科学版

研究生教学丛书

应用泛函分析

胡适耕 编著

科学出版社
www.sciencep.com

科学版研究生教学丛书

应用泛函分析

胡适耕　编著

科学出版社
北京

内 容 简 介

本书介绍抽象空间、线性算子与线性泛函、谱论、非线性算子与非线性泛函的基本理论和基本方法，通过典型例题说明泛函分析方法在方程问题、逼近与计算理论、随机现象研究、工程与经济模型等诸多领域的应用.

本书可作为理工科诸专业高年级本科生、研究生的教学用书，也适合科技工作者和教师参考使用.

图书在版编目(CIP)数据

应用泛函分析/胡适耕编著.—北京:科学出版社,2003.8
(科学版研究生教学丛书)
ISBN 7-03-011664-X

Ⅰ.应… Ⅱ.胡… Ⅲ.泛函分析-研究生-教材 Ⅳ.O177

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2003)第 058510 号

责任编辑:吕 虹 李鹏奇/责任校对:陈丽珠
责任印制:安春生/封面设计:黄华斌

科学出版社 出版
北京东黄城根北街16号
邮政编码:100717
http://www.sciencep.com
双青印刷厂 印刷
科学出版社发行 各地新华书店经销
*
2003年8月第 一 版 开本:B5(720×1000)
2003年8月第一次印刷 印张:16
印数:1—3 000 字数:298 000

定价:26.00元

(如有印装质量问题,我社负责调换〈环伟〉)

前　言

如果你是“应用数学”、“信息与计算科学”专业的大学生，或是要求有较好数理基础的理工科专业硕士生，你多半需要学习“应用泛函分析”课程，这就可能有机会读到本书了．按照传统习惯，在开卷之初，你似乎总会看到一番宣示：泛函分析之作用如何重大，其历史又如何辉煌．这些无疑都是事实．可惜，一个从未接触过泛函分析的读者，未必能被这番话语打动．据笔者的经验，很少有学生去细读那些洋洋洒洒的前言．读者更感兴趣的多半是：即将开始学习的这门课程好对付吗？它与已经学过的数学课程，如微积分学、线性代数、微分方程等，有何异同？当然，关于这类问题，也未必能从简短的前言中找到完全的答案．不过，确有一些话，应该有言在先．

首先，不妨如实告诉你：与你已学过的数学课程比较，你很可能会感到泛函分析要难些．其缘由主要是，泛函分析具有更大的综合性；而与高度的综合性相适应的，自然是一定的抽象性，但很少有人会本能地喜欢抽象．例如，你在线性代数中已学过线性方程组，在微积分学中学过隐函数方程，在微分方程论中学过常微分方程与偏微分方程，等等．这些方程纵然都不容易研究，但似乎还可捉摸．在泛函分析中，所有这些方程被熔于一炉了，抽象成了所谓算子方程．再如，你在微积分学、最优化及变分学中，学习到在各种条件下求极值．这些问题背景清楚，实际意义明确．而到了泛函分析中，它们全被概括到“泛函极值”这一抽象概念中了．这就失去了问题的原型性与直观性，而这正是初学者难以适应的．然而，需要提醒你，这是要点，付出这一代价非常值得！惟有如此，才能实现问题的彻底简化，从而为便捷地求解开辟道路．例如，统一多种方程的算子方程 $x = Fx$ 形式简单至极，在抽象空间的框架下，更便于对它作出深刻的分析．而且，通过类比与联想，在抽象空间中表述的问题亦呈现出某种直观的面貌，这就使在抽象化过程中失去直观性的问题，在更高层次上重新获得了直观，而且往往是更易于洞察与把握的直观．初看起来，真有些不可思议：经过抽象处理的问题往往更直观！你从泛函分析的学习中，就将体会到这种奥妙．

同样重要的问题是，你关心泛函分析的应用．很多泛函分析书籍都郑重宣告：泛函分析将应用到物理学、信息科学、工程技术乃至经济学．这些全是事实．然而，如果你指望从一本泛函分析书籍中看到所有这些应用，那么你多半会感到失望．实际上，这出于对一个数学学科的误解，我们将在此处尽量澄清这种误解．当将数学应用于某一实际问题时，首要的事情是建立适当的数学模型；而用于表述模型的数

