是一个重要的帮手。Köln市和Stuttgart 市藏有世界上所有重要的建筑刊物。

一般弹性理論

全部工程弹性理論的基础仍然是以Cauchy、Polsson、Lamé、Laglange和Love[5]的线性理論为根据；Love 做出了一个重要的、在形式上也十分令人滿意的总結。这个理論是同构的理論，即对于均质和各向同性的固体理想弹性連线体来說，是結构相同的数学模型。线性几何微分关系（微元的伸长和三个位移之間的关系）和线性物理定律（虎克材料定律），以及在未变形前微元上的平衡条件三者成为弹性基本方程，并化为任意一点三个位移的三个线性的偏微分方程。这組方程可以根据Maxwell、Love [5]、Neuber[6]、Marguerre[7]、Schaefer[8]通过三函数式来滿足。[9,10]在理論上也很値得注意。

弹性理論基础的新闡述可以見Girkmann[11]、Timoshenko [12]、Biezeno-Grammel[13]和Власов[14]的基本著作。这些著作对于初学和寻找文献都是不可缺少的，特别是[12,13]对一般三維理論闡述得很詳尽。[15～17]也包括了不少可貴的貢献。数学上严謹，并对力学的重要积分原理的近似解，闡述得很透彻的有[18～21]。其中[18]应当认为是基本的著作。

Rüdiger[22]把Ritz和Trefftz的方法作了比較。这些方法的基础是最小位能原理和最大附加功原理。在Collatz[23]的书里也可見到对比的表达形式。[24]和[25]把小位能原理推广到了不必滿足任何条件的解函数上去。在[26]中得出了一个新的变分原理，它的形式和质点动力学的变分原理一样，在这个新变分原理中所有的边界条件都消失。与这有关的[27]也很値得注意。还应指出，[28]是采用张量分析表示法。

在新的弹性理論中，根据Ricci[29]所闡述的张量分析法，占愈来愈重要的地位；这首先是在許多基本著作中。这种方法很簡明而且与特殊的坐标系无关，因而能一目了然，并有普遍的意义。特殊問題就可以据此按照演释的方法分类排列。为了能这样，就使在笛卡尔坐标中很繁长的表达形式所不能得到的判断和結論，在张量表达式成为可能。在壳体的曲面理論中，这一点尤为明显。具有同样重要性的是矩陣計算；它在現在分析中，控制了线性变換乃至线性微分方程。对此有方向性指导意义的是Green-Zerna [30]和Сокольников [31] 的著作。若从事这方面的研究，[32]是値得推荐一讀的。在数学入門方面則应当推荐[33～35]。

一方面由于預应力混凝土、与焊接技术有关的高强度鋼板和玻璃鋼[36]的发展，另一方面，从技术上的需要和向空間結构发展的建筑来看，都有必要进一步发展弹性理論。为了能够描繪出連續介质的材料的受力性能，还有必要研究非线性理論和塑性理論。Kauderer[37]闡述了一个仅与应力-应变規律有关的非线性理論，并把它应用于首先是板的应力問題上。此外还可参看[38～40]。关于壳体的相应理論見“壳体”部分。

关于非均质的，例如加层的和各向異性的連續体和空間結构的理論見[41～44]。非线性几何方程，即将考虑二次項的有限变形的理論在[30,45～47]可以見到。这里視情况可以将位移取为微量，以便建立在未变形前的微元上的平衡条件。最后，可以保留所有的线

性化，只有在大位移但是小应变的情况下才需要建立在变形后的体系上的平衡。在研究稳定問題和振动問題时，以及在研究大变形体系时，这样做是必需的。在这种情况下有限应变理論也是必需的（例如对于跳跃問題）。Pflüger[47] 和Wegner [48] 則对稳定性准則进行了討論。

通过一系列的著作，如[49～51]，Cosserats的弹性連續体理論[52]重又被提到了重要地位，当然这是在新的数学表現下，从而——也許是第一次——变得可以理解。这一理論到目前为止只是在[49]的意义下得到了实际应用。

对于一般弹性理論来說，最后还必須提一下关于热应力的重要文献，即Melan和Parkus的著作[53,54]，Trostel 的文章[55～58]，以及 [59～61]的論文。此外値得注意的还有在光弹性分析中的弹性理論研究，在目前已拥有大量計算方法的情况下，这些問題已扩大了。关于光弹性分析的有概括性和指导意义的論述，可以在[62～64]中找到。

薄　壳　理　論

一般理論

壳体理論在当前是弹性理論中大家最为关心的分支。人們努力寻找为工程师所能理解的工程理論，也就是要求建立易于求解的連續介质靜力学，来代替只有数学家才理解的、并且在进行数值計算时数学家也往往遇到不可克服的困难的数学理論。如果在科学研究工作中总的說来可以由一般到特殊，由复杂到簡单，那么，对于圓柱壳和受有旋轉对称荷載的旋轉对称壳的薄膜理論和弯曲理論来說，我們已經做到了这一点。但是对所有其他壳体的理論，特别是对于具有負高斯曲率的一般壳体，仍然有待于解决。在建立实际物体的数学模型时，所作的物理的以及几何的簡化和近似，应該与求解問題时，例如解微分方程时，所作的近似加以区別。一个可用的計算方法要求从这两方面作出誤差的估計。因此在壳体理論中今后仍然需要做許多理論的、試驗的和計算的工作。

