面向21世纪课程教材
Textbook Series for 21st Century

概率论及试验统计

余家林 主编

高等教育出版社
HIGHER EDUCATION PRESS

面 向 2 1 世 纪 课 程 教 材
Textbook Series for 21st Century

概率论
及试验统计

余家林　主编

高等教育出版社
HIGHER EDUCATION PRESS

内容提要

本书是教育部"高等教育面向21世纪教学内容和课程体系改革计划"的研究成果，是面向21世纪课程教材. 内容包括随机事件的概率、随机变量的分布与数字特征等基础理论知识及常用的试验统计分析方法与SAS程序. 附录有试验统计用表与习题答案.

本书围绕试验统计、生物统计、经济统计、社会统计的要求，使理论与应用相融合，同时注意增强学生用数学的意识，培养学生用数学的能力.

本书由华中农业大学、湖南农业大学、河南农业大学、湖北农学院及贵州大学合编. 初稿经过华中农业大学多位教师在三个年级、六个专业近五百名学生中试用，经过多次修改. 本书可作为农业大学的教材，也可作为经济管理、社会学、生物学、医药学等专业的教材和读者自学的参考用书.

图书在版编目(CIP)数据

概率论及试验统计/余家林主编. —北京：高等教育出版社，2001.12

ISBN 7-04-010186-6

Ⅰ.概…　Ⅱ.余…　Ⅲ.①概率论②试验统计
Ⅳ.021

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2001)第 071840 号

概率论及试验统计
余家林　主编

出版发行	高等教育出版社		
社　址	北京市东城区沙滩后街55号	邮政编码	100009
电　话	010-64054588	传　真	010-64014048
网　址	http://www.hep.edu.cn http://www.hep.com.cn		
经　销	新华书店北京发行所		
印　刷	高等教育出版社印刷厂		
开　本	787×960　1/16	版　次	2001年12月第1版
印　张	17.75	印　次	2001年12月第1次印刷
字　数	320 000	定　价	15.30元

前　言

一、教材编写工作的回顾

1995年原国家教委适时推出了“高等教育面向21世纪教学内容和课程体系改革计划”.1996年,“高等农林院校本科数学(含生物统计)系列课程教学内容和课程体系改革的研究与实践”课题经原国家教委高教司[1996]61号文件批准立项,研究立即展开.华中农业大学制定了相应的改革方案,并在1997年至1999年按方案进行了三轮试验.当时的目标是理顺概率论、数理统计与生物统计、试验设计这三门课程的关系,并设想将各专业生物统计课中带有共性的一部分内容与概率论、数理统计合在一起,既加强生物统计的基础理论,又使概率论、数理统计与应用相融合,同时介绍SAS程序,取名为概率论及试验统计,课堂教学及上机实习共60课时.还设想将各专业生物统计课中不带共性的特色内容及试验设计内容,命名为试验设计及分析,单独开设,并增加一些新的内容,由原来的20课时增加到40课时.这样一来,两门课的总课时便可减少,内涵都有所增加.当时由余家林按上述设想编写校内教材,经过华中农业大学多位教师在三个年级、六个专业近五百名学生中试用,并经过多次修改形成本书的雏形.2000年底,华中农业大学、湖南农业大学、河南农业大学、湖北农学院及贵州大学的代表举行农林教育面向21世纪教材研讨会,决定集中五校的学识与经验,合编一本适合农业大学各专业使用的教材.

编写本教材的思路是:(1) 加强概率论及试验统计理论部分的教学,为后续课程的教学及学生从事专业工作奠定坚实的基础,为学生未来的深造作准备;(2) 注意概率论、数理统计与应用相融合,以增强学生用数学的意识,培养学生用数学的能力;(3) 全文采用第三人称写法,引导学生理解新的概念,发现新的规律,提出新的方法,与学生一起重走概率论及试验统计理论和方法的创新之路;(4) 给任课教师课前编写教案、课内因材施教留有余地;(5) 对试验统计、生物统计、经济统计、社会统计源自理工科的教材内容体系适当地进行重组,使例题与习题更适合农科学生要求.