学工具可能是微分方程、最优化或者随机过程等，很少直接运用更高层次的泛函分析概念来建模.在更多的情况下，是将泛函分析理论用于模型分析.当然，这最终为解决实际问题提供了强有力的方法.但很明显，泛函分析的应用既离不开问题所涉及的专业知识，也离不开用于建模的那些数学知识(如微分方程、最优化等).这就决定了泛函分析的应用很不简单直接，真能用作说明的例子可没有办法随手拈来.且不说作者自身不可避免地受到其专业知识的局限，即使真正联系于某一专门领域(例如经济学)的应用，亦未必能使其他专业的读者感兴趣.不妨强调一下，本书不是“泛函分析的应用”，而是“应用泛函分析”；对于后者，可解读为“供应用的泛函分析”，它提供泛函分析的基本概念、结论与方法，并为一些潜在的应用尽可能地指明方向.至于关于其应用的具体与深入的讨论，则是各个专门学科的任务，绝非泛函分析一家所能独揽的.如果说，“应用泛函分析”毕竟有别于“泛函分析”的话，那只是前者更强调泛函分析的应用背景，更注重泛函分析与邻近学科的联系，更重视其主要方法的实际可操作性.在这些方面，本书力求做得好一些，其效果如何，只能由读者来评判.

作者希望本书能为不同类型的学校与不同需要的读者所用——从仅需最基本的材料到需要稍深入的知识之间的几个层次.这一意图决定了本书的选材与结构.使用本书作为教材时，可依几种方式组合书中的材料.若选用§1.1～§1.5，§2.1～§2.5，§3.1～§3.4，则需48学时左右；若加上§3.5，§3.1～§3.3，则需60学时左右；讲完全部内容，约要70学时.关于内容的取舍，使用本书的教师是最权威的.他们富有创意的运用，将是对作者个人经验极有益的补充与修正，这正是作者所期待的.

胡适耕

记号与约定

A^c: 集 A 的补.

A°: 集 A 的内部.

$\bar{A}$: 集 A 的闭包.

$A^\perp$: 集 A 的正交补或零化子.

$B_r(a) = B(a,r)$: 以 a 为心以 r 为半径的开球.

$\bar{B}_r(a) = \bar{B}(a,r)$: 以 a 为心以 r 为半径的闭球.

$B(\Omega)$: Ω 上的有界函数之集.

C:复数域.

$C(A,B)$: 从 A 到 B 的连续映射之全体; $C(A) = C(A,\mathbf{K})$.

$C^m(\Omega)$: Ω 上的 m 次连续可微函数之全体; $C(\Omega) = C^0(\Omega)$.

$\mathrm{CL}(X,Y)$: 从 X 到 Y 的紧线性算子之全体; $\mathrm{CL}(X) = \mathrm{CL}(X,X)$.

$D(T)$: 算子 T 的定义域.

$d(A,B)$: 集 A 与 B 之间的距离; $d(x,B) = d(\{x\},B)$.

$\mathrm{diam}A$: 集 A 的直径.

$\dim X$: 空间 X 的维数.

δ_{ij}: Kronecker 记号.

∂A: 集 A 的边界.

$\{e_i\}$: 未加说明时表 $\mathbf{R}^n$ 或 l^p 的标准基.

F: 通常表示某个映射或算子; f: 通常表示泛函.

$\mathrm{GL}(X)$: X 上拓扑自同构之全体.

H: 通常记 Hilbert 空间.

I: 单位算子.

J: 常用来表示区间 $[a,b]$ $(a < b)$.

$\mathbf{K} = \mathbf{R}$ 或 $\mathbf{C}$; $\mathbf{K}^n$: n 维 Euclid 空间.

$\mathbf{K}^{m\times n}$: $\mathbf{K}$ 上 $m \times n$ 阶矩阵之全体; $A \in \mathbf{K}^{m\times n}$ 常写作 $[a_{ij}]$ 或 $[a_{ij}]_{m\times n}$.

L^p: p 次可积函数空间, $1 \leqslant p < \infty$.

L^∞: 本性有界函数空间.

$L(X,Y)$: 从 X 到 Y 的有界线性算子之全体; $L(X) = L(X,X)$.

m: Lebesgue 测度.

$\mathbf{N}$:自然数集.

$N(T)$: 算子 T 的零空间.

$\mathbf{Q}$:有理数集.

$\mathbf{R}$:实数集; $\mathbf{R}_+ = [0, \infty)$.