关于当前壳体理論情况的綜述有[65,66]，Koeter在[67]中的論文和W.Zerna在[68]中的关于“可以应用于各种壳体的一般計算方法”的报告。Nash 在[1]的卷13(1960年)第3期中总結了壳体稳定理論的最新发展，該文中引用了很多文献。关于扁壳的振动問題在[67]中有M.W.Jahnson的（薄膜理論）和P.M.Naghdi的（一般弯曲理論）着重于数学处理的文章。两者均系根据非线性几何方程而建立的。这些工作都是在 Marguerre 工作[69]的基础上发展的。壳体理論方面通用的书籍有Flügge[70],Girkmann[11]，Timoshenko[71,72]，Green和Zerna[30]，Власов[14]，Новожилов[73]等人的著作。[74]很适合于初学。[75]中包含了許多实用的公式。

国际会議的論文集占有很重要的位置。如[76]（并附有大量的文献），[77]和国际理論与应用力学学会（IUTAM）、国际材料及結构研究实驗室协会（RILEM）以及国际壳体結构学会（IASS）的討論会[41,67,68,78,79]。通过这种聚会活跃了国际上的經驗交流。人們可以通过它认識到研究工作的发展方向，并由此取得对自己的启发。正是由于1955年在馬德里建立了国际壳体結构学会，在其后的几年中經常要举行的討論会，例如1962年在巴黎关于悬索屋頂的討論会，显示了在当前壳体理論正处在广泛发展的过程中。

为了从試驗上証明并进一步发展理論，进行模型試驗是非常重要的。对于复杂的問

题，我們往往只能依靠模型进行量测。关于量测方法、模型材料和模型的制造等問題，牵涉到許多方面，需要依靠专家解决。关于这些方面可見[79]中的許多报告。

Nash在[80]中对于1957年以前的文献作了广泛的和評論性的整理。

我們需要区别壳体的静力学問題（薄膜理論和一般弯曲理論）和壳体的动力学以及稳定問題。对于这三方面，在实际上可以应用的弯曲理論是使用了Love-Kirchhoff对于应变位移方程式中所作的直法线假定，这个假定在梁和板的工程理論中就是众所熟知的断面保持平面的假設。由于剪力引起的剪切变形在几何协調关系中是忽略不計的，因而壳体中面位移的偏微分方程組只是八阶的。这样，在壳体二个边緣最多只需要各自滿足四个几何的、静力的或混合的边界条件。但是在自由边上必需是五个內力——內力和內力矩等于零。为了避免这个困难，我們引入Kirchhoff的等效剪力，它包括了剪力和扭矩的微分。根据圣維南原理，这样作的結果对于应力状态只是产生了局部的影响。此外，我們还省略了与壳体中面垂直的法向应力，这样就将平面应力状态和平面应变状态結合起来。这点在理論上是相互矛盾的，但是在实际上对于薄壳沒有影响。由此我們又作出第三个近似，即在一条法线上各点的垂直于壳体中面的位移均认为相等。根据第四个关于小挠度的假設，我們的平衡方程式是对于变形前微体建立起来的（第一阶理論）。

Rüdiger[28]中給出了一个更一般性的壳体理論，它是由三維空間出发，不作上述的前三个联系壳体中面位移和中面外各点应变关系的假設。他設想壳体中面外的各点位移是距中面距中面距离的二次函数。并且指出了經典理論由于法线假設所引起的問題。在那里由于忽略了剪切应变和法线方向的应力所略去的项目和Love-Kirchhoff理論中許多項目是同数量級的。这点对于今后薄壳和扁壳的近似理論很有意义。

壳体静力学中許多不同的近似理論是由于对內力和壳体中面位移，即所謂壳体的弹性关系，所作的不同的近似。內力是应力在截面上的积分。利用了线性的虎克定律可以将应力用应变表达（Zerna在[67]使用了一个非线性的材料关系），并且通过几何关系将中性面以外的应变用中性面的位移表达。我們在虎克定律中进一步作了近似；在几何方程中，在內力积分时的超越函数（例如对数函数）的級数展开中忽略横向伸长。此外，如果我們只要求同数量級的微分，还可以在平衡方程式中省略某些內力，例如剪力。

将內力和壳体中面位移的关系代入平衡方程式中可以得到壳体中面位移的一組三个偶合偏微分方程式。根据基本假設和随之而来的对同数量級項目的省略，我們得到了一个对于主要对角线对称的微分方程式的运算子，这实际上就是Betti-Maxwell互換定律的結果。在更早的近似理論往往不是这种情况。Власов[14]特别指出了由于缺少对称而在稳定（本値）問題中所产生的缺陷。

各种不同的弯曲理論主要根据在几何方程中的近似加以分类。在静力学中，根据小挠度假設，一般地仅考虑了应力应变关系中的线性項（經典理論）。这个假設对于面积荷載多数是恰当的，但是，对于垂直于壳体的集中載荷就不适应了（关于这一点見D.G.Ashwell在[67]中的圓球壳上的集中載荷問題）。

