科學圖書大庫

由畢達哥拉斯至愛因斯坦

譯著 王昌銳

徐氏基金會出版

科學圖書大庫

由畢達哥拉斯至愛因斯坦

譯者 王昌銳

徐氏基金會出版

美國徐氏基金會科學圖書編譯委員會

科學圖書大庫

監修人　徐銘信　科學圖書編譯委員會主任委員
編輯人　曾遒碩　科學圖書編譯委員會編譯委員

中華民國五十九年五月十四日初版

由畢達哥拉斯至愛因斯坦

定價　新台幣十五元　港幣三元
改訂為臺價0.80

譯者　王昌銳　高雄工業專科學校教授

內政部內版臺業字第1347號登記證

出版者　財團法人臺北市徐氏基金會出版部　臺北郵政信箱第3261號　電話519784號
發行人　財團法人臺北市徐氏基金會出版部　林碧鑾　郵政劃撥帳戶第15796號
印刷者　大興圖書印製有限公司　三重市三和路四段一五一號　電話979739號

我們的一個目標

文明的進步，因素很多，而科學居其首。科學知識的傳播，是提高工業生產，改善生活環境的主動力，在整個社會長期發展上，乃人類對未來世代的投資。科學宗旨，固在充實人類生活的幸福也。

近三十年來，科學發展速率驟增，其成就超越既往之累積，昔之認爲絕難若幻想者，今多已成事實。際茲太空時代，人類一再親履月球，這偉大的綜合貢獻，出諸各種科學建樹與科學家精誠合作，誠令人有無限興奮！

時代日新又新，如何推動科學教育，有效造就人才，促進科學研究與發展，允爲社會、國家的急要責任，培養人才，起自中學階段，學生對普通科學，如生物、化學、物理、數學，漸作接觸，及至大專院校，便開始專科教育，均仰賴師資與圖書的啓發指導，不斷進行訓練。科學研究與教育的學者，志在將研究成果貢獻於世與啓導後學。旨趣崇高，立德立言，也是立功，至足欽佩。

科學本是互相啓發作用，富有國際合作性質。歷經長久的交互影響與演變，遂產生可喜的意外收穫。

我國國民中學一年級，便以英語作主科之 ，然欲其直接閱讀外文圖書，而能深切瞭解，並非數年之間，所可苛求者。因此，從各種文字的科學圖書中，精選最新的基本或實用科學名著，譯成中文，依類順目，及時出版，分別充作大專課本、參考書，中學補充讀物，就業青年進修工具，合之則成宏大科學文庫，悉以精美形式，低廉價格，普遍供應，實深具積極意義。

本基金會爲促進科學發展，過去八年，曾資助大學理工科畢業學生，前往國外深造，贈送一部份學校科學儀器設備，同時選譯出版世界著名科學技術圖書，供給在校學生及社會大衆閱讀，今後當本初衷，繼續邁進，謹祈：

自由中國大專院校教授，研究機構專家、學者；

旅居海外從事教育與研究學人、留學生；

大專院校及研究機構退休教授、專家、學者；

主動地精選最新、最佳外文科學技術名著，從事翻譯，以便青年閱讀，或就多年研究成果，撰著成書，公之於世，助益學者。本基金會樂於運用基金，並藉優良出版系統，善任傳播科學種子之媒介。掬誠舉陳，願學人們，惠然贊助，共襄盛舉，是禱。

徐氏基金會敬啓

7

新數學文庫

本文庫係由當代數學專家廿餘人所編撰，全世界均有譯本，乃數學權威之寶典。其目的在確立中等學校學生及社會大眾之某些頗饒興味，而易領悟的重要數學觀念。本文庫內容，多不含於中學數學教科書中，且難易懸殊，有的部份，需要特別研究。