$R(F)$: 映射 F 的值域.

$R(\lambda, T)$ 或 R_λ: 算子 T 的预解式.

$r_\sigma(T)$: 算子 T 的谱半径.

$\rho(T)$: 算子 T 的正则值集.

S^1: 单位圆周.

$\mathrm{span} A$: 集 A 生成的向量空间.

$\mathrm{supp} f$: 函数 f 的支集.

$\sigma(T)$: 算子 T 的谱.

$\sigma_p(T)$: 算子 T 的点谱.

T: 通常表示线性算子; $T_\lambda = \lambda I - T$.

T^*: 算子 T 的对偶算子或相伴算子.

$\mathrm{V}_a^b(f)$: 函数 f 在 $[a, b]$ 上的全变差.

X, Y, Z: 通常记赋范空间.

X^*: 空间 X 的对偶空间.

$\mathbf{Z}$:整数集; $\mathbf{Z}_+$:非负整数集.

χ_A: 集 A 的特征函数.

$\triangleq$: 定义为.

$\equiv$:恒等于.

$\square$:定理或命题证完.

几点说明

1.指标用法 不致误解时,出现于符号 $\sum$,$\prod$,$\cup$,$\cap$ 下的指标予以省略.未加说明时,下标 n 遍取自然数.任给 $x\in\mathbf{R}^n$, $f:D\to\mathbf{R}^n$,自动认定 $x=(x_i)=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^{\mathrm{T}}$,$f=(f_i)=(f_1,f_2,\cdots,f_n)^{\mathrm{T}}$.任给 $x\in l^p$,认定 $x=(x_i)=(x_1,x_2,\cdots,x_i,\cdots)$,涉及与无穷矩阵相乘时看做列向量.

2.极限符号 $\lim\limits_n x_n$ 与 $\lim\limits_{m,n} x_{mn}$ 分别表示 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ 与 $\lim\limits_{m,n\to\infty} x_{mn}$;$\lim\limits_{t\downarrow 0}\varphi(t)=\lim\limits_{0<t\to 0}\varphi(t)$,$\rightrightarrows$ 表示一致收敛;$\xrightarrow{L^p}$ 表示 L^p 收敛;$\rightharpoonup$ 与 $\overset{*}{\rightharpoonup}$ 分别表示弱收敛与弱*收敛;$\overline{\lim\limits_n} x_n=\lim\limits_n\sup\limits_{k\geqslant n}x_k$,$\underline{\lim\limits_n} x_n=\lim\limits_n\inf\limits_{k\geqslant n}x_k$.

3.范数记号 不致混淆时,空间 $X,Y,X^*,L(X,Y)$ 等中的范数皆记作 $\|\cdot\|$;$\|\cdot\|_p$ 记 L^p 范数;$\|\cdot\|_0$ 记 sup 范数;$|\cdot|$ 记 $\mathbf{K}^n$ 中的 Euclid 范数.

4.零记号 数零、零向量、零算子与零泛函均记作 0.

5.集记号 集的标准表示是:$A=\{x:x$ 满足某条件$\}$,例如 $\{x:x\in\mathbf{R}$ 且 $f(x)>0\}$,也写作 $\{x\in\mathbf{R}:f(x)>0\}$ 或简写作 $\{f>0\}$.$f(A)=\{f(a):a\in A\}$;$x+A=\{x+a:a\in A\}$.

6.不等号的用法 对于 $A,B\subset\mathbf{R}$,约定 $A<B\Leftrightarrow\forall a\in A,\forall b\in B$,有 $a<b$;$A\leqslant B,a\leqslant B$ 等仿此.对 $f,g:D\to\mathbf{R}$,约定 $f<g\Leftrightarrow\forall x\in D$,有 $f(x)<g(x)$;$f\leqslant g$ 仿此;$f(A)<f(B)\Leftrightarrow\forall a\in A,\forall b\in B$,有 $f(a)<f(b)$;$f(A)\leqslant f(B)$ 仿此.

7.映射记号 $F:D\subset X\to Y$ 表示映射 $F:D\to Y$,D 是 X 的子集.$\varphi(x,y)$ 看作 x 的函数时记作 $\varphi(\cdot,y)$,$\cdot$ 表示自变量.若 $Fx\equiv x(\forall x\in X)$,则将 F 写作 I_X 或 I.