在稳定和振动的研究中，人們使用了线性的、非线性的和线性化的几何关系（見Johnson，Naghdi，Nash和Modeer的文献[67,81]中）。这里特别需要有分析地考虑几何的簡化，因为它会对于可能的屈曲形状导致完全錯誤的結果（見[68]中第5章）。

如果我們将壳体理論看成平面（或更恰当地說薄膜）和平板理論的結合，对于薄壳的几何簡化就容易理解了。对于內力作了沿壳厚均匀分布的假設，对于內力矩則根据 Bernoulli作了线性应力分布的假設。根据[28]这些假設是恰当的，而厚壳理論則是不正确的。为了能够建立与微分方程組具有同样精确度的势能，就要求对于在弹性关系中所作的近似一直追溯到几何方程式。人們可以应用变分法中的欧拉方程式，在事后检驗势能与微分方程組是否具有相同的精确度。

进一步有意义的簡化引出了扁壳理論：壳体中面服从于欧氏几何的定律。因此具有零高斯曲率的壳体不必一定是扁壳才能与此簡化相适应，因为它是可展开的。这个理論曾由 Green 和Zerna[30]和Власов[14]所发展，它与 Donnell-Kármán-Jenkins 对于圓柱壳的近似理論相符合。我們得到未知量为应力函数（相当于 Airy 或 Pucher 的应力函数，由此应力函数可推导出薄膜力）和法向位移（由此可以推导出力矩）的二个四阶偏微分方程。对于扁壳的薄膜理論，Pucher[82]曾得到一个应力函数的微分方程式，并由此出发找到差分解法。进一步的簡化只是对于特殊壳体形状才可能。

Helzog 在[83]中給出了一个大挠度的但是小应变的扁壳理論。在这理論中必須考虑变形后微体的平衡关系。

壳体理論对于特殊形状，特别是对于管、圓柱壳和球壳，得到了进一步的发展。为了对于任意壳体形状得到封閉的理論，并且将壳体的各类几何形状按其力学性质分类，我們需要由卡氏圓柱坐标和圓球坐标轉到一般坐标。这里有二条途径可走。其一，通过使用壳体中面的正交的主曲率线作为坐标网（例如 Love[5]和Власов[14]）。其二，利用任意或斜坐标系統中的向量表达式(Neuber[84],Zerna[85],Parkus[86],Green和Zerna[30],Новожилов[73]和 Rüdiger[87])；关于卡氏坐标理論見[88](Fuchssteiner和Schader)。在經典理論中的三个偏微分方程式可以用中面的位移或应力函数或如扁壳的近似理論中的混合未知数来表达。Duddeek[89]和Günther[51]使用了相应的表达式。薄膜的弹性势能曾由Koiter 在[67]和[90,91]中給出。[92]曾給出了积分方程式的关系。

在解問題中，高斯曲率K看来是有决定性的判别式。对于$K>0$；$K=0$；$K<0$，微分方程式分别成为椭圓型、抛物线型和双曲线型。求解线性微分方程可使用迭加法。对于$K\geqslant 0$的情况，可以认为以薄膜解作为特解已具有足够的精确度。这样做意味着显著地簡化了問題。对于$K<0$时，薄膜解可能出現奇異点，也就是說它不再为单値。对于这种情况还需要求得一个齐次的薄膜解或特解。在弯曲理論中只要求齐次方程滿足薄膜理論所未能滿足的边界条件，那就是說边界效应的部分。薄膜理論中的四个积分常数只能概括了外力靜定支撑系統。薄膜理論仅只包含了平衡条件而不包括协調条件，在这一点上它不同于平面問題；由于这一点它只能传递均匀分布的載荷和切线方向的反力。在一些特殊情况下，也可以計算承受复杂荷載和具有复杂支撑的壳体[93]。[14]很好地利用数学并結合許多应用問題处理了薄膜理論。Flügge除在[70]外还在[94]利用卡氏坐标給出了一个薄膜变形的一般理論。Zerna 在[95]推导出具有任意形状底面积壳体的薄膜解的微分方程式。

我們試图用分解方法（如富里哀級数），漸近計算法（对于球壳），积分变換（如拉氏变換）等等求解齐次微分方程式。也曾經应用数値解中的差分法，松弛法和 Ritz, Galerkin和 Tpefftz 等人的变分法以及在积分方程中的有限法求解。对于二維的 Ritz 解

可以有效地分解为一維的变分問题（見[77]中的Власов文章；[14]和 [58]）。椭圓型和抛物线型的微分方程比較容易求解，而双曲线型方程則遇到很大的困难。对于后者我們往往需要根据沿着特征线上的弯曲影响将边值問题轉为初始值問题。

壳体理論的問題，在当前来說，更重要的是为設計工程师求得复杂解的数值計算方法。在这方面可能将統計方法和电子計算机上的系統計算或試驗相結合，对于問題是有意义的。在[68]J.D.Bennett对于对称的、具有不同的参数和边界比例的圆柱壳求出了表达四个基本內力的簡单公式。他是利用了 Schorer 許多計算出的实例找到了統計的线性关系，并由此推导出簡单的代数公式。

除去計算本身的困难还需要特别提到确定和簡化載荷的困难。对于风載的分布，許多壳体仍然未能确定。此外由于非均匀的加热和混凝土的蠕变所引起的受力，也往往是未知的或是对于实际計算尙未得到研究結果。