學習數學的最好方法，爲多做習題。各書所附習題，有些頗爲艱深，需要愼密思考。讀者應養成手持紙筆，從事閱讀之習慣，自能得心應手，趣味盎然。

本文庫共二十册陸續出版，以供讀者研習。除第十七册係由葉哲志先生承譯外，其餘各册均由王昌銳教授承譯。（定價每册港幣4元，新台幣25元）

1. 有理數及無理數 (Numbers:Rational and Irrational)
2. 微積分研究 (What is Calculus About ?)
3. 不等式論(An Introduction to Inequalities)
4. 幾何不等式(Geometric Inequalities)
5. 高中數學測驗（第一册） (The MAA Contest Problem Book 1)
6. 大數論 (The Lore of Large Numbers)
7. 無窮數之妙用 (Uses of Infinity)
8. 幾何移轉 (Geometric Transformations)
9. 連分數 (Continued Fractions)
10. 圖形及用途 (Graphs and their Uses)
11. 匈牙利數學問題詳解（第一册） (Hungarian Problem Book 1)
12. 匈牙利數學問題詳解（第二册）(Hungarian Problem Book 11)
13. 數學史話(Episodes,from the early history of mathematics)
14. 群與圖(Groups and their Graphs)
15. 特別數學(Mathematics of Choice,or How to count Without Counting)
16. 由畢達哥拉司至愛因斯坦 (From Pythagoras to Einstein)
17. 高中數學測驗（第二册） (The MAA Contest Problem Book 11)
18. 拓撲學基本概念 (First Concepts of Topology)
19. 幾何研究(Geometry Revisited)
20. 數目理論入門 (Invitation to Number Theory).

譯　　序

自一九〇五年愛因斯坦(Einstein)發表其相對論以來，使古典式的科學理論，特別是時空觀念與計量方式，產生極大的變革。推而及於物理學、力學、化學、工程技術，爆炸，碰撞現象，能與動量變化移轉及其不滅定律等數學問題，莫不受其影響；相對論遂成爲近六十多年以來，科學上一大主流，誠爲二十世紀科學理論方面之一大變革。

其實，畢達哥拉斯(Pythagoras)定理之有名公式 $a^2+b^2=c^2$ ，却是非正式的通往相對論的一條主要綫索或途徑。也可以說，經由畢達哥拉斯定理及其各種演變，便能產生相對論變靜止能爲動能的有名公式：$e=mc^2$. 因此本書討論目標是相對論，但却名其書爲"由畢達哥拉斯至愛因斯坦"。

本書一開始，便提示畢達哥拉斯定理之幾何形式，而後復以代數形式表示，繼作進一步之修正，最後於特殊相對論中，又擔任極爲重要之角色。前四章，比較淺近，頗能爲一般中等以上學校學生所接受；而其餘部份，雖僅運用撞擊概念，來說明能與動量之不滅定律，但却比較艱深，讀者應有相當之物理學及力學造詣，始能領悟；由向量幾何，將進至於豐美偉大之相對論園地。

本書著著佛萊德里克司(Kurt O Friedrichs)博士，於1901年，生於德國，1925年接受戈廷琴(Gottingen)大學之博士學位。1930 年成爲布朗司威工業學院教授，1937年於紐約大學會合其師庫南特(Richard Courant)，而成爲庫南特教育科學會之一員，且爲國家科學院效力。其研究及著作，偏重於物理學門所含之數學分析方面，如相對性、彈性、流體力學及量子論等是；本書爲其力作，故予譯介，以供我學子，研究相對論之來龍去脈，促進對此新的科學理論之瞭解，從而調整科學研究之態度，提高研究效果。

本書係應徐氏基金會廣譯新書，吸收新學之約而譯。書中譯名，力求普遍流行，詞句力求通俗易懂，重要名詞術語，且留綴原文，以資對證，促進領悟。譯稿多勞吾妻蔣君英女士協助整校，深爲感激，特誌勿忘

中華民國五十九年三月十日

湘潭花石王昌鋭 序於高雄工專

前　言

本書非對某一讀者群而語，第一章基於六年級一次特別數學課之講詞；第二章之內容，屬於基本代數；而第三、第四及第五章之內容，可供第十二年級生研究；第六及第七章題材，可爲中學高年班學生涉獵，但亦可供大學生閱讀。基本歐幾里德幾何知識，應已具備，如更有某些熟知之物理學基本概念，將有助於閱讀本書。

