序

居今日而欲致國家於富强之林，登斯民於康樂之境，其道無他，要在教育、文化、經濟諸方面力求進步而已。自然科學之研究與發展，屬於文化領域之一環，同時亦爲國防建設之主動力，其在教育設施方面，實佔有甚大之比重，久爲識者所共喻。

巴西華僑徐君銘信，身羈異邦，心縈祖國，鑒於自然科學之發展與夫建國前途所關之鉅，嘗思盡一己之力，爲邦人士格物致知之助。比年以來，其慨捐於國內學術機構者，固已爲數不貲。前歲之冬，復搜購德國著名函授學校之數學、物理、化學、生物等優良課本約五百萬言寄臺，經東海大學吳校長德耀與溫院長步頤之介紹，欲以迻譯刋行，嘉惠學子之任，委諸元吉，自維學殖荒落，本不敢承，惟感於徐君所見者大，所志者遠，殊不宜過拂其意，爰勉受義務主編及統籌出版之命。嗣經先後約請江鴻（數學總執筆人）、宋瀓、李煥燊、南登岐、孫廣年(物理學總執筆人)、張壽彭、陳喜棠、許巍文、黃友訓、傅貽椿、熊俊（生物學總執筆人）、廖可奇、劉泰庠、鍾恩寵、關德懋（以姓氏筆劃爲序）諸君分任迻譯，復承臺灣新生報謝總社長然之、王社長嘯生及顏副總經理伯勤慨允由該社擔任印刷及發行工作，其事遂舉。顧以個人精力時間，均屬有限，一年以還，竭知盡能，時以能否符合信達雅之準則爲慮，幸賴各方碩彥陳力就列，各自靖獻，得如預期出書，以餉讀者，實爲元吉精神上莫大之收穫。今後倘蒙文教先進及讀者不吝匡翼，俾在吾國科學發展史上日呈緝熙光明之象，遂徐君之初願於萬一，並使其今後仍就此途徑邁進之志事，（徐君近復精選英文本初級科學百科全書，交由科學勵進中心* 譯印。）永感吾道不孤，邪許同聲，則尤元吉一瓣心香，朝夕禱祝者也。玆值本書出版伊始，謹誌涯略，並向協助譯印諸君子敬致感謝之忱。

湯元吉序於臺北

---

* 該中心爲一不以營利爲目的之財團法人，其宗旨在於促進科學教育、發展科學研究及介紹科學新知。現任董事爲李熙謀、錢思亮、趙連芳、林致平、徐銘信李先聞、戴運軌、鄒堃厚、湯元吉等九人。

編 輯 要 旨

一・本叢書包括數學、物理、化學、生物等四種。

二・本叢書物理、化學、生物等三種，均係採用德國魯斯汀(Rustin)函授學校之課本：數學一種，則係採用德國馬特休斯(Mathesius)函授學校之課本，分別遴請專家迻譯。

三・本叢書之供應對象，主要爲中等以上學校之學生、自行進修人士及從事教授各該有關課業之教師，故其內容亦以適合上述各界人士之需要爲主旨。

四・原書內於每一相當節段，均附有習題、複習題、試題及論文作業等，可使在學者增加反覆研討之機，自修者亦易得無師自通之樂。本叢書對於前三者均已予以保留，俾利讀者之研習。至於論文作業題目，本係該函授學校對於所屬學生之另一種教學措施，學生於作成論文後，校方尚需負修改之責，與本叢書旨趣未盡相同，故均於正文內予以省略，惟爲存眞起見，一俟本叢書出齊後，當彙印單行本，以供讀者參考。

五・本叢書因係依據原書格式譯輯而成，故未能於每一學科之首册中編列總目，擬俟全書出齊後，另行編印專册，以供讀者檢閱。

六・本叢書數學原文，每册約爲六萬字，而其餘各書字數自二萬餘字至四萬餘字不等，且各講自成段落，不能分割，故爲便利讀者及減輕讀者負擔，只能將其每二講或三講合印爲一册，字數遂在七萬餘字至九萬餘字之間。

七・本叢書所有各種科學名詞，一律採用國立編譯館輯譯，教育部審

定公布之名詞，但主編者認爲必要時，亦偶用其他譯名代替之；其爲上述公布名詞中所無者，則出於主編者或譯者之創擬。該項替代或創擬之名詞，是否妥善無疵，未敢自是，尙冀海內專家學者不吝賜教。