对于大跨双曲壳，稳定的研究往往較靜力計算显得更为重要。在这方面一般說只有求助于模型試驗。目前要想建立一个最一般的并且尽可能簡单的計算方法，其中包括了結构上一切重要影响因素，看来还存在着很大困难。

圓柱壳

建造得最多并且在理論上研究得最深入的壳体是圓柱壳或称作长屋頂的壳体。Dischinger 和Finsterwalder[96]在Bauersfeld的合作下，第一次創造性地設計計算并且建造了有加固板和較小的边梁的屋頂壳体。他們对于环向力矩所建立的八阶齐次微分方程式，到今天人們还經常使用。由于加固板边界条件为薄膜理論所滿足，他們成功地利用了一个在发生线方向的富氏級数将变数分离开，因而由边梁出发的弯曲影响可以借助于欧拉方程式来表达，其解为阻尼的振动。

Dischinger 还解了 Flügge 的精确的位移微分方程并推广到正交異性壳。利用其中所給出的曲线表，对于任意壳体参数，人們立刻可以非常清楚地认識到，是否可以利用薄膜解来代替特殊解，或代替純环向作用或梁的作用（用相同的壳体厚度）。特殊解对于圓管总是有效的，在大多数情况下，圓管可以完全依靠薄膜应力将分布載荷传递到加固板[98]。Dischinger 还給出了曲线，以便节省在求齐次解时計算四阶特征方程式根的繁难計算的时間。Schorer 在[99]中，对于特征方程式引入了一个有意义的簡化。他只考虑了最高方次和絕对值，因此他用显函数的形式求出根值，这是基于根和壳体参数存在着几乎是线性的关系。

Aas-Jakobsen[100]利用了四个完整的模型壳体計算，对于所有要求的量建立了近似的多項式，因而使計算量大为减小。对于每一个模型壳体，均将由于在壳与边梁交界处承受单位載荷所引起的边界效应大小列表給出。Aas-Jakobsen 将一切內力均对于重心线来計算，因此得到的微分方程組是非对称的。由位移的三个微分方程式消去二个位移，因而得到只包括法向位移的一个方程式。[100]列出了大量的参考文献。

Donnell-Kármán-Jenkins的近似[101～103]，下面簡称DKJ近似，得到了比較合理的理論。Власов[14]利用了薄膜力的应力函数，将問題表达为以应力函数和壳体中面的法向位移为未知数的、二个四阶偶合微分方程式或应力函数的一个八阶微分方程式。Zerna [104] 将这个方程式綜合为一个新的复变函数的四阶微分方程式。两种情况下的特征方程

式均为双二阶的，并且可以求出显函数的解。因此我們可以自由选择包括横收縮系数在內的一切参数。Rüdiger和Urban[105]的众所周知的书包含了根据Власов理論算出的、很有用的表格。在[14]还給出了对于側向不可移动的內屋頂的表格，即在横方向連續的屋頂內壳的表格。利用矩陣計算可以使表示壳体和边梁之間的边界条件（根据力法）的线性变换进一步地程序化。[106]和[107]还包含了矩陣表达法的細节。

由Neuber的工作[108]出发，Rabich在忽略了横向收縮后給出了四个理論[109,110]，即完整的（Flügge）、准完整的（D.K.J）、不完整的（Finsterwalder）和准不完整的理論。他从各个理論的位移微分方程式出发，用一般形式給出了按照阻尼振动变化的內力和位移表达式中的常数，并对几个参数列出了表格。Rabich八个壳体形式用图表表示出了在边界作用的单位載荷的影响[111]。Rabich的理論在[112]中又引伸到正交異性壳。其他的表格見[113]。

Mehmel和Fuchssteiner給出了一个分解載荷法[114]，同样的方法也在壳体理論[115]中和容器理論[116]中得到应用。这个計算收斂很慢，因为我們将載荷分为薄膜作用、边梁效应、加固板效应等部分，并且通过积分得到內力。Fuchssteiner[117,118,68]用多項式近似地計算位移，利用这些多項式他滿足了全部边界条件，但是沒有使用最小原理。Jenkins在[77]中給出了一个纵向力分布的Ritz解，并且通过最小势能原理求出常数。Moe[119]Holand[107]McNamee[76]和Jensen[77]将已有的理論作了有价值的比較。一般說我們可以作如下的結論：对于长壳边界效应要深入到壳体內部很远，它的計算也比較敏感。

对于工程师比較接近，并且在今天对于对称柱壳已成为不可缺少的計算方法是Lundgren方法[120]。該法为一个对于一般的变厚度中长柱壳的正交化方法。Kirchner[121]給出了非对称壳体的比較計算和討論。Mann計算了承受扭轉的壳体[122]。对于同样的問題，Lundgren由于一开始就省略了扭轉力矩，因而沒有得到滿意的結果。J.Barets和Callari[67]进一步討論了梁法。[123]对于內壳給出了利用梁法計算的大量表格。