希望本書，亦將有用於教師，作爲正規課程所未包含之資料及觀點來源；本書中之主要觀點，及引導觀念，於引言中已予解釋。

爲求不妨害陳述之完整性，許多詳細部份，已予略去；如斯詳細部份，或許於練習中，提供綫索以彌補之。

本書題材，由一固定綱目，循某種曲折路綫而支配之；很自然的，著者如見最少有一讀者，循此路綫，而有始有終，將引爲快事。

引　　言*

本書目標，爲於各種數學與物理說明中，討論畢達哥拉斯定理 (Pythagorean theorem)，並指出此等概念，於特別相對論中之意義。

畢達哥拉斯定理，於數學歷史過程中，與許多基礎數學定理，遭遇相同命運。首先，此等定理於發現之初，引人震驚，而沉潛於所需之原始創造性證明中；於時間歷程中，此等定理，曾置於能由或多或少之例行演繹法，以導出概念性骨架；最後，於此骨架之一新的原理安排，此等定理曾化爲簡單的用爲定義，此尚不需意謂已淪於毫無意義之境。所變化者，徒爲一定義已曾帶來生命，而使於數學新支系發展之中，作爲有效引導原則，吾人目標之一，恰爲證明此作爲，係描述畢達哥拉司定理之生命圈。

於本書第一章中，以歐幾里德 (Euclid) 幾何之骨架中，畢達哥拉斯定理之最簡單證明討論，來作開始。而後，提出一較少常用之證明，該證明基於可能由小及中型之畢達哥拉斯方形圖，一樣的同於較大之方形，以覆蓋平面，而此兩掩蓋，於同樣移動之下，重新產生，由於其打擊性之直覺要求，及強烈反於“第二階段”證明，而選此證明，容後論之。

於第二章中，在“有符號之數目”的標題下，吾人提供一簡略之正與負實數作業基本規則之說明，以備第三章從事向量 (vector) 概念引論，作爲立場。

向量概念，獲得（與許多其他數學概念）一種不同於畢達哥拉斯定理所遭受之命運，此概念對大部份之數學，及特別對數學物理，非常重要。然而，於早期之幾何教學中，並不得其門而入。人或納罕，所加諸接受此概念之阻力，是否由於其無聲無臭，了無生氣，或是否由於其爲相對的抽象的新數學理論，艱深難解。

於向量作業規則確立之後，此等規則之例行應用，引出畢達哥拉斯定理，而後，此乃爲吾人“第二階段”證明。

此定理生命圈之第三階段，將於吾人討論就一正交單位向量體系之向量分量 (component) 概念以後出現，吾人將顯示更改吾人態度，定義向量爲其分量之產物，如何有利；而後作業規則，立即顯明，但於此態度之轉變中，

* 此引言之意義，主要爲對本書所含資料，略知一二之士，作一介紹。

畢達哥拉斯說明，不再是一定理；而用爲一種定義，畢達哥拉斯說明，仍視爲保持其意義與作用之定義：變爲三量度以上，幾何發展之引導原則；事實上，變爲無窮多量度之幾何發展引導原則。此發展，於許多方式，曾提供自然數學敘述之適當輪廓。

於本書第二部份，將提出某些力學基本原則，其中向量及向量作業，均作爲基礎工具，吾人將不致力於力爲向量之概念，但吾人自身確信以考慮速度 (velocity) 及動量 (monetum) 爲向量。

動量概念，於撞擊理論中，擔任重要使命。於此作爲中，兩運動物體（質子，質點）彼此打擊，而後於相殊之方向，彼此運動離去，或組成一“混合物” (compound particle)。應求確定，此等“彈性”(elastic)及“非彈性”(inelastic) 撞擊 (impact) 行爲，屬於物理基本現象。一言以蔽之，撞擊爲含於基本質子，內在行動中之基本行爲。

接受“能與動量不滅定律”爲基礎，吾人首將討論彈性撞擊。於討論非彈性撞擊時，吾人視機會討論熱能與勢能概念（不使用功之概念）。爲保持能力不滅混合質子之可能“內在能”（或潛能）(internac energies)，非彈性撞擊之相反者，將稱爲一種“爆炸行爲”，而以一砲或火箭之動作示範之。

本書之最後目標，爲顯示向量及畢達哥拉斯定理（於一修正之形式）之概念，於相對論 (theory of relativity) 中之作用。吾人主要討論，復爲撞擊問題；但於開始時，將提出特別相對論之一些基本定理。