八・本叢書之迻譯工作係由多人執筆，行文屬辭，難免各具風格，主編者能力時間，均屬有限，故雖竭智盡慮，勉爲整理，亦僅能使其小異而大同，尙祈讀者諒之。

九・本叢書原文篇帙浩繁，約近五百萬字，出版須依一定進度，編者勢難將譯文與原文逐一核對，倘有未盡妥洽之處，亦請讀者隨時指教，俾於再版時更正，幸甚幸甚！

主編者謹識

數學第三冊目錄

上册　數

下册　體

上册　數

分數之加法與減法

例如$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}$，這個**命題**究竟有什麼意義？ 227

這樣相加的分數並不是一種比例，因爲拿比例來相加，那是沒有意義的；似此**命題**不如說是一種分割的要求（即將一件事物分解成爲若干部份）。參看第二册中之〔163〕節，並請讀者注意104〕 節之附註！至於在此是平分及三等分那一種數量或那一種大小，却沒有說明。但這個問題的意義並不是要把例如六十的二分之一與四十五的三分之一加起來，而是那個要平分及三等分的數量或大小在**同一**問題之內必須**相同**，雖然並沒有說明是什麼東西；因此，我們的**命題**應該如此寫法，例如：六十的二分之一加上六十的三分之一，或一百二十的二分之一加上一百二十的三分之一，餘類推。

現在要問：**我們究竟如何實行分數的加法和減法？**

我們對於上面最後所提出的問題，似乎可以如此算法：120 之$\frac{1}{2}$+120 之$\frac{1}{3}=60+40=100$，亦即實實在在的執行了平分以及三等分的工作。可是這種結果只對於某種情形才會有用，即要分割的數量確實等於120之時。但對於例如 30 之$\frac{1}{2}$+30之$\frac{1}{3}=15+10=25$ 等其他情形，又不適用了

加法問題的眞諦，例如$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}$，應該是這樣，**即相加結果（其和數）對于所有這一類的情形，都能適用才行**。我們由這種困難情形已找到了一條出路，假如我們按第二册中之〔179a〕圖所示，將0至1的一段（即線段單位）視爲任何數，例如120，30等的代表的話。這是可能的，因爲我們可以將這一段分成任意多

的相等部份，如 120 份或 30 份等。然後下面的分數就是那一線段單位的一半，三分之一，四分之一等等，因此對於任何一個數亦是如此。現在，我們如果須將分數加起來，只要把相當的各線段加起來就成了。

228 為了這個目的，我們特製了一種**分數計算尺**，用此尺便可隨意進行加減（看〔228a〕圖）：

228a

在第二册〔179a〕圖中，我們已將分數分別記於**並列的**兩條直線上，現在則將其集合於**一根**尺子上面，並且製成兩根這樣的尺子，然後使之配合成為一支計算尺。這種求整數的計算尺，我們已在第一册中〔18〕節介紹過了。每一根尺子的左端是以"*O*"數開始（但沒有刻在尺子上面）。

在上面〔228a〕圖中，讀者可從下面分劃的$\frac{1}{2}$分數出發，到了上面分劃例如$\frac{1}{3}$時，其和應為$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}=\frac{5}{6}$，看下面分劃即得。

假如我們稱線段單位為 a，則一般情形應為：

$$a\text{ 之}\frac{1}{2}+a\text{ 之}\frac{1}{3}=a\text{ 之}\frac{5}{6}\text{；}$$

或另一寫法：

$$\frac{1}{2}\cdot a+\frac{1}{3}\cdot a=\frac{5}{6}\cdot a\text{；}$$

又或不用乘的點號：

$$\frac{1}{2}a+\frac{1}{3}a=\frac{5}{6}a\text{；}$$

最後假如不說明分割的數量，則為：

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}=\frac{5}{6}$$

229 **習　題：**

試用**分數計算尺**求下列各數：

$a)\ \frac{1}{2}+\frac{1}{2}$；　$b)\ \frac{1}{2}+\frac{1}{4}$；　$c)\ \frac{2}{3}+\frac{1}{2}$；

$d)\ \frac{1}{2}+\frac{3}{4}$；　$e)\ 1\frac{1}{2}+\frac{1}{4}$；　$f)\ 1\frac{1}{4}+\frac{1}{2}$；