将圓柱壳作为棱柱形褶板計算的方法使用得很广泛，关于这方面的詳細叙述見[124～127]。对于等厚度和承受面积荷載的圓柱壳，此法并不需要，因为根据壳体理論已有足够的表格。如果以过細的多边形代替壳体断面，則在各褶板之間的角度就很小，因而这些梁的載荷将由大数之間的小差別来求得，由此所引起的敏銳度将貫穿到整个計算中。另一方面使用过粗的多边形求得的环向弯矩将很不准确，而环向弯矩是特別重要的內力。当边梁很高或采用水平边梁时，倒可以将圓柱壳按照壳体理論，例如按照Rüdiger和Urban的方法，边梁按照褶板理論的方法組合計算。如果我們将梁的理論（Navier的直线分布規律）应用到边梁上，这将使軸向应力在边梁与壳体交界处出現折断。

van der Eb[128]給出了一个計算屋頂壳体的新方法，前面所提到的Tooth和Kenedi[68]的用統計方法的公式是所有計算方法中最簡单的。最后还需要提到Schaefer[129]的对应的表达法，这个方法可以看作是圓柱壳体的一般理論。

要想同时考虑边梁和加固板的边界效应，有很大的困难。这时在加固板上的薄膜边界条件也会受到干扰，它可以由于預应力或由于加固板本身平面非絕对刚性或連續作用所引起。Knittel[130]曾解决了在軸向連續的屋頂。Kuhelj[131]对于这个解曾加以注解。Dischinger[13]早已給出过一个近似解。用分离載荷法[114]可以将加固板边界效应的問題相

当简单地解决。Olsen 在[77]給出了簡单的公式。Holand[133]将加固板边界影响和边梁边界影响相迭加。連續壳也还可以用棱柱形褶板代替并按[134]計算。根据 Duric[135]用矩陣表达的方法，可以較簡单和較明晰的进行計算。

Grimma [136] 討論了不能有側向位移的边梁。对于在各边界与壳面垂直方向鉸接支撑的屋頂壳体，曾由Lee[137]給出了显函数的解。

Schatz[138]解决了平行四边形底面的圓柱壳的問題。

Schleeh[139]报导了关于圓柱壳实际計算中的核算問題。

大多数的稳定研究工作全是关于整圓筒的（見下章：圓管和容器)。在[100,120]中特別討論了屋頂壳考虑 Brazier 效应的稳定。进一步的討論見[11,70,72]。对于混凝土壳承載能力几乎总是由受压区的混凝土压力强度所限制。Olszak和Sawczuk在[68]和[79]中給出了一个裂縫理論的解，此外还可以見[120]。Bouma 在[79]报导了一系列一般加筋的和預应力加筋的混凝土壳的破坏試驗，并作了相应的比較計算。

屋頂壳体的自振問題曾由 Brinkmann [140]用計算自振頻率的 Rayleigh 商数的最小值方法近似地計算过。关于整圓筒的自振問題見[70,141]。

圓柱形管和容器

具有几何和荷載的旋轉对称性

薄壁罐弯曲理論的基础是罐方程 [142]。 它具有弹性地基梁的四阶微分方程的形式。除了[11,70]这两部基本著作和已絕版的[143]以外，关于罐的著作首先应提到Конторович的书 [144]，这本书对溫度荷載下的厚壁罐进行了研究。对于內压力和边緣荷載的重要情況（这些情況是确定与相联构件的連續条件所需要的），Wittneben在 [145] 中給出了变形和內力。还对具有平底的罐和具有任何子午线形式的罐进行了試驗。Márkus[146]給出了变厚度柱面、球面和圓錐面中边界干扰传导的迭代法。

这样，就可以把任何形状的罐联結在一起，参見[120,147,148,149]。

[150] 給出了在任何壁厚下逐步計算弯曲干扰的又一方法。 在任何荷載、变壁厚、刚性加固环等情況下 Eneydi[116]的荷載分布法是非常实用的。精确的理論得到 Fredholm 型的第二类积分方程是这样，它的核是母线上任一点的挠度的影响线（Green函数）。Eneydi 对所选各点的荷載分布給出的线性方程系統乃是积分方程的有限比拟。与 Ritz 法中得到的平均值的近似相比較，这些点上的解是精确的。

[53,54,55,57,144, 151] 还对包括了厚壁罐的常态的和非常态的热应力进行了研究。关于有外包层罐的这类应力可参看[152]。

关于受外压力的未加固和环向加固的管的稳定問題見[153]。Moe [154]給出了圓环的最佳刚度。进一步的研究文章有[155]（試驗和理論的比較），[156]及 [67]中 Haywood 和Czerwenka 的文章。[11,70,157～159]也研究了外部受載的管的稳定和强度問題。

关于承受內压力的非圓形管的研究是[160]。

[162]通过一个因数考虑了由于管子离开了圓形而屈皺荷載减小的情况。[161]从椭圓出发探討了这一影响。[162,163]提供了关于承受外压力的非圓形管的文章。

在[164]中利用了Kauderer給出的非线性弹性定律的形式。Seth在[67]中发展了具有非线性几何方程的理論。

关于多层压力罐研究的綜述見[165]和[144,166]。[167]研究了这种压力罐的常态溫度应力。关于預应力混凝土管和罐的研究見[168,169]，关于隧道中用的混凝土管的研究，則可参看[170]。