爲解釋吾人趨向特別相對論之態度，吾人增加少許敘述，以適應熟稔此論之士。

吾人將舂重於此理論動力部份有關運動中堅定之測量棒，與鐘（即彈簧）

應用之論點，而非如空間及時間之性質。此等論點，能一如藉助棒與簧所作有關空間及時間量計說明，而非常自然地確立。反過來，此等說明，能運用一無窮量度式之內乘積的向量幾何，以參照表示之。此處畢達哥拉斯定理，於經過根本變化以後；再行出現。

於敘述以棒與鐘表示之愛因斯坦 (Einstein) 動力學時，吾人將不參考光之傳播；使用光速，於此速率 c 之動力學中從事辨識，將不予額外之考慮。

於相對論中不問力學，吾人將運用動量向量之自然相似，於典型分類力學中，四量度向量，其第四分量爲與由一項 mc^2，所表示之動能，密切相關，此爲一“靜止能”，於該階段，尚不能給予一物理解釋。吾人將使用能-動量向量，以確立彈性及非彈性撞擊，此與相反之非彈性撞擊關連，而將引致靜止能之愛因斯坦解釋。

因之可以證明本書，非由“單一目的”所導引。不同意義之不同思想路綫，均曾相互交織；詭辯之水準，極快產生。然而，希望此書，能有助於期望進入數學，及數學物理，豐富而多采多姿之世界者。

目　錄

第一章

畢達哥拉斯定理

畢達哥拉斯所發明之定理，有關於一直角三角形之諸邊，如斯三角形之三邊，係相鄰於直角之兩腿，及相對於此角之斜邊。畢達哥拉斯定理，提供三邊長度間之一關係；如其他之邊爲已知，可使人計算斜邊之長度。

欲決定一邊，或任何直綫之綫段長度，應先選一單位，或一特別綫段之長度取作單位者，則可表示任一綫段之長度，爲如斯單位綫段之一倍數，如謂一綫段之長度爲三，意即其爲長如單位綫段之三倍。

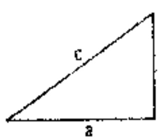

圖1. 直角三角形與腿 a, b, 及斜邊 c.

於此意義之中，以 a 與 b，表示兩腿之長度，以 c 表示斜邊之長度（圖1），畢達哥拉斯定理，乃組成而如公式

$$c^2 = a^2 + b^2.$$

顯然，當長度 a 與 b 爲已知時，其長度 c 即能算出，因能計算出任何正數之平方根也。由是，取以上公式各數之平方根，乃求得

$$c = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

公式 $c^2 = a^2 + b^2$，能直接提供一幾何意義，茲於三角形兩腿之上各作出一正方形，且於其斜邊作一正方形，見圖2. 顯然正方形之面積爲其邊長度之平方 *，公式 $c^2 = a^2 + b^2$ 因此乃能表示爲謂斜邊上之正方形面積，等於諸邊向外作出之正方形面積之和，事實上，而爲由歐幾里德稱爲畢達哥拉斯定理之幾何定則。