及讀者自撰的各種題目！

我們也可利用這種計算尺解答**減法問題**，參看第一册〔23〕節。讀者從上面的〔228a〕圖可以讀取：

$$\frac{5}{6}-\frac{1}{3}=\frac{1}{2}$$

習　題： 230

試用分數計算尺計算下列各數：

$a)\ \frac{5}{6}-\frac{1}{2}$；　$b)\ \frac{5}{6}-\frac{2}{3}$；　$c)\ \frac{3}{4}-\frac{1}{2}$；

$d)\ 1\frac{1}{4}-\frac{1}{2}$；　$e)\ \frac{2}{3}-\frac{1}{2}$；　$f)\ 1\frac{4}{5}-\frac{7}{5}$。

對於實際計算的許多問題，這種分數計算尺也是够用的，縱使讀者在那上面僅僅畫了二分之一，三分之一，……六分之一，八分之一，十分之一，以及十二分之一等。雖然有如此的方便，但我們最好還是不要完全依賴這種輔助工具，而應該學習一種方法，使我們對於任何只要能想像得到的分數都可以進行加法或減法。 231

例如計算：3 個二+5 個二=8 個二；或 3 個五+5 個五=8 個五；我們既然可將“1”的相等倍數隨便相加或彼此相減，當然也就可令同一類的數量或大小的相等部份相加或相減：

$$\frac{3}{2}+\frac{5}{2}=\frac{8}{2}；\quad \frac{3}{5}+\frac{5}{5}=\frac{8}{5}\quad 餘類推；$$

$$\frac{5}{6}-\frac{3}{6}=\frac{2}{6}；\quad \frac{11}{12}-\frac{8}{12}=\frac{3}{12}\quad 餘類推。$$

換句話說：

同名分數，或稱同分母分數(看第二册〔184〕節)的加減，只要將其分子相加或相減，而保留分母不變。

以數學上的簡單符號來表示（看第二册〔136〕節），則爲：

$$\boxed{\frac{z_1}{n}\pm\frac{z_2}{n}=\frac{z_1\pm z_2}{n}}$$

讀者若已明白此一近於不證自明的法則，必可將之牢誌不忘。

232 **不同名分數，或稱異分母分數的加減，先須把不同分母的分數化成同分母的分數。**

爲了使分數同名（卽通分母），必須利用分數的擴大（看第二册〔196〕節）。例如：

$$\frac{2}{3}+\frac{4}{5}=\frac{2\times5}{3\times5}+\frac{4\times3}{5\times3}=\frac{10}{15}+\frac{12}{15}=\frac{22}{15}=1\frac{7}{15}$$

在此讀者要注意：我們必須選擇一個數當作共同的分母，在這個數中旣包含分母3，也包含分母5；我們稱此數爲各分母的最小公倍數，也稱爲**公分母**。無疑的，這個**公分母**總是各個分母的乘積，在我們的例子中是 $3\times5=15$ 。現在爲使分數$\frac{2}{3}$之分母等於15，必須以 5 使之擴大（卽以 5 乘分子及分母）；但分數$\frac{4}{5}$則以 3 擴大之。

另外一個例子：$\frac{5}{6}-\frac{3}{4}$；假如我們選擇分母 6 和 4 的乘積卽 $6\times4=24$ 作爲公分母，則可計算如下：

$$\frac{5}{6}-\frac{3}{4}=\frac{5\times4}{6\times4}-\frac{3\times6}{4\times6}=\frac{20}{24}-\frac{18}{24}=\frac{2}{24}=\frac{1}{12}$$

若不選擇 $6\times4=24$ ，而取一較小但也能被 6 和 4 整除的數，卽 12，作爲公分母，可使上式更爲簡化：

$$\frac{5}{6}-\frac{3}{4}=\frac{5\times2}{6\times2}-\frac{3\times3}{4\times3}=\frac{10}{12}-\frac{9}{12}=\frac{1}{12}$$