討論具有非线性位移应变方程的纵向受压管稳定問題的新論著有[171]，有[67]中Kuranishi和Niisawa的文章，有[68]中Borusk-Warsaw及Lu和Nash的文章。后者还討論了純弯矩下的稳定問題。此外还可参考[70,72,101,102]和[172]。关于纵向和径向受压的管的研究可見[67]中Shnell的文章及[173]，关于試驗工作則可参看[174,175]。

受非旋轉对称載荷的圓柱形管

Miesel[176]早已詳尽地討論了靜力問題。从Flügge的微分方程出发用环向諧和解，得到了母线方向弯曲扰动的減幅振动。[177]研究了柱面上承受任何边緣荷載的任何各向異性問題。

[144]和[178]还討論了平放管的部分充盈状态。[170]根据薄膜理論，对具有加固隔板的連續管进行了計算。[179]批判地探討了薄膜理論和文献[132]。

此外[180,181,182]都进一步研究了工程上重要的問題。

对于放置在单个支承上的預应力壳体和容器来說，母线方向的力传遞問題具有很大的重要性。关于这方面的研究見[183,184]（文中批判地考慮了St.Venan原理；还可参見[185]）；[186～189]；試驗工作則有[190]。由于載荷Fourier級数的收斂性很差，理論研究并不便利于实用計算。[191]应用了褶板結构理論。

对于三个荷載方向的位移的影响函数，[192]得到了显函数的表达式。在这里可以非常清楚地看出Betti-Maxwell互等定律。

关于集中的径向荷載見[193～197]；沿母线的径向线荷載，在[198]中进行了討論。平放管和容器支座上的力传递問題，[199]、[200]作了理論上的研究，[201]中作了試驗研究。

此外，值得注意的还有[202,203]。

关于承受不对称荷載的閉合圓柱形壳体的稳定性研究見[77]中Nowacki的文章，[68]中Lu和Nash的文章及[204]。Flügge[70]研究了管段的稳定；此外还可参考[11,205]。

一般的柱形壳体

[206～209]以及[14,73]这几篇文章发展了弯曲理論。各种截面形式，如椭圓、摆线等的薄膜理論可見[70]。在[77]中Власов提出了一篇很值得注意的文章。在这篇論文里，象[14]那样，它把壳体理論和梁的工程弯曲理論和翘屈力扭轉作了比較。[210]对各种截面形式作了比較研究。当截面复杂时最后根据Lundgrcy的梁法，根据褶板（結构理論来計算等价体系或按照由几个圓柱形壳体組成的綜合体計算。[211]对稳定問題进行了研究。

旋轉壳体

一般的旋轉壳体

[14]采用Love-Kirchhoff假設和前面对于薄扁壳所作的近似，討論了薄膜理論和弯曲理論，它既討論了一般荷載也討論了旋轉对称荷載。Tölke[212]、Relssner[213]和Meissner首先发展了弯曲理論，并使实际計算成为可能。Rüdiger[214]給出了任何連續荷載的薄膜理論。Soare[215]在Pucher[82]的理論的基础上給出了一个任何荷載下的差分法，关于等强度的穹頂見[70]和[216]。[217]把Geckler的旋轉对称弯曲理論的解推广到任何荷

載。此外，还可参閱[11,70,75,219,220]和[67]中 Tsuboi 和 Akino 的文章。关于底面是多边形平面旋轉壳体的校核公式見[221]。

Gravina[222]和Löffler[223]专門研究了旋轉对称荷載的問題。Born[224]和Worch[75]列举了很多实际例子。[145]研究了旋轉对称情况下的任何子午线形式。Esslinger除了扁球形壳体[225]外，还根据梯度法探討了任何子午线形式的容器底[226]。[144]也对容器底作了詳尽的討論。許多著作都提供了实际試驗和用这些試驗进行計算的方法；这里应当提到的有[227,228,229]。在这方面[230]也进行了討論。

关于砖砌穹頂，[231]作了报导。

关于适用于利用电子計算机的計算法見[232]。

[70,233]以及在[67]中Григолюк的文章都討論了稳定性問題。和其它方面一样，关于这方面的批判性的文献介紹，可以在[70]中找到。

球形壳体

球形壳体的薄膜理論和弯曲理論，[11,14,70,71,73]作了闡述，[222]則根据各种近似法对旋轉对称問題作了詳尽的討論。[234]是一篇很基本的文章。单个支承上的球壳(通过板来传递面状切向力）的薄膜解[93]值得人們注意，此外可参看[73]和[235]。单个支承上的球壳的弯曲理論在[236]中可以找到。但計算量非常大，而且这一理論中的近似法也不总是彻底的。关于閉合球形壳体的影响面的研究見[237]。Tooth 和Kenedi 在[68]中从理論上和試驗上研究了局部剪力和力矩，例如，由于联結支承所引起的情况。Ashwell 在[67]中报导了研究集中荷載引起的大变形的情况。

关于承受非旋轉对称荷載的扁球壳的研究見[14,238]，关于底面是多边形的这种壳体可参見[239]。这里微分方程是精确的满足，而边界条件只在所选择的点才满足。对于底面为矩形的球形扇面，Doganoff 在[68]中作了探討。这里还給出了批判性的文献綜述。底面为任何形状的扇面，Kupfer 在[68]中作了研究，关于底面为弓形的球面部分的研究見[240]。