如何方能證明畢達哥拉斯定理？許多不同之證明，曾予提出，而吾人將提示幾種完全不同之途徑，引致如斯證明。

* 原文中之第一"平方"，表示圖形，第二"平方"，表示邊之自乘乘積。

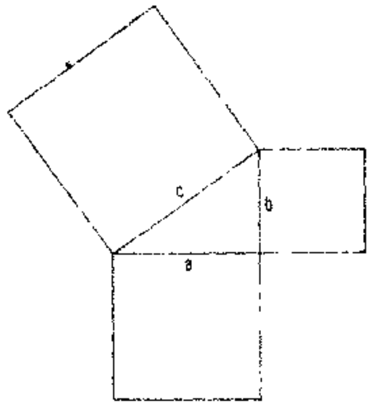

圖 2. 直角三角形，具正方形於其腿與斜邊上。

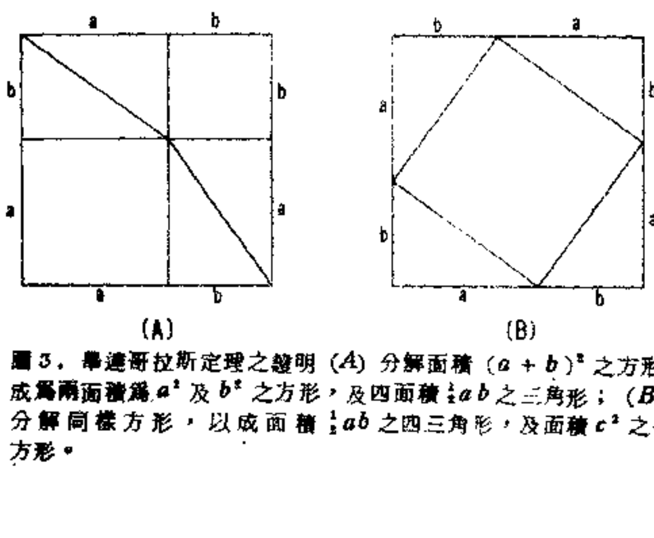

圖 3. 畢達哥拉斯定理之證明 (A) 分解面積 $(a+b)^2$ 之方形，成爲兩面積爲 a^2 及 b^2 之方形，及四面積 $\frac{1}{2}ab$ 之三角形；(B) 分解同樣方形，以成面積 $\frac{1}{2}ab$ 之四三角形，及面積 c^2 之一方形。

於本章中，吾人將提供兩幾何證明，於第一者，吾人考慮"邊" $a+b$ 之正方形；（見圖 3）*於此"大正方形"之一角落，吾人畫一"邊"爲 a

* 此處吾人使名詞"邊"，而應曾使用過"邊具長度"，此比較方便，吾人將繼續使用此方便之簡單說法。

之正方形；於其相對之角落，置"邊"爲 b 之正方形，結果尙存兩矩形，各具邊 a 及 b。由是，大正方形之面積，爲具邊 a 及 b 之方形面積 a^2 及 b^2，及具邊 a 與 b 矩形面積 ab 之二倍的和；見圖 3(A)。

各矩形可視爲兩直角三角形，各具腿 a 與 b 之和，現可置此四不同之三角形於大正方形中，示於圖 3(B) 中。如是，各爲置於大正方形一角，其短腿在左，長腿在右，如由外側看去，便如此情況。由此等三角形之斜邊所包圍之圖形，爲一四邊形，其各邊之長度爲 c，事實上，此圖爲一正方形；因於邊 $a+b$，兩三角形相遇之一點處，三角混合，而成一直綫角，其中之二，已相對於兩全等直角三角形之腿 a 與 b，而爲相餘，因此，加成直角一個；故所餘之角，亦爲一直角。

由是而知大正方形之能分解爲方形 a^2 與 b^2，及四具腿 a 及 b 之三角形者，能依樣分解爲具面積 c^2 之方形，且復具腿 a 及 b 之四直角三角形。假想四直角三角形，由兩圖中移去，乃知面積 a^2+b^2，遺留於一圖中，而等於他圖所留面積 c^2 之方形。換言之，乃已導出說明 $a^2+b^2=c^2$。

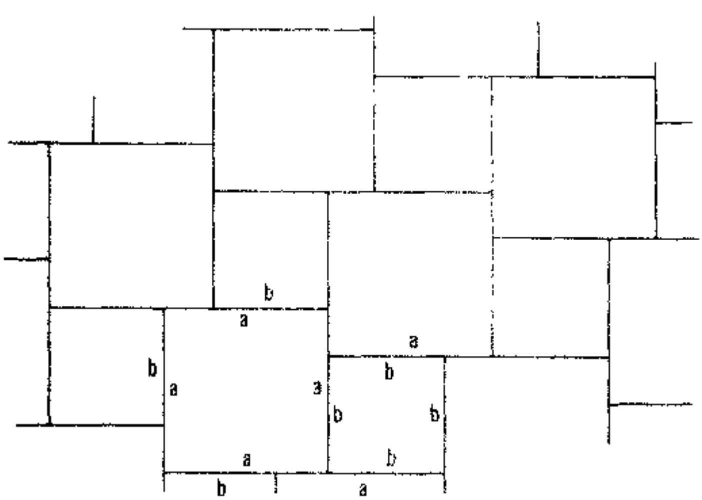

圖 4A．由邊 a 與 b 方形所覆蓋之平面。

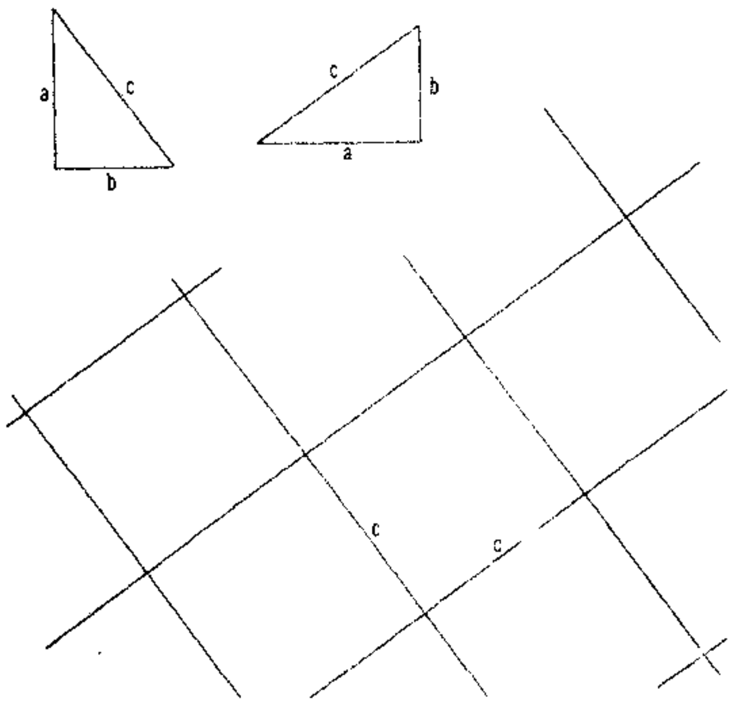

圖 4*B*. 由邊 c 方形所覆蓋之平面。

此證明極爲簡單 —— 或許直覺掌握，較其他幾何證明，更爲容易 —— 但非十分直接，取代面積 a^2+b^2 及 c^2 之直接對等，兩較大正方形之面積而爲相等。人或驚奇於是否可能尚有畢達哥拉斯定理之直接證明。例如，能否將兩方形 a^2 及 b^2 割成碎片，復混合此等碎片，組成方形 c^2？ 如斯之一切碎及重新混合，誠爲可能；事實上，且可能有無窮多之方法，吾人爲此，舉一簡單方法如下：

吾人假想全部平面，由邊 a 及 b 之方形所覆蓋，其形式示於圖 4*A* 中；吾人復假想平面，由邊 c 之方形所覆蓋，示於圖 4*B* 中，而視此等覆蓋爲第一與第二"陣列"，第二陣列諸邊，均平行於其腿爲 a 與 b 之諸直角三角形

斜邊，腿 a 與 b 之安排，係平行或垂直第一陣列諸方形之邊者。

有許多標定第二陣列，使與第一者建立關係之可能性。當然，吾人能隨意選定其諸頂之一的位置。當然，所有其他諸頂位置，由是而定（見圖5）。如第二陣列選定之頂，處於第一陣列之一特別方形中，則第二陣列所有其他之頂，處於全等方形中之對應位置。