本教材由华中农业大学余家林任主编,湖南农业大学周建军、河南农业大学曹殿立、华中农业大学朱倩军、湖北农学院刘兴卫及贵州大学罗文俊任副主编,华中农业大学董锐、肖枝洪参加了编写、审定及试教工作.

本教材由中国农业大学张嘉林教授主审.张教授具有渊博的学识与丰富的教学经验.上个世纪80年代,他参与编写了我国农业大学通用的系列数学教材,我们从中得到许多借鉴.这次又担任本教材的主审,提出许多指导性的意见,为本教材增色不少,特在此向他致谢.

在本教材出版的时候,我们还要向教育部致谢,是教育部推出的“高等教育面向21世纪教学内容和课程体系改革计划”为我们提供了一个参与的机会.向支持本教材出版的教育部高教司、高等教育面向21世纪教学内容和课程体系改革计划工作协调指导小组、04－6项目组、华中农业大学、湖南农业大学、河南农业大学、湖北农学院及贵州大学等五校的有关部门、特别是数学教研室的老师们致谢.向华中农业大学谢季坚教授致谢,他是这一套大学数学系列教材的发起人、多校联合编写教材的组织与推动者.

由于编者的水平所限,教材中的不妥之处难以避免,敬请读者和使用本教材的教师批评指正.

二、学科及课程简介

本学科包括概率论及试验统计,是数学的一个分支,研究随机试验与随机事件的数量规律。

概率论起源于17世纪中叶,最初是为了解答博弈问题,直到20世纪方才建立严密的学科体系.目前,概率论不仅在工业工程、农业工程等自然科学学科中有广泛的应用,在管理科学、社会科学学科中也有广泛的应用.

试验统计的起源更早一些,大概在人类学会数数的同时,也就学会了统计.一开始,试验统计仅仅局限于数据的收集与比较,以后便有了比例、百分率、各种统计图表.随着概率论的出现及其发展,试验统计学的理论与方法也逐步地创新,有了各行各业的统计学,有了更加专门化的分支,例如时间序列分析、可靠性理论等等.统计分析所得到的信息,已经成为工程师、农艺师、银行家、军事指挥人员、部门首长进行推断与决策的根据.

现在,概率论及试验统计作为一门数学课程,已经列入大专院校许多专业的教学计划.某些专业的硕士研究生入学考试、留学国外的资格考试试卷中也有一定比例的概率论及试验统计考题.有些专业的硕士研究生对这门课程还要深入地研读.

本课程讲授概率论的基础理论知识及常用的试验统计分析方法,使理论与应用融合,为工业工程、农业工程、经济管理、社会调查等学科的研究与应用奠定基础.

编者

2001年于华中农业大学

目　　录

第一章　随机事件的概率

§1.1　随机试验与随机事件

1. 随机试验

在概率论及试验统计中，试验是一个含义较为广泛的概念. 它包括在某些条件下所作的试验，包括对自然界和人类社会的事物及其发展与变化所作的观察或者测量.

不难发现，有一些试验的结果是必然的或者是不可能的. 例如，在 101 325 Pa下将水加热到 100 ℃是一个试验，结果水必然沸腾；又如，一个人不借助于任何工具，蹦一蹦，结果就飞上了蓝天，这是不可能的；还有一些试验的结果既不是必然出现的，也不是不可能出现的，在试验尚未结束之前，不能预知试验的结果，称为随机试验.

随机试验具有以下两个特征：

(1) 试验可以在相同的条件下重复地进行多次，结果不一定相同；

(2) 试验前能知道一切可能出现的试验结果，却不能预知哪一个结果会出现.