目　　录

第一章　抽象空间

本书所讲述的泛函分析理论与方法，将在一种类似于平常空间但更一般的数学结构中展开. 这类结构以具有极限运算为其基本特征，通常统称为抽象空间. 我们将重点介绍最常用的 Banach 空间，同时也论及稍特殊的 Hilbert 空间与更一般的度量空间. 有关这些空间的基本知识是进一步学习泛函分析的基础.

§1.1　Banach 空间

§1.1.1　赋范空间

空间概念的推广，对于你可能早已不是什么新奇的事了. 实际上，当你在线性代数中学习向量空间时，已经实现了从直观的 3 维空间到抽象的 n 维空间的飞跃. 如你熟知，Euclid 空间 $\mathbf{R}^n$ 由所有形如 $x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^{\mathrm{T}}$（下面缩写作$(x_i)$）的 n 维向量组成，其中定义了线性运算：

$$\alpha(x_i)+\beta(y_i)=(\alpha x_i+\beta y_i),$$

α,β 是任意实数. 更重要的是，我们能将 3 维向量的长度公式自然地推广到 $\mathbf{R}^n$ 中：任给 $x=(x_i)\in\mathbf{R}^n$，称

$$|x|=\Big(\sum_i|x_i|^2\Big)^{1/2} \tag{1.1.1}$$

为向量 x 的**模长**. 从长度自然地引出极限概念：若 $\{x^{(k)}\}\subset\mathbf{R}^n$ 是一向量序列，$x\in\mathbf{R}^n$，则约定

$$x^{(k)}\to x \Leftrightarrow |x^{(k)}-x|\to 0\quad(k\to\infty). \tag{1.1.2}$$

尽管 n 维 Euclid 空间已有一定的一般性，但还远不足以满足应用之需要. 现在面临一次更本质的跨越：从 n 维 Euclid 空间过渡到具有如下两方面结构的抽象空间（不妨记作 X）：

(i) 其中定义有线性运算；

(ii) 其中定义有“长度”，进而能由长度引出距离与极限.

为满足第一个要求，只需假定 X 是一般的向量空间①就够了. 至于“长度”，进一步

① 即线性空间，有关概念可参看任何一本线性代数教科书.

推广模长公式(1.1.1)似乎是一个自然的想法,但这至多适用于某些接近于 Euclid 空间的特殊系统,并不能达到一个一般的"长度"概念. 实际上,我们在利用模长公式(1.1.1)描述 $\mathbf{R}^n$ 中的极限运算时,很少需要直接运用表达式(1.1.1),而是利用模长的以下性质:

(i) $|\alpha x| = |\alpha||x|$;

(ii) $|x+y| \leqslant |x| + |y|$;

(iii) $|x| \geqslant 0$; $|x| = 0 \Leftrightarrow x = 0$($\mathbf{R}^n$ 的零元).

以上 $x, y \in \mathbf{R}^n$, $\alpha \in \mathbf{R}$. 这就启示出:若某个向量空间上定义了一种类似于模长的概念,它具有上述的性质(i)~(iii),则如同式(1.1.2)一样定义极限之后,就可将 Euclid 空间中那些仅依赖于性质(i)~(iii)的概念与结论推广于该空间. 以上想法引向赋范空间概念,它的严格定义在逻辑上是很简单的.

定义 1.1.1 设 X 是数域 $\mathbf{K}$(等于 $\mathbf{R}$ 或 $\mathbf{C}$,本书皆如此)上的向量空间. 若对每个 $x \in X$,指定了一个实数 $\|x\|$,称为 x 的**范数**[①],它满足以下**范数公理**:

(N_1)**齐次性**: $\|\alpha x\| = |\alpha| \|x\|$;

(N_2)**三角不等式**: $\|x+y\| \leqslant \|x\| + \|y\|$;

(N_3)**正定性**: $\|x\| \geqslant 0$; $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$.

(以上 $x, y \in X$, $\alpha \in \mathbf{K}$),则称 X 为 $\mathbf{K}$ 上的赋范向量空间,简称为**赋范空间**;当必须明确指出范数时写作 $(X, \|\cdot\|)$. 若 $\mathbf{K} = \mathbf{R}$(或 $\mathbf{C}$),则称 $\mathbf{K}$ 上的赋范空间为实(或复)赋范空间.