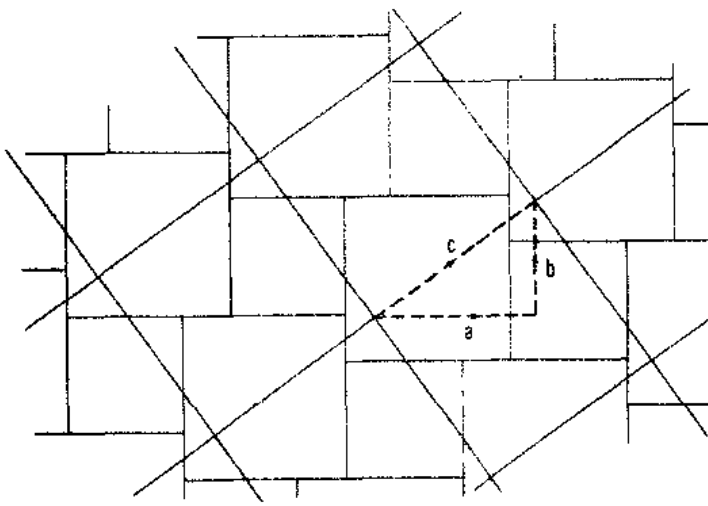

圖 5. 重疊於第一陣列上之第二陣列。

為求解釋"對應位置"之意義，吾人觀察第一陣列之任一方形，能簡單的首先向右移動一水平距離 a，而後向上移動一垂直距離 b，轉移至一全等之方形位置，於圖5可見。於此位移之中，方形各點，走向新方形中對應之一點。

各點之位移，亦可謂其點沿一直角三角形之腿 a 及 b 移動而描述之；顯然，此位移可更直接的循三角形之斜邊 c，移動該點，以見其效。如第二陣列之一頂，係沿如斯之斜邊移動，結果將止於一全等方形之頂。

應用同樣理論於所有四個方向，由第二陣列之一頂，引向諸鄰頂，且重複實施任何次數，乃知第二陣列所有諸頂，有第一陣列全等方形中之對應位置。

現考慮第一陣列一對相鄰方形，如 $\mathscr{A}$, $\mathscr{B}$，其邊爲 a 及 b，而第二陣列中一方形 $\mathscr{C}$，與方形 $\mathscr{A}$ 及 $\mathscr{B}$ 相交，見圖6。顯然第二陣列方形之邊，將方形 $\mathscr{A}$ 與 $\mathscr{B}$，切成碎片。各如斯之碎片屬於 $\mathscr{C}$ 或屬於全等於 $\mathscr{C}$ 諸方形之一，於後一情況，此碎片全等於 $\mathscr{C}$ 內，由第一陣列直綫所切出之一碎片，如現在所有 $\mathscr{A}$ 與 $\mathscr{B}$ 之碎片，切出而又於 $\mathscr{C}$ 中重新組合，各碎片將置於其對應位置，而後彼等完全塡滿方形 $\mathscr{C}$。由是而知 $\mathscr{C}$ 之面積，的確等於 $\mathscr{A}$ 與 $\mathscr{B}$ 面積之和，而引出說明 $c^2=a^2+b^2$. 即等於說，已引出畢達哥拉斯定理之說明。

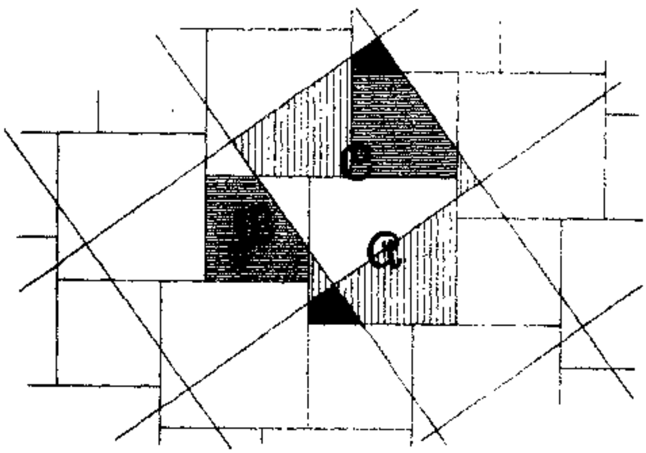

圖6. 方形 $\mathscr{A}$ 與 $\mathscr{B}$ 之次區分，於方形 $\mathscr{C}$ 中，重新組合。

應予確定，吾人目前討論，並非完整，因已同意於取簡單幾何定理之一數目，而來予嚴格導出，將不難提供此等切開與重組方形，各方式所遺落之鏈環，如已作此，乃得畢達哥拉司定理之一證明。然而，除僅提供一簡圖外，並未實行此定理之詳細證明。注意，吾人已給予無窮多個如此之方格，因能於無窮多處，任選一處，以作第二陣列之一項，故而能由無窮多之可能性中，選擇方形 $\mathscr{C}$ 之位置。

於補充吾人討論之一切詳細部份，由圖形導出證明，推理之鏈，將變爲冗長而厭煩。如興趣專注於畢達哥拉斯定理之簡明與完整的證明，可採取如