常见的随机试验举例说明如下：

例 1.1　上抛硬币　将一枚硬币垂直上抛，到达最高点后，垂直下落在水平的桌面上. 这是一个试验，其结果可能是有币值的那一面(正面)朝上，也可能是有图案的那一面(反面)朝上. 在硬币还没有落定之前，不能预知试验的结果. 因此，上抛硬币是随机试验.

例 1.2　丢掷骰子　将一粒骰子用两手捂住，上下摇动后，丢掷在水平的桌面上. 这是一个试验，其结果可能是 6 种不同点数中的某一点数朝上. 如果骰子还没有停止运动，试验的结果便不能事先知道. 因此，丢掷骰子是随机试验.

例 1.3　测量体重　从鸡舍中任取一只鸡测量其体重(单位：kg)也是一个试验. 假设用字母 w 表示体重，则 w 在某个区间内取值. 如果体重的最大值小于 3 kg，那么 w 可以是 0 至 3 之间的某一实数. 在任取一只鸡并测量出体重之前，不能预知 w 的数值. 因此，测量鸡的体重是随机试验.

说明：以上三例是有代表性的随机试验.

与例 1.1 类似的试验：(1) 一粒种子作发芽试验，结果是发芽或不发芽；(2) 某女子乒乓球队与水平相当的对手举行团体赛，结果是胜利或失败.

与例 1.2 类似的试验：(1) 一粒种子作发芽试验，结果是发芽期为 8 天、9 天或 10 天；(2) 某女子乒乓球队与水平相当的对手举行团体赛，结果是 2:1，2:0，0:2或 1:2.

与例 1.3 类似的试验：(1) 一粒种子作发芽试验，结果是 15 天的芽高 h(单位：cm)，它在某个区间内取某一实数；(2) 某女子乒乓球队与水平相当的对手举行团体赛，结果是比赛所用的时间 t(单位：h)，它在某个区间内取某一实数.

2. 随机试验的样本空间

在某一随机试验中，一切可能出现的试验结果组成的集合，称为这个随机试验的样本空间，记作 Ω. 但是，为研究方便起见，常常限定 Ω 中的试验结果，使它们在一次试验中必然有一个要出现并且只可能有一个出现. 或者说，在一次试验中，Ω 中的试验结果不可能都不出现，也不可能有两个以上的试验结果同时出现.

根据这样的限定，在例 1.1 中，若正面朝上这一试验结果记作 H，反面朝上这一试验结果记作 T，那么上抛一枚硬币的 $\Omega=\{H,T\}$. 上抛两枚或多枚硬币也是随机试验. 如果将两枚硬币区分为甲与乙，用(※※)表示上抛两枚硬币试验的结果，括号中的※将以 H 或 T 代替，第一个※表示上抛硬币甲的结果，第二个※表示上抛硬币乙的结果，那么上抛两枚硬币的样本空间 $\Omega=\{(HH),(HT),(TH),(TT)\}$. 在例 1.2 中，若 i 点($i=1,2,3,4,5,6$)朝上这一试验结果也记作 i，那么朝上的点数便可能是 1,2,3,4,5,6，丢掷一粒骰子的样本空间 $\Omega=\{i \mid i=1,2,3,4,5,6\}$或 $\Omega=\{1,2,3,4,5,6\}$. 丢掷两粒或多粒骰子也是随机试验. 丢掷两粒骰子的样本空间 Ω 有 36 个元素，记 $\Omega=\{(i,j) \mid i,j=1,2,3,4,5,6\}$，其中$(i,j)$表示两粒骰子中某一粒骰子朝上的点数为 i，另一粒骰子朝上的点数为 j. 在例 1.3 中，任取一只鸡测量体重的样本空间 $\Omega=\{w \mid 0<w<3\}$.

3. 随机事件

在随机试验中，可能出现、也可能不出现的某一件事情，称为随机事件或事件. 不同的事件可以用不同的大写英文字母来标记，例如 A，B，C 等等.