但因在實際的算法中，很少需要加減一般的分數，故若選用各分母的乘積作爲公分母，並不會浪費太多的時間。因此，我們對於尋求分母的最小公倍數暫且不必定出一個法則來。

含文字數的分數之加減法（參看本册〔231〕節） 233

例如：

$\frac{a}{3} \pm \frac{b}{3}$；這些分數是同分母的；故其加減法極爲容易：

$$\frac{a}{3} \pm \frac{b}{3} = \frac{a \pm b}{3};$$

下面的例題也是一樣：

$$\frac{3}{a} + \frac{4}{a} = \frac{3+4}{a} = \frac{7}{a};$$

$$\frac{a}{b} \pm \frac{c}{b} = \frac{a \pm c}{b};$$

$$\frac{x}{a+b} \pm \frac{y}{a+b} = \frac{x \pm y}{a+b}。$$

（所須注意者，分數式的横線須水平且與等號同高；一般是在未寫分子和分母之前，就先劃好此一横線。）

異分母分數：

$$\frac{a}{3} + \frac{b}{4} = \frac{a \cdot 4}{3 \times 4} + \frac{b \cdot 3}{4 \times 3} = \frac{4a}{12} + \frac{3b}{12} = \frac{4a+3b}{12}$$

上述的和數 $4a+3b$ 不能再往前計算了；參看第一册中之〔19〕節。

$\frac{3}{a} - \frac{4}{b}$；其公分母是 $a \cdot b$ 之乘積；第一分數用 b，第二分數用 a 加以擴大：

$$\frac{3}{a} - \frac{4}{b} = \frac{3 \cdot b}{a \cdot b} - \frac{4 \cdot a}{b \cdot a} = \frac{3b-4a}{ab}$$

上式再無法繼續計算了；讀者首當牢記，在得數中必須分子分母同樣含有因子 a 或 b，始可相約。例如在商數符號 $\frac{3b}{ab}$ 中，便可約去 b，即 $\frac{3b}{ab} = \frac{3}{a}$。

但在我們的例題內，$3b$ 不過是差數的一部份而已，故不能使之約化（看第二册〔196〕節）。以後對此當再加以討論。

現在我們提出最後的一般法則：

$$\boxed{\frac{a}{b}\pm\frac{c}{d}=\frac{ad}{bd}\pm\frac{bc}{bd}=\frac{ad\pm bc}{bd}}$$

假如讀者在考試時遇着分數加法的問題，例如$\frac{1}{m}+\frac{1}{n}$；而讀者想不起通分母的法則，那末我們奉勸諸君：第一要鎭定，不要慌張；第二要以一定的數字如 2 和 3 代替文字數，使到問題變爲：$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}$；第三要畫一段直線s,用目力决定該線段的二分之一及三分之一。現在我們不相信讀者會將$\frac{1}{2}$加$\frac{1}{3}$的和數（亦即$\frac{1}{m}+\frac{1}{n}$之和）使之等於$\frac{1}{2+3}=\frac{1}{5}$（一般情形：$\frac{1}{m+n}$）。換言之，也就不可能以$\frac{1}{m\cdot n}$作爲答案。(在解決問題途中發現錯誤已屬一大收獲）。到了這個時候，各位諒已有所感覺，即我們對於二分之一與三分之一並不是很簡單的可以馬上把它加起來，却須事前使之通分。等到通分之後，很快就可獲得正確的答案了。

讀者也許會提出抗辯的說：考試的時候那有時間去考慮如此冗長的問題？——誠然，各位如想眞正了解問題的內容，自非花上幾分鐘不可，但若各位讀過本書之後，已經學會“以數學的觀點去觀察去構想”，意即對於任何一個數學問題決不能不加思索就貿然去做，或根據不懂得的公式去試求答案，而能對每一問題立即根據清晰的概念尋出其條理或關係，那末，各位便將很快的擺脫錯誤方向，走上正確途徑，自然談不上會有時間上的損失了。

234 習　題：

$a)\quad b)\quad c)\quad d)\quad e)\quad f)$

1) $\frac{2}{5}+\frac{1}{5}$；$\frac{3}{4}+\frac{4}{4}$；$4+2\frac{1}{5}$；$5\frac{4}{7}+2\frac{3}{7}$；$5\frac{3}{5}+\frac{7}{5}$；$8\frac{1}{4}+\frac{3}{4}$；

2) $\frac{7}{5}-\frac{3}{5}$；$\frac{8}{4}-\frac{3}{4}$；$6-\frac{2}{7}$；$6\frac{2}{5}-\frac{7}{5}$；$6\frac{1}{4}-5\frac{3}{4}$；$\frac{8}{3}-2$。