[222]和[241]特别探討了旋轉对称的靜力学問題。

[53,54,56,144,242,243]研究了热应力。

球形壳体稳定性的研究見[70,72,244,245]，[77]中Moe的文章和[67]中Будинско、Ebner、Григолюк的文章；此外还可見在[79]中Mehmel及Schmidt中的試驗結果。在扁壳的情况下稳定性对于設計是决定性的。各种理論和試驗結果相互之間有很大的差距。对边緣弯曲扰动給予屈皺荷載的影响，也有极其各不相同的看法。屈皺似乎是由于壳体表面的局部缺陷而引起。扁壳对于边界条件的变化特别敏感，因而为了掌握跳跃問題需要非线性几何方程，見[67]中Nash和Modeer的“板和扁壳的非线性特性的近似分析”一文，以及[69,70,246]。

椭圓旋轉壳体的研究見[14,70,247,248]。

圓錐形壳体

[249,250]討論了一般荷載的弯曲理論。[251]給出了含有圓柱形壳体 DKJ 近似法的弯曲理論。Медвадовский 在[68]中綜合地介紹了現有的理論和解法，并在做了进一步的近似[除了 DKJ 近似法以外]之后通过应用分离原理求得了一个閉合解。

Cassacci和Bosc[252]以及 Nash 在[68]中都研究了旋轉对称荷載，此外，对此进行了研究的还有[75,145,146,149,222,223,224,253,254]。

Hoff和Singer以及Cohen在[67]中的文章对外压力荷載下的屈皺进行了研究，关于这还可見[251]。

双曲线面

双曲线面壳体是負曲率壳体，它对边緣的弯曲扰动特别敏感，尤其是在母线方向存在集中荷載的情况下。[70,255～257]中批判地对薄膜理論作了論述。

平移壳体

一般的平移壳体

平移面或移动面是由一根母线曲线沿两根准线曲线平行移动而成。所有的曲线都位于平面內，准线曲线的平面是平行的并垂直于母线的平面。这种面可以具有$K \gtreqless 0$，并覆盖矩形底面。符号采用了 Dlschmger 和 Finsterwalder 所选定的[258]。

薄膜理論可以根据Flügge[70]Pucher[82]和 Zerna [259]的差分法来处理。在[259]中提到了[70]和[82]的缺点。应用应力函数[82]看来較迂迴并且由于在求应力时必須进行微分而成为不精确的原因。

Zerna[260]和Hruban[261]給出了薄扁壳体的边緣扰动的弯曲理論。此外可参見[14,30]。

[67]中Bouma的文章“弯曲理論在双曲壳体上若干应用”，[68]中Apeland和Попов的“平移壳体中弯曲应力的分析”[77]和[262]中Czonka、Tottenham、Власов的文章都討論了这个問題。Zerna得到了一个描述一个边緣上弯曲扰动的四阶常微分方程。关于正曲率壳体屈皺的試驗和經驗公式見[79]中Schmidt的报导。

更易于用来进行理論分析的有二次曲面壳体，卽椭圓抛物面（$K>0$）、抛物柱面（$K=0$）和双曲抛物面——也称为Hp壳体（$K<0$）。

椭圓抛物面

关于椭圓抛物面的薄膜理論的研究見[11,70,261,263～266]。弯曲理論的研究見[14,216,267]。[268]則对一般的正曲率壳体进行了研究。

双曲抛物面壳体

前面已經提到，应用双曲抛物面壳体的薄膜理論要特別謹愼。这方面的文章見[14,70,73]，見[78Nr.4]Parme的文章和[269～272]。Bongard[273]建立了仅仅应用Kirchhoff假設的双曲抛物面壳体弯曲理論；这一理論对于实用計算很不方便，Apeland 和 Попов在[68]中应用了薄扁壳体的理論，給出了特征方程的根及所有位移和內力的常数。由于边緣上单位荷載的影响，还用图表示出了一系列参数作用。进一步进行了研究的則有[274]。[275]报导了边緣上弯曲扰动的簡化計算。双曲抛物面壳体的試驗則可見[79]中Rowe、Brennan、Lauletta、Munro和Ahuja的文章。

劈錐曲面

劈錐曲面是一种特殊的平移壳体，这种壳体的准曲线是直线。这种壳体在法国建造較多。Hahn在[68]中，以及[276～279]都提供了这方面的研究文章。

拱壩

不用多加說明，只列举一些新的論著：[280～290]。

最后还可指出以下著作：[68]中Csonka 的文章“具有竪向支承面边梁的薄膜壳体”，和[291～295]。

立　　板

应力問題

除了基本著作之外，近年来出現了若干专門討論立板的书，首先应提到[296]，其次，[223,297]。具有复杂边界条件，特别是具有多連通域的立板只有在特殊情况下借助于复变函数論才是了解的，因而工程师們在处理这个問題上大多不能胜任，見[18,296,298～300]。在解决这样的問題，例如高层建筑上的挡风板时，人們常有效地利用光弹性方法[62,64,301,302]。关于应用光弹性方法研究热应力問題見[303]。适用于具体計算应力問題方法有差分法、多值法和松弛法[23,304～307]。許多研究是关于双支承或多支承的板梁[279,308～311]和弹性地基[312]的板梁。[313]研究了整浇立板和組合立板的近似計算。討論立板理論的其他一些著作有[314～322]。热应力的研究还可見[323,324]。

稳定性問題：薄板的屈皺問題

立板的稳定性，也叫做薄板的屈皺，随着板式結构的发展，首先是大型桥梁建筑中的板式結构而得到了广泛的研究。Klöppel和Sheer[325]的书可以认为是对矩形的、正交加固的、非固結支承的立板屈皺計算的阶段性总結。

特征值是通过能量法求得的 Rayleigh 系数。在位能中应用了线性几何方程。在[325]一书中列举了許多重要的文献。Stern[326]給出了用閉合半圆截面加强的薄板的屈皺值表。[47,327～330]提供了进一步的論文。Massonei [331]批判地考虑了线性几何关系的应用。

平　　板

在[11,71,75(1959),310,332]中可以見到附有大量文献索引的詳尽論述。

各向同性平板

固定荷載状态：对于一系列至今尚未研究的問題，已經有了各向同性平板的Kirchhoff 板方程的解。已有各种不同道路来求得內力的閉合的級数表示：直接求特解和双調和函数来解边界值問題[75,333]，求这个問題的积分方程中Green函数的奇点[334,335]和应用复变函数法[18]。这里借助于保角映象法常常可以十分簡单地表示复杂的边界条件，或者可以由不难求得的实数部分来計算位移函数的虛数部分。除此以外，我們还可以根据极限原理通过引进一般的 Lagrange 参数得出閉合解[336]。

关于矩形板的著作[337,338,339]和关于具有自由边緣的圆形板的著作[340]，是值得注意的。更多的論著在[341～348]中可以見到。許多专門問題都发表在“工程师論文集”(Ing.-Arch.)、“奥大利亚工程师論文集”(Österr.Ing.-Arch.)、“应用数学和力学杂志”(Ztshr.f.angew.Math.u.Mech.)、“应用力学杂志”(Journ.ofappl.mech.)及其他主要杂志中。

对于一系列在建筑实践上重要的問題，人們編制了各种表[349,350]。在数值計算法方面可以举出一般的差分法[351]，首先有Stüssi[352,306]的索多边形法，Collatz的多值法[23]，

这些方法都有了进一步的发展。平板的多值公式見[353]（数学方法）和[306]（靜力学方法）。在后一著作中边界公式的精确度比主要公式的要低，誤差的計算很困难。应当注意到，在点太少时，例如当主要公式只具有一次适用性时，多值法就无效了。这方面的更多的論述有[354,355]。

松弛法也很适用，但要求有熟练掌握此法的計算者。[25,38,336,356,357]研究了变分法，特别是用最小値原理和最大値原理来求結果。Ritz和Galrkin的近似方法，例如用来求正則化的多項式就很簡单。此法繁冗之处是相乘和积分。

Marcus[115]的荷載分布法在[358]中推广到了自由边緣上。

平板方程的近似积分法在[359,360]中有了发展。

在斜板和其他复杂形状的平板的情况下，最好采用机械或电来測量曲率进行实験研究。首先，由于采用了联合地测定两种曲率和扭轉变形[361]的方法，以及应用感应配电器和合理的电路图[362,363]，这种方法变得非常适用和經济。用这种方法时大多应用鋁制模型。

在弯曲应力的测定方面也应用光弹性方法。人們或者采用具有两层不同光学作用的板模型，或者采用由一种材料制成的可以反射光线的板。新的研究情況見[364,365和366]（附有大量文献索引），以及[62和64]。

关于Moiré法及其在壳体研究上的推广，de Josselin在[79]中作了报导。

在[367]中采用与上述类似的貼片法。具有大挠度的平板宜应用二阶理論[69，368，369,370]。特别是和普通的弯曲理論相反；边緣不能发生水平移动的平板的承載能力能够显著地提高，其原因是由于产生了薄膜应力状态。

关于厚板的研究見[71]。这里首先令人感兴趣的是，与Kirchhoff的理論相反，由于自然成拱作用而提高了承載能力。

Reissner在[11]和[37]中給出了在存在剪切变形下的板的进一步精确的理論。

对无梁楼板的理論，[11,71,372～375]进行了研究。

影响面

借助于Pucher的奇点法[376]，人們对建筑实践上重要的矩形板进行了系統的研究。采用了等高线，相交线和表来表示。Rüsch[380]給出了桥面的計算影响面。

Homberg和Marx[381]，以及[361～363]，此外还有[382,383]，借助于曲率测量对弯曲板的力矩的影响面进行了計算。关于斜板支座反力的影响面的研究見[363]。

正交异性板

这是个很大的题目，这里只能簡短地提到。除了适用的計算方法得到了发展外，对抗扭稳度和中間点的連續作用也有人进行了考虑，見論文[354,384～392]。在[11,332]中有綜合的报导。

通过很多試驗，确定正交異性板有很大的承載安全系数，这种安全系数最好根据二阶理論[393,394]和根据弹性理論来研究。

Krug和Stein在[395]中，借助于广泛应用的Pucher法求得了正交異性矩形板的影响面。此外，具有实行价値的重要著作有[396,397]。