某一事件出现或不出现，实际上是由随机试验的结果来决定的. 如果将随机事件与随机试验的样本空间 Ω 相联系，则根据某一事件的意义可以找到样本空间 Ω 的一个子集，当子集中的一个元素出现时这个事件就出现了，当子集中的元素都不出现时这个事件就不出现. 因此，每一个事件都与样本空间 Ω 的一个

子集相对应.

如果某一事件只与样本空间 Ω 的一个元素相对应,则称此事件为基本事件.

在例 1.2 中,若 4 点朝上记作 A,偶数点朝上记作 B,朝上的点数不超过 4 记作 C,则 A 与 $\{4\}$ 对应,B 与 $\{2,4,6\}$ 对应,C 与 $\{1,2,3,4\}$ 对应.这种对应关系,通常就表示为 $A=\{4$ 点朝上$\}=\{4\}$,$B=\{$偶数点朝上$\}=\{2,4,6\}$,$C=\{$朝上的点数不超过 4$\}=\{1,2,3,4\}$.

作为特殊的情形,在随机试验中必然出现的事件称为必然事件,不可能出现的事件称为不可能事件.由于样本空间 Ω 中的元素必然有一个是随机试验的结果,而空集 $\varnothing$ 不包含 Ω 中的任何元素,因此必然事件与样本空间 Ω 相对应,不可能事件与空集 $\varnothing$ 相对应.这样一来,必然事件就记作 Ω,不可能事件就记作 $\varnothing$.

必然事件、随机事件、不可能事件的差异如下:

必然事件	随机事件	不可能事件
与 Ω 对应	与 Ω 的子集对应	与 $\varnothing$ 对应
在随机试验中必然出现	在随机试验中可能出现也可能不出现	在随机试验中不可能出现

4. 随机事件的关系及运算

根据事件与集合的对应关系,事件之间也有与集合之间相类似的关系及运算,并且表示集合之间相互关系及运算的 Venn 图,也可以用来表示随机事件之间的关系及运算.

设 A,B,C 为同一个样本空间 Ω 中的事件,它们之间有下列关系及运算:

(1) 包含与相等

如果 A 出现必然导致 B 出现,则称 A 被 B 包含或 B 包含 A,记作 $A\subset B$ 或 $B\supset A$.当 $A\subset B$ 时,凡是 A 中的元素在 B 中一定会有,又称 A 是 B 的子事件(如图 1.1 所示).

如果 $A\subset B$ 并且 $B\subset A$,则称 A 与 B 等价或相等,记作 $A=B$.当 $A=B$ 时,A 中的元素与 B 中的元素相同,只是事件的名称不同.

对于任意事件 A,$A\subset\Omega$ 成立;作为特殊情形,还规定 $\varnothing\subset A$.

(2) 事件的并(或和)

A 与 B 至少有一个出现所构成的事件称为 A 与 B 的并(或和),记作 $A\cup B$.

$A\cup B$ 是由三部分元素，即只属于 A 的元素、只属于 B 的元素、既属于 A 又属于 B 的元素所组成的集合，它是在只有 A 出现、或者只有 B 出现、或者 A 与 B 都出现的条件下跟随着出现的一个新事件（如图 1.2 所示）.

$A\cup B$ 的定义还可以推广至三个事件 A,B,C 以至 n 个事件的情形.

A,B 与 C 至少有一个出现所构成的事件称为 A,B 与 C 的并，记作 $A\cup B\cup C$.

$A_1,A_2,\cdots,A_n$ 至少有一个出现所构成的事件称为它们的并，记作

$$A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n \text{ 或 } \bigcup_{i=1}^{n} A_i .$$

作为特殊情形，当 $A\subset B$ 时 $A\cup B=B$.

还有 $A\cup\varnothing=A,A\cup\Omega=\Omega,A\cup A=A$.

(3) 事件的交（或积）

A 与 B 都出现所构成的事件称为 A 与 B 的交（或积），记作 $A\cap B$ 或 AB.

AB 是由既属于 A 又属于 B 的元素所组成的集合，它是在 A 与 B 都出现的条件下跟随着出现的一个新事件（图 1.3）.