依定义 1.1.1, $\mathbf{R}^n$ 就是一个实赋范空间,其中的范数就是依式(1.1.1)定义的模长,也称它为 **Euclid 范数**. 类似地,同一公式(1.1.1)定义的范数使 $\mathbf{C}^n$ 成为复赋范空间. 今后以 $\mathbf{K}^n$ 泛指 $\mathbf{R}^n$ 与 $\mathbf{C}^n$,它经常用作解释赋范空间概念的模型.

与特殊的 Euclid 范数 $|\cdot|$ 不同,定义 1.1.1 中的**一般的**范数 $\|\cdot\|$ 无具体计算公式. 对此,需要说明两点:首先,就理论分析而言,真正本质的东西恰恰是范数公理(N_1)~(N_3),而不是范数的具体计算公式;正因为舍弃了范数的特殊表达式,才得以建立具有高度一般性的赋范空间理论. 另一方面,一旦需要将赋范空间理论应用于某一特定空间,就必须选择适当的范数公式,并验证它确实满足范数公理(N_1)~(N_3). 现在就来看一个简单例子.

例 1.1.2(有界函数空间) 设 Ω 是任一非空集, $B(\Omega)$ 是定义于 Ω 上的有界实(或复)函数之全体,它显然是一个实(或复)向量空间. 任给 $u \in B(\Omega)$,令

$$\|u\|_0 = \sup_{x \in \Omega} |u(x)|, \tag{1.1.3}$$

---

① 范数一词,今后将兼指特定向量 x 的范数 $\|x\|$ 与函数 $x \to \|x\|$. 在后一种意义上使用时,通常写作 $\|\cdot\|$,其中·代表变量 x.

则可直接验证:

$$\|\alpha u\|_0 = \sup_{x\in\Omega} |\alpha u(x)|$$

$$= |\alpha| \sup_{x\in\Omega} |u(x)| = |\alpha| \|u\|_0,$$

$$\|u+v\|_0 = \sup_{x\in\Omega} |u(x)+v(x)|$$

$$\leqslant \sup_{x\in\Omega} |u(x)| + \sup_{x\in\Omega} |v(x)|$$

$$= \|u\|_0 + \|v\|_0,$$

$$\|u\|_0 \geqslant 0; \|u\|_0 = 0 \Leftrightarrow u(x) \equiv 0 \Leftrightarrow u = 0,$$

以上 $u, v \in B(\Omega)$, α 是常数. 这就验证了范数公理(N_1)~(N_3),因而 $\|\cdot\|_0$ 确是一范数,称为 **sup 范数**或上确界范数; $B(\Omega)$ 依 sup 范数是一赋范空间. 今后使用空间 $B(\Omega)$ 时,总假定其中使用 sup 范数.

自然数集 **N** 上的有界函数就是有界数列. 因此,有界数列空间 $B(\mathbf{N})$ 是一赋范空间,通常记作 l^∞ 或 m; 对每个 $x = (x_i) \in l^\infty$, 其 sup 范数为

$$\|x\|_0 = \sup_i |x_i|.$$

不过,在这一特殊情况下,通常记作 $\|x\|_\infty$.

在下节中,我们将系统地介绍多种具体的赋范空间.

以下设 X 是一个给定的(**K** 上的)赋范空间.

为加强与平常 Euclid 空间的类比,我们将大量借用通常的几何术语,赋予抽象概念以某种直观形象. 例如, X 中的元称为点或向量; 向量 x 亦解释为从原点(即零元 0)到点 x 的有向线段(图 1-1),而 $\|x\|$ 即其"长度"; 当 $\|x\| = 1$ 时称 x 为**单位向量**. 经常用到的一个简单事实是: 若 $0 \neq x \in X$, 则 $x/\|x\|$ 是单位向量. 向量 y 也可表示为从点 x 到 $x+y$ 的有向线段. 三角不等式无非是说: 三角形一边之长不超过另两边长之和. 如同在 $\mathbf{R}^3$ 中一样,由公理(N_2)易推出:

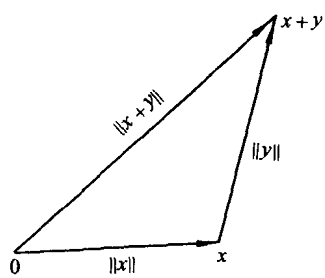

图 1-1

$$\left\| \sum_1^n x_i \right\| \leqslant \sum_1^n \|x_i\|, \tag{1.1.4}$$

$$\big| \|x\| - \|y\| \big| \leqslant \|x-y\|, \tag{1.1.5}$$

以上 $x_i, x, y \in X (1 \leqslant i \leqslant n)$. 你应当能说出这两个不等式的几何意义. 对任给

$x,y\in X$，称 $\|x-y\|$ 为点 x 与 y 之间的**距离**，也记作 $d(x,y)$. 更一般地，对任给非空集 $A,B\subset X$，定义 A 与 B 之间的距离为

$$d(A,B)=\inf_{a\in A,b\in B}\|a-b\|. \tag{1.1.6}$$

约定 $d(x,B)=d(\{x\},B)$. 定义 A 的**直径**为

$$\mathrm{diam}A=\sup_{x,y\in A}\|x-y\|, \tag{1.1.7}$$

当 $\mathrm{diam}A<\infty$ 时称 A 为有界集. 显然，A 有界可等价地刻画为

$$\sup_{x\in A}\|x\|<\infty.$$

§1.1.2 极限与完备性

上面定义了赋范空间 X 中的距离，因而可描述空间中两点的接近程度，而这正是定义极限的基础. 形式上，为在 X 中定义极限，几乎只需套用 $\mathbf{R}^n$ 中的极限定义式(1.1.2).

定义 1.1.3 设 $\{x_n\}\subset X$ 是一序列，$x\in X$. 若

$$\|x_n-x\|\to 0\quad(n\to\infty),$$

则说序列 $\{x_n\}$ **范数收敛**(简称为收敛)于极限 x，记作

$$x_n\to x(n\to\infty)\quad 或\quad \lim_n x_n=x.$$

由定义直接看出，在 X 中 $x_n\to x\Leftrightarrow x_n-x\to 0(n\to\infty)$. 因此，要描述空间 X 中的范数收敛，只需解释在其中 $x_n\to 0$ 的意义就够了. 对于一个具体给定的赋范空间，确切地指明 $x_n\to 0$ 的具体含义，无疑是一件重要的事. 对于 Euclid 空间 $\mathbf{K}^n$ 中的序列

$$x^{(k)}=(x_1^{(k)},x_2^{(k)},\cdots,x_n^{(k)})^{\mathrm{T}},k=1,2,\cdots,$$

直接看出 $|x^{(k)}|\to 0\Leftrightarrow x_i^{(k)}\to 0(k\to\infty,1\leqslant i\leqslant n)$. 这就表明，$\mathbf{K}^n$ 中的范数收敛原不过是通常的**依坐标收敛**. 其次，对于序列 $\{u_n\}\subset B(\Omega)$，有

$$\sup_{x\in\Omega}|u_n(x)|\to 0\Leftrightarrow u_n(x)\rightrightarrows 0\quad(n\to\infty,x\in\Omega),$$

这意味着空间 $B(\Omega)$ 中的范数收敛就是**一致收敛**.

在下节中，我们将解释更多的具体空间中的范数收敛.

读者从微积分学课程中熟识的许多极限性质，如极限的惟一性与收敛序列的有界性、极限的运算性质等，都可以推广到赋范空间中的序列极限，且无需逐一重新论证，只需指明在 Euclid 空间中所述性质的证明仅用到模长性质(i)～(iii)(对

应于范数公理(N_1)~(N_3))就够了.试用一典型例子解释如下.设在 X 中 $x_n \to x$,在 $\mathbf{K}$ 中 $\alpha_n \to \alpha(n \to \infty)$,今证在 X 中 $\alpha_n x_n \to \alpha x$.为此,只要作如下推理:

$$\begin{aligned}\| \alpha_n x_n - \alpha x \| &\leqslant \| \alpha_n x_n - \alpha_n x \| + \| \alpha_n x - \alpha x \| && (\text{用}(N_2)) \\ &= | \alpha_n | \ \| x_n - x \| + | \alpha_n - \alpha | \ \| x \| && (\text{用}(N_1)) \\ &\leqslant \text{const} \| x_n - x \| + | \alpha_n - \alpha | \ \| x \| \to 0(n \to \infty),\end{aligned}$$

其中用到 $\{\alpha_n\}$ 的有界性.这就推广了通常的极限运算性质:乘积的极限等于极限的乘积.

从微积分学中熟知,无穷级数概念不过是有限和运算与极限运算的综合.因此,在赋范空间中考虑无穷级数是很自然的.形式上,我们几乎可照搬微积分学中的定义:若 $x_n \in X(n = 1,2,\cdots)$,$s_n = \sum_1^n x_i$,$s_n \to x(n \to \infty)$,则说无穷级数 $\sum x_n$ 收敛于 x,或说 x 是级数 $\sum x_n$ 的和,写作 $x = \sum x_n$.若 $\sum \| x_n \|$ 收敛,则说级数 $\sum x_n$ **绝对收敛**.

至此,读者或许会认为赋范空间中的极限论原来很简单:无非照搬老的极限定义与结论而已.但你不可过分乐观,我们马上就要指出一个不能简单照搬的极限定理.在经典极限论中,最重要的定理无疑是:

Cauchy 收敛原理 数列 $\{x_n\}$ 收敛的充要条件是

$$\lim_{m,n} | x_m - x_n | = 0, \tag{1.1.8}$$

即

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N > 0, \forall m,n \geqslant N, \text{有} \ | x_m - x_n | < \varepsilon.$$

不幸的是,以上结果竟不能推广于一般赋范空间,下面就是一个简单的反例.设 P 是区间 $J = [0,1]$ 上的多项式之全体,则 P 依 sup 范数(3)显然是一个赋范空间.对于 J 上的任一连续函数,例如 $u = e^x$,由数学分析中的 Weierstrass 定理,必有多项式序列 $\{u_n\}$ 一致收敛于 u,即 $\| u_n - u \|_0 \to 0(n \to \infty)$,从而当 $m,n \to \infty$ 时有

$$\| u_m - u_n \| \leqslant \| u_m - u \|_0 + \| u_n - u \|_0 \to 0.$$

然而,限制在空间 P 内,序列 $\{u_n\}$ 却是不收敛的.

如果我们仍然希望 Cauchy 收敛原理在赋范空间理论中发挥作用,就必须将能够应用该原理的空间从一般赋范空间中明确划分出来.这就需要以下定义.

定义 1.1.4 若赋范空间 X 中的序列 $\{x_n\}$ 满足如下 **Cauchy 条件**:

$$\lim_{m,n} \| x_m - x_n \| = 0 \tag{1.1.9}$$

(对照式(1.1.8)),则称 $\{x_n\}$ 为 **Cauchy 列**.若 X 中所有 Cauchy 列均收敛,则称 X 为**完备赋范空间或 Banach 空间**.

直接看出,收敛序列必为 Cauchy 列;而定义 1.1.4 则规定 Banach 空间中的 Cauchy 列必须是收敛序列.因此可以说,Banach 空间正是**使 Cauchy 收敛原理成立的赋范空间**.这就将赋范空间分成了两类:完备空间与不完备空间.鉴于 Cauchy 收敛原理在经典分析中的重要性,不难理解,在泛函分析中完备性是重要的,尽管并不是处处必要的.

值得庆幸的是,应用上常见的赋范空间大多是完备的.首先,Cauchy 收敛原理表明 $\mathbf{K}$ 是 Banach 空间.进而容易推出 $\mathbf{K}^n$ 亦是 Banach 空间,而这又推出(依下面给出的定理 1.1.7)任何有限维赋范空间是 Banach 空间.例 1.1.2 所述的空间 $B(\Omega)$ 可作为无限维 Banach 空间的第一个例子,其完备性的验证是简单的(然而也是典型的):设 $\{u_n\} \subset B(\Omega)$ 是一 Cauchy 列,则 $\forall x \in \Omega$,数列 $\{u_n(x)\}$ 满足 Cauchy 条件,因而有极限 $u(x)$.在不等式

$$| u_n(x) - u_m(x) | \leqslant \| u_n - u_m \|_0 \quad (\forall x \in \Omega)$$

两边令 $m \to \infty$ 取极限得

$$| u_n(x) - u(x) | \leqslant \overline{\lim_m} \| u_n - u_m \|_0 \quad (\forall x \in \Omega),$$

因而

$$\| u_n - u \|_0 \leqslant \overline{\lim_m} \| u_n - u_m \|_0;$$

$$\overline{\lim_n} \| u_n - u \|_0 \leqslant \overline{\lim_n}\, \overline{\lim_m} \| u_n - u_m \|_0 = 0^{①}, \quad (\text{用 Cauchy 条件})$$

这表明 $\| u_n - u \|_0 \to 0 (n \to \infty)$,且 $u = u_n + (u - u_n) \in B(\Omega)$.因此,$B(\Omega)$ 是完备的.

作为完备性的第一个应用,我们指出:完备赋范空间 X 中的绝对收敛级数 $\sum x_n$ 必收敛.事实上,令 $s_n = \sum_1^n x_i$,若 $\sum \| x_n \|$ 收敛,则

$$\| s_n - s_m \| = \Big\| \sum_{m < i \leqslant n} x_i \Big\| \leqslant \sum_{m < i \leqslant n} \| x_i \| \to 0 \quad (n > m \to \infty),$$

这表明 $\{s_n\}$ 是 X 中的 Cauchy 列,因而必收敛.以上结论的重大意义在于:对于 Banach 空间中绝对收敛级数收敛性之判定,并不需要建立一套新的判别法,只需

---

① 对任何 Cauchy 列 $\{x_n\}$ 容易验证 $\overline{\lim_m}\, \overline{\lim_n} \| x_m - x_n \| = 0$.今后将多次用到此结论.

应用熟知的**正项级数收敛判别法**就够了.例如,若 X 是 Banach 空间,$\{x_n\}\subset X$,$\overline{\lim\limits_n}\sqrt[n]{\|x_n\|}<1$,则由熟知的 Cauchy 判别法得出,级数 $\sum x_n$ 收敛(且绝对收敛).这一类的结论今后将多次运用而不再详细解释.

§1.1.3 子空间·积空间与同构

在线性代数中,对于向量空间考虑了子空间、积空间与线性同构等概念.现在我们将这些纯代数概念与范数结合起来考虑,看能得出哪些新的结论.

设 $A\subset X$ 是一非空子集.若 A 对于 X 中的线性运算封闭,则称 A 为 X 的**子空间**①,此时 A 依 X 中的范数同样为赋范空间.若进而假定 A 对于 X 中的极限运算亦封闭(这意味着若 $\{x_n\}\subset A, x_n\to x$,则 $x\in A$),则称 A 为 X 的**闭子空间**.以下简单命题是常用的.

命题 1.1.5 设 A 是赋范空间 X 的子空间.若 A 作为赋范空间完备,则它是 X 的闭子空间;若 X 完备而 A 为闭子空间,则 A 亦完备.因此,Banach 空间的子空间是 Banach 空间的充要条件是它为闭子空间.

证明留作习题 2.

命题 1.1.5 常用来判定空间的完备性.例如,设 $J=[a,b](a<b)$,显然 $C(J)$(J 上的连续函数之全体)是 $B(J)$(依例 1.1.2)的子空间.若 $\{u_n\}\subset C(J)$,$u\in B(J)$,$\|u_n-u\|_0\to 0$,则 $u_n\rightrightarrows u$(一致收敛),于是由熟知的分析定理有 $u\in C(J)$.可见 $C(J)$ 是 $B(J)$ 的闭子空间,因而是完备的.在本书中,$C(J)$ 将是出现最频繁的 Banach 空间之一.

若 A,B 是 X 的子空间,每个 $x\in X$ 有惟一分解

$$x=a+b,\quad a\in A,\quad b\in B, \tag{1.1.10}$$

则说 X 是 A 与 B 的**直和**,记作 $X=A\oplus B$.令 $P_Ax=a, P_Bx=b$(x,a,b 依式(1.1.10)),则得到映射

$$P_A: X\to A \text{ 与 } P_B: X\to B,$$

称之为投影映射,简称为**投影**;更确切地说,P_A 与 P_B 是由直和分解 $X=A\oplus B$ 所决定的投影.若 A,B 是 X 的闭子空间,则称直和 $X=A\oplus B$ 为**拓扑直和**.以上概念可推广到任意有限个子空间的直和的情况.

若 $X=A+B$(这意味着每个 $x\in X$ 有分解式(1.1.10),但不要求惟一),A 与 B 是 X 的子空间,则 $X=A\oplus B$ 的充要条件是 $A\cap B=\{0\}$.这实际上是一

① 这意味着:对任给 $x,y\in A,\alpha\in\mathbf{K}$,有 $x+y\in A,\alpha x\in A$.在具体问题中,判定某个空间的子集为子空间,通常是平凡的事情.