附註： 在 $2c$) 要使之變形，即 $6-\frac{2}{7}=5\frac{7}{7}-\frac{2}{7}$；

在 $2d$)：$6\frac{2}{5}-\frac{7}{5}=5\frac{7}{5}-\frac{7}{5}$，或 $6\frac{2}{5}-1\frac{2}{5}$。

3) $\frac{10}{a}-\frac{8}{a}$；$\frac{8}{b}+\frac{6}{b}$；$\frac{m_1}{n}-\frac{m_2}{n}$；$\frac{m}{n}-\frac{1}{n}$；$\frac{1}{n}+\frac{m}{n}$；$\frac{p}{r}\pm\frac{2q}{r}$；

4) $\frac{2}{5}+\frac{3}{7}$；$\frac{3}{5}-\frac{3}{8}$；$\frac{5}{8}+\frac{8}{5}$；$\frac{8}{5}-\frac{5}{8}$；$\frac{2}{3}+\frac{3}{2}$；$\frac{7}{12}-\frac{1}{4}$；

5) $\frac{a}{4}-\frac{b}{3}$；$\frac{3}{a}+\frac{b}{4}$；$\frac{3}{a}-\frac{4}{b}$；$\frac{1}{2a}+\frac{1}{3b}$；$\frac{5}{3a}-\frac{6}{2b}$；$\frac{1}{ab}+\frac{2}{c}$；

6) $\frac{a}{b}+\frac{b}{a}$；$\frac{a}{m}-\frac{2a}{n}$；$\frac{4a}{3m}-\frac{3a}{4m}$；$\frac{ab}{c}+\frac{c}{d}$；$\frac{2m}{8ab}+\frac{3n}{8ac}$；$\frac{1}{9n}+\frac{3}{mn}$；

7) $a)\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}$；$b)\frac{2}{5}+\frac{7}{8}-\frac{3}{10}$；$c)\ 4\frac{2}{3}-\frac{3}{8}-\frac{8}{3}$；

$d)10\frac{5}{6}+3\frac{7}{8}-4\frac{3}{4}$。

附 註：讀者除非預料在考場中有被問到下述問題的可能，方須熟記附註的內容。但倘讀者對此項實際上並無多大用途的問題的探討，感覺興趣，則又當別論。 235

在異分母分數的減法問題中，我們對於$\frac{5}{6}-\frac{3}{4}$第一眼就可看出 12 是它的最小公倍數，因此數可以被分母6和 4 整除而無餘。但若問題是$\frac{5}{36}-\frac{3}{48}$，試問它的最小公分母是什麼？為了解答這些類似的問題而不致用太大的公倍數來計算，我們必須討論：

1. 數的可分性（或稱整除性）

（我們在此所談論的，恒為一個數目是否可予整除的問題。）

a） 可為 2 及 5 所整除者

十之倍數都可以二整除之，如 $3\times10=30$ 是；推而至於一百，一千等

數亦然；但每個奇數的一位數，如 1 或 7，那就無法除盡了。爲了要知道一個複雜數如 1652 是不是可爲 2 所整除，我們只須看它的個位數；讀者在此立卽可以看出：

一個能爲 2 所整除的數，其個位數必須爲 0,2,4,6 或 8 之任一偶數。

可以 2 除盡的好比 104，3718 及 77790 ，不能除盡的好比 2225 或 86001。

同理是：

一個能爲 5 所整除的數，其個位數必須爲 0 或 5。

可以 5 整除的例如 3265 及 66030，但 554 或 6608 則不然。

b） 可爲 4 及 25 所整除者

凡一百之倍數都可爲 4 及 25 所整除，但單位數本身及其十倍數，或由二者所組成之數，則不盡然。（試擧例以明之！）

爲要知道一個數是否可以 4 或 25 整除，我們只須檢查其由十位數及個位數所組成的部份數目便可。

例如 5932 可以 4 整除之，因爲 32 是如此；4842 不可以 4 整除，因 42 不是這種情形。又如 6975 可以 25 整除，因爲 75 是如此；但 7523 卻不然，因 23 無法以 25 整除也。

c） 可爲 8 及 125 所整除者

凡一千之倍數都可爲8及 125 所整除，但單位數本身及其十倍數，百倍數，或由三者所組成之數，則不盡然。(試擧例以明之！）因此，我們只須觀察此已知數中，由百位數，十位數及個位數所組成的部份，便可了然，好比：48868 是不能以8除盡的，因爲 68 或 868 無法被整除；但 36375 便可以 125 整除之，因 375 和這種情形是相符的。

對於下面的規則必須事先加以說明：假如我們對於一個多位數，好比 486，不注意每個單獨數字的本位價值，却拿每個數字當作一個單位數的記號看待，而把如此求得的數目加起來，則得多位數的**橫向和數**。由此可知 486 的**橫向和數**是 $4+8+6=18$，1085 的**橫向和數**是 $1+0+8+5=14$。

d） 可爲 9 及 3 所整除者

請讀者諸君首先驗算下列各方程式：

$1\div9=0$, 餘數 1	$10\div9=1$, 餘數 1	$100\div9=11$, 餘數 1
$2\div9=0$, 餘數 2	$20\div9=2$, 餘數 2	$200\div9=22$, 餘數 2
餘類推	餘類推	餘類推
$8\div9=0$, 餘數 8	$80\div9=8$, 餘數 8	$800\div9=88$, 餘數 8
$9+9=0$, 餘數 9	$90+9=9$, 餘數 9	$900\div9=99$, 餘數 9

我們在"餘類推"空格內所省略的句子，亦請讀者塡補起來！每一直行**除法列**的最後一句，驟然看去，似乎不大合理，讀者不要嫌棄！無論如何這些方程式是一點都沒有錯。

請讀者再仿照上面的方法對於 1000÷9，10000÷9，如此類推地組成**除法列**！

結　果：若以九除一單位數，其餘數必爲此單位數；若以九除一單位數之十倍數，其餘數必爲此數之十位數；若以九除一單位數之百倍數，其餘數必爲此數之百位數，以此類推。設有一個複合數如 486 除以九，正好可以整除，其結果：486÷9=54。又如：

$$459\div9=(400\div9)+(50\div9)+(9\div9)$$
$$=44\,(\text{剩 }4)+5\,(\text{剩 }5)+0\,(\text{剩}9)\,;$$

是則如將 459 拆分爲 400，50，及 9 三個數，各以 9 除之，其**總餘數**應爲 4+5+9=18，亦即等於複合數 459 的**橫向和數**。現在假如這個**總餘數**可以 9 除盡時，則整個已知數 459 亦可以 9 整除之。在我們所舉的例題中，其**橫向和數** 18 可以九整約，那末 459 亦必如此。（讀者至此諒可看出，爲什麼我們可以寫 9÷9=0，餘數爲 9：不論如何寫法，卽 9÷9=1，剩 0；或 9÷9=0，剩 9，都是一樣的事；後者之剩餘是加入成爲"**總餘數**"，而在此應以九除之。）

定則：

一數的橫向和數，若可爲 9 整除，則該數必可爲 9 整除。

請讀者對於可以 3 整除的特性也作類似的觀察！在此只要如上所述以 3 代替 9，亦卽從下面方程式出發：

1÷3=0，餘 1；　2÷3=0，餘 2；　3÷3=0，餘 3；……

9÷3=0，餘 9；如此類推。——現在要問：好比 495 可以 3 除盡嗎？答案是肯定的，因爲橫向和數 4+9+5=18 是可以 3 整除的。

定則：

一數的橫向和數，若可爲 3 整除，則該數必可爲 3 整除。

e）可以 6，12，15 等整除者

因 6=2×3，故一個數假如既可以 2 整除也可以 3 整除時，必可以 6 整除之。換言之，卽假如它是一個偶數，同時其橫向和數可以 3 除盡的話。（試舉例以明之！）

因 12=3×4，故一個數假如既可以 3 整除也可以 4 除盡時，亦卽假如其橫向和數可以 3 整除，又其由十位數及個位數組成的部份可以4除盡的

話，必可以 12 整除之。（試舉例以明之！）

f） 對於可以其他和以上不同之數的整除性，

並沒有很簡單的規則可資遵循。

例如 861 是不是可以 7 除盡，實無一定的規則，我們只須依照一般的除法，以 7 除 861 便可證明，跟讀者在學校裡所學的完全一樣。

236

2. 素數之分解

凡只可以1及其本身除盡的數，叫做**素數**。由1至 100 共有二十六個**素數**：1，2，3，5，7，11，13，17，19，23，29，31，37，41，43，47，53，59，61，67，71，73，79，83，89 及 97。

玆將**素因數**（即因數是素數者）分解，舉例如下：

$$\begin{aligned} 11550 &= 10\times1155 \\ &= 2\times5\times5\times231 \\ &= 2\times5\times5\times3\times77 \\ &= 2\times3\times5\times5\times7\times11 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} 4620 &= 10\times462 \\ &= 2\times5\times3\times154 \\ &= 2\times5\times3\times2\times77 \\ &= 2\times2\times3\times5\times7\times11 \end{aligned}$$

237 **習 題：**

試分解下列各數爲素因數：

a) 8000； b) 7260； c) 14400； d) 2583； e) 10000！

238

3. 最小公倍數

設須完成下面的加法：

$$\frac{13}{11550}+\frac{17}{4620}$$

所謂**最小公倍數**是同時能被 11550 及 4620 二數所整除的最小之數，此數必包含 11550 和 4620 所公有的及獨有的**素因數**（參見〔236〕節）此數（亦即公分母）僅須包含兩個"2"(來自 4620)，一個"3"，兩個"5"(來自 11550)，一個"7"和一個"11"。故應爲：

$$2\times2\times3\times5\times5\times7\times11=(2\times5)\times(2\times5)\times(3\times7)\times11$$
$$=10\times10\times21\times11=100\times231=23100$$

我們爲了求得第一分數的**擴大數**（看第二冊〔196〕節），只要將公分母

$2\times\ 2\ \times3\times5\times5\times7\times11$ 與 11550 作一比較，亦卽與

$2\times\qquad 3\times5\times5\times7\times11$ 作比較便可；我們發現：必須以 2 乘 11550 才能獲得 23100；由此可知第一分數的擴大數就是這個"2"。第二分數的**擴大數**我們也可求出，只要將公分母

$2\times2\times3\times5\times\ 5\ \times7\times11$ 與 4620 作一比較，亦卽和

$2\times2\times3\times5\qquad\quad 7\times11$ 作比較；其擴大數卽爲那缺少的"5"

請看下面的加法：

$$\frac{13}{11550}+\frac{17}{4620}=\frac{13\times2}{11550\times2}+\frac{17\times5}{4620\times5}=\frac{26}{23100}+\frac{85}{23100}=\frac{111}{23100}$$

我們故意選擇了一個比較難做的習題，在讀者的計算經驗中也許從來就沒有遇見過。但讀者對於這個方法的主要內容諒已認識清楚了。現在還有幾個比較容易做的習題：

$$\frac{5}{24}+\frac{7}{18}=? \qquad 24=2\times2\times2\times3$$

$$18=2\times3\times3$$

公分母：　$2\times2\times2\times3\times3=72$

24 的擴大數，$24=2\times2\times2\times3$　是 3；

18 的擴大數，$18=2\times\quad 3\times3$　是 $2\times2=4$

$$\frac{5\times3}{24\times3}+\frac{7\times4}{18\times4}=\frac{15}{72}+\frac{28}{72}=\frac{43}{72}$$

又 $\frac{13}{15}-\frac{7}{48}=?$　　$15=3\times5$

$$48=2\times2\times2\times2\times3$$

公分母：　$2\times2\times2\times2\times3\times5$

15 的擴大數，$15=\qquad 3\times5$　是16，

48 的擴大數，$48=2\times2\times2\times2\times3$　是 5

$$\frac{13\times16}{15\times16}-\frac{7\times5}{48\times5}=\frac{208}{240}-\frac{35}{240}=\frac{173}{240}$$

下面尚有幾個更爲容易的

習　題：

a) $\frac{2}{9}+\frac{11}{12}$；　*b*) $\frac{4}{15}-\frac{1}{12}$；　*c*) $\frac{7}{24}+\frac{7}{15}$；

d) $\frac{17}{18}-\frac{4}{15}$；　*e*) $\frac{5}{36}-\frac{3}{48}$；　*f*) $\frac{7}{100}-\frac{2}{75}$。

利用減法比較分數 239

我們在第一册〔23〕節中已利用減法以作整數的比較，在此也可應用同樣的計算方法，藉以比較分數。

例如：試問$\frac{3}{4}$比$\frac{2}{3}$大多少？答：$\frac{3}{4}-\frac{2}{3}=\frac{9}{12}-\frac{8}{12}=\frac{1}{12}$；可見$\frac{3}{4}$比$\frac{2}{3}$大$\frac{1}{12}$；或用另一種說法，卽$\frac{2}{3}$比$\frac{3}{4}$小$\frac{1}{12}$。此情形亦請讀者用分數計算尺弄個明白；又如一打的$\frac{3}{4}$和一打的$\frac{2}{3}$，究如何算法？

假如分數是同分母的，則不必通分便可彼此比較；倘要比較異分母的分數，就必須先使之通分。這在實用算法中是常有的事。

例如：有一種夾雜粘土的土地，其中含有二分之一的砂和五分之一的粘土。為使易於比較起見，可令$\frac{1}{2}$和$\frac{1}{5}$先行通分，即$\frac{1}{2}=\frac{50}{100}$；$\frac{1}{5}=\frac{20}{100}$。普通我們是以"百分率"(percent)代替一百分之幾，好比百分之五十，百分之二十。"百分率"可以簡單符號%表示，是則百分之五十可以 50%，百分之二十可以 20%表之。

我們將在後面再作詳細的討論，但現在就得注意在如此重要的百分率計算中，須先使到各部份（即各項分數）能作比較，即須先使它們獲得相同的分母 100 而後可。

習　題：

1）在有二十四個學生的 A 班中有十六個學生生病了，在 B 班有四十個學生，但生病的只有十八個。試問在比例上，那一班患病學生比較多些？請讀者完成詳細的比較！

2）在 A 校兩百個學生中有六個學生不能升級，在 B 校三百五十個學生中却有七名無法達此目的。試問這兩間學校中那一校的總成績比較好些？

3）再來一個"愚蠢"的問題：$\frac{2}{3}$究比$\frac{3}{4}$。"大"多少？

240 分數定方程式：

請讀者先溫習一下第一册第〔50〕節中關於定方程式的一切！

習　題：

	a)	b)	c)
1)	$x-\frac{2}{3}=\frac{3}{2}$；	$\frac{2}{3}-x=\frac{3}{2}$；	$\frac{2}{3}=x-\frac{3}{2}$；
2)	$\frac{2}{5}-x=5$；	$x-\frac{5}{2}=5$；	$\frac{2}{5}=x-5$；

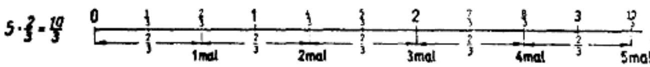
3) $x+5\frac{1}{2}=6\frac{2}{3}$； $6\frac{1}{5}-x=2\frac{3}{4}$； $1\frac{1}{2}=2\frac{5}{6}-x$。

（不要忘記驗算！）

分數之乘法

a) 乘數是一整數，被乘數是一分數。 241

命題 $5\cdot a$ 是要求一數量 a 的五倍數；在此 a 可能爲任何一個數值，也可能是一個分數。我們在〔241a〕圖中將問題$5\times\frac{2}{3}$表示於一種量尺上面：



241 a

假如我們對於三分之一數上好幾次（好比每次數作兩個三分之一），則乘積也包含三分之一，那是毫不足怪的。假如我們將此問題及其答數如此寫法：$5\times\frac{2}{3}=\frac{5\times 2}{3}=\frac{10}{3}$；那末我們便可看出下面定則的正確性：

分數與整數相乘，只須乘其分子，而保留其分母不變。

其通式如次：

$$\boxed{m\cdot\frac{a}{b}=\frac{m\cdot a}{b}}$$

這個定則不必死記。能了解其不證自明的內容，才是緊要的事情。萬一讀者有時懷疑這種習題應該如何運算，最好請想一想上面的〔241a〕圖！

b) 乘數是一分數，被乘數是一整數。 242

這種情形我們早已知道了（看第二册〔163〕節）：例如命題$\frac{1}{4}\times 8$ 是要求將數量 8 分成四等分，即每等分等於$\frac{1}{4}\times 8=2$。

c) 乘數和被乘數都是分數。 243

在第一册第四節中，我們已經認識了一個例子。讀者不要忘