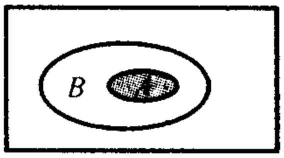

图 1.1 $A\subset B$

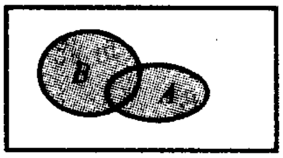

图 1.2 $A\cup B$

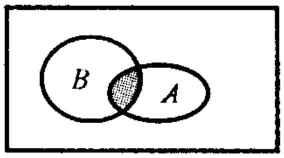

图 1.3 $A\cap B$

根据 AB 的定义，有 $AB\subset A\subset A\cup B$，当然也有 $AB\subset B\subset A\cup B$.

AB 的定义还可以推广至三个事件 A,B,C 以至 n 个事件的情形.

A,B 与 C 都出现所构成的事件称为 A,B 与 C 的交，记作 ABC.

$A_1,A_2,\cdots,A_n$ 都出现所构成的事件称为它们的交，记作

$$A_1A_2\cdots A_n \text{ 或 } \bigcap_{i=1}^{n} A_i .$$

作为特殊情形，当 $A\subset B$ 时 $AB=A$. 还有 $A\varnothing=\varnothing,A\Omega=A,AA=A$.

(4) 不相容事件与对立事件

如果 A 与 B 有可能都出现，则称 A 与 B 相容（如图 1.4 所示）. 这时，表示 A 的集合与表示 B 的集合有公共的元素，它们的交 $AB\neq\varnothing$. 如果 A 与 B 不可能都出现，则称 A 与 B 不相容. 这时，表示 A 的集合与表示 B 的集合没有公共的元素，它们的交 $AB=\varnothing$（如图 1.5 所示）.

当 A 与 B 不相容时，$A\cup B$ 通常记作 $A+B$，以强调 A 与 B 的不相容关系.

如果 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 中的任意两个事件 A_i 与 A_j 不相容，也就是当 $i\neq j$ 时 $A_iA_j=\varnothing$，则称这个事件组是互不相容的. 如果 $A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n=\Omega$，则称这

个事件组完备.

在随机试验的样本空间中,所有的基本事件构成互不相容的完备事件组.

如果 A 与 B 不可能都出现又必然有一个要出现,则称 A 与 B 互为对立事件,可以将 B 记作 $\bar{A}$,也可以将 A 记作 $\bar{B}$. 这时,A 与 $\bar{A}$ 一定不相容,它们的交 $A\bar{A}=\varnothing$,它们的并 $A+\bar{A}=\Omega$(如图 1.6 所示). 因此,A 与 $\bar{A}$ 也构成一个互不相容的完备事件组.

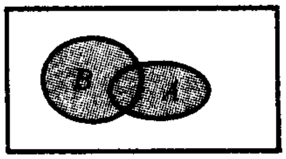

图 1.4 A 与 B 相容

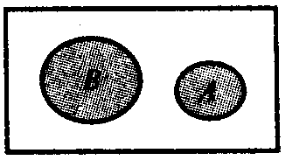

图 1.5 A 与 B 不相容

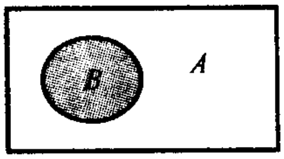

图 1.6 A 与 B 对立

以下是两事件相容、不相容与对立关系的比较:

A 与 B 相容	A 与 B 不相容	A 与 $\bar{A}$ 对立
有可能都出现,有可能都不出现	不可能都出现,有可能都不出现	不可能都出现又必然有一个要出现
$AB\neq\varnothing$,有公共的元素	$AB=\varnothing$,没有公共的元素	$A\bar{A}=\varnothing$,没有公共的元素;$A+\bar{A}=\Omega$,两者的元素合在一起便构成样本空间

(5) 两事件的差

A 出现而 B 不出现所构成的事件称为它们的差,记作 $A-B$.

$A-B$ 是由属于 A 而不属于 B 的元素所组成的集合,它是在 A 出现而 B 不出现的条件下跟随着出现的一个新事件(如图 1.7 所示).

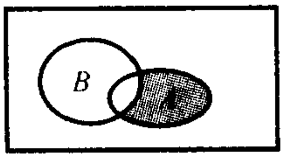

图 1.7 $A-B$

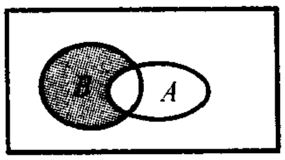

图 1.8 $B-A$

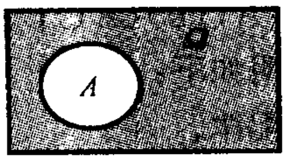

图 1.9 $\Omega-A$

根据对立事件的定义,对立事件 $\bar{A}$ 可以用差事件 $\Omega-A$ 表示(如图 1.9 所示),即:$\bar{A}=\Omega-A$. 差事件 $A-B$ 也可以用 A 与 $\bar{B}$ 的交事件 $A\bar{B}$ 表示,即 $A-B=A\bar{B}$.

在例 1.2 中,丢掷一粒骰子,若 $A=\{4\}$,$B=\{2,4,6\}$,$C=\{1,2,3,4\}$,则有:① $A\subset B$,$A\subset C$;

② $A\cup B=B=\{2,4,6\},A\cup C=C=\{1,2,3,4\},B\cup C=\{1,2,3,4,6\}$,
$A\cup B\cup C=(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C)=B\cup C=\{1,2,3,4,6\}$;

③ $AB=A=\{4\},AC=A=\{4\},BC=\{2,4\}$;

④ $A-B=\varnothing,B-A=\{2,6\},A-C=\varnothing,C-A=\{1,2,3\}$,
$B-C=\{6\},C-B=\{1,3\}$;

⑤ A 与 B 相容,A 与 C 相容,B 与 C 相容,
$\bar{A}=\{$朝上的点数不是 4$\}=\{1,2,3,5,6\},\bar{B}=\{$奇数点朝上$\}=\{1,3,5\}$,
$\bar{C}=\{$朝上的点数超过 4$\}=\{5,6\}$.

(6) 关系及运算的性质

① 包含关系具有传递性,相等关系也具有传递性,即:

若 $A\subset B,B\subset C$,则 $A\subset C$;

若 $A=B,B=C$,则 $A=C$.

② 事件的并满足交换律与结合律,即:

$$A\cup B=B\cup A;$$

$$A\cup B\cup C=(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C).$$

求 $A\cup B\cup C$ 时,或者先求 $A\cup B$ 再求$(A\cup B)\cup C$,或者先求 $B\cup C$ 再求 $A\cup(B\cup C)$.

③ 事件的交满足交换律、结合律与分配律,即

$$AB=BA;$$

$$ABC=(AB)C=A(BC);$$

$$A(B\cup C)=AB\cup AC.$$

求 ABC 时,或者先求 AB 再求$(AB)C$,或者先求 BC 再求 $A(BC)$.

求 $A(B\cup C)$时,可以先求 AB 与 AC,再求 $AB\cup AC$.

另外

$$(A\cup B)(A\cup C)=A\cup BC.$$

求$(A\cup B)(A\cup C)$时,可以先求 BC,再求 $A\cup BC$.

证明如下:

根据分配律,

$$(A\cup B)(A\cup C)=AA\cup AC\cup BA\cup BC,$$

而

$$AA=A,AC\subset A,BA\subset A,$$

$$AA\cup AC\cup BA=A\cup AC\cup BA=A,$$

所以

$$(A\cup B)(A\cup C)=A\cup BC.$$

例 1.4 熟悉运算 设 A,B,C 表示三个事件,试论述: