流体力学数值方法

章本照　印建安　张宏基　编著

机械工业出版社
CHINA MACHINE PRESS

流体力学数值方法

章本照　印建安　张宏基　编著

机 械 工 业 出 版 社

这是一本供初学者系统掌握流体力学常用数值方法——有限元方法、边界元法以及有限分析法的入门参考书和教科书。具有概念明确、深入浅出、易于自学、重视解题方法与应用的特点。

全书共8章。主要内容有：作为有限元方法数学基础的变分原理与加权余量法，有限元方法的基本原理与解题步骤，各类单元基函数，流体力学的典型应用；边界元法的基本原理、解题步骤与典型应用；有限分析法的基本原理、解题步骤与典型应用。最后还介绍将不规则区域变换为矩形规则区域的边界拟合坐标。

本书可作为高等院校有关专业的教学用书，同时也是一本工程科技人员从事流体力学数值计算的入门参考书。

图书在版编目（CIP）数据

流体力学数值方法/章本照等编著. —北京：机械工业出版社，2003.6

ISBN 7-111-11985-1

Ⅰ. 流... Ⅱ. 章... Ⅲ. 流体力学—数值计算 Ⅳ.035

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2003）第 029386 号

机械工业出版社（北京市百万庄大街22号 邮政编码100037）

策划编辑：张亚秋 责任编辑：张亚秋

版式设计：张世琴 责任校对：韩 晶

封面设计：陈 沛 责任印制：闫 焱

北京瑞德印刷有限公司印刷·新华书店北京发行所发行

2003年7月第1版·第1次印刷

1000mm×1400mm B5 · 8.625印张 · 336千字

0 001—3 000

定价：25.00元

前　言

在流体力学理论研究和工程应用中，描述流体流动的数学方程是非线性偏微分方程组，只有对极少数的简化模型可以通过数学方法，获得理论分析解，多数情况下，只能通过数值计算的途径进行求解。这里说的“数值计算”，是指利用高速电子计算机，对描述流体力学具体问题的偏微分方程初边值问题进行离散化计算，从而获得流动区域中有限个离散点上流体物理量的求解方法。这种通过数值计算获得流动区域中离散点上数值解的方法，通常称为流体力学数值方法。随着高速电子计算机的发展与普及，数值方法越来越受到重视，已成为流体力学理论研究和工程应用的重要手段。

本书的目的是为读者系统地介绍流体力学中常用的三种数值方法——有限元方法、边界元法，以及有限分析法。

需要指出，流体力学中还有一种应用相当广泛的数值方法——有限差分法。由于有限差分法发展最早，内容丰富，而且已有不少专著，因此本书中不包括这方面内容。

流体力学数值方法虽然有不少种，它们的数学原理也各不相同，但有两点却是所有方法都具备的。一是离散化：将连续的求解区域划分成网格或单元子区域，同时在网格或单元内设置结点，求解区域中的连续函数将被离散为有限个结点上的函数值。二是代数化：通过某种数学原理，将描述物理量连续函数的偏微分方程转化为以有限个结点函数值为待定未知量的代数方程，从而将偏微分方程的求解转化为代数方程的计算。读者在学习本书中的三种数值方法时，应注意领会这两个特点。

另外需要指出，本书中介绍的三种数值方法的离散化数值解，具有局部解析解的性质。有限元方法在单元子区域中，近似解是以单元基函数线性组合的形式给出的解析表达式；边界元法所获得的区域内的函数值，是以边界单元积分求和形式给出的解析表达式；有限分析解在单元中是一个无穷级数形式的近似解析解。当然，要确定这些解析表达式中的参数，必须先通过代数方程的计算，获得离散点上的函数值。读者在阅读本书时，应注意这三种数值方法所具有的局部解析解的特点。

本书的前5章系统地介绍了有限元方法数学基础的变分原理和加权余量法，有限元方法的基本原理和求解步骤，各种类型的单元基函数，流体力学的典型应用。第6章介绍边界元法的基本原理、求解步骤和典型应用。第7章介绍有限分

析法的基本原理、求解步骤和典型应用。最后一章介绍将不规则区域变换成矩形规则区域的边界拟合坐标，这对于边界形状复杂的不规则区域中的流体流动的数值求解，如采用有限分析法、有限差分法是有实用意义的。本书之所以用较大篇幅介绍有限元方法，是因为边界元法和有限分析法在某种意义上，都可以看成是有限元方法的推广；有限元方法的离散化求解思想，对于边界元法和有限分析法具有共同性。

本书的内容在浙江大学力学系的研究生学位课中讲授多次。对于已经具备高等数学（包括线性代数）、计算方法和流体力学基础的读者，阅读本书将不会发生困难。作者期望：读者通过本书的阅读，可以系统地掌握有限元方法、边界元法，以及有限分析法的基本原理与求解方法，从而建立起应用这几种数值方法去解决流体力学理论研究和工程应用中各种具体问题的基础。

作者在编写本书的过程中，参考了本书末所列出的部分著作，在此对这些著作的作者表示衷心感谢。由于作者水平所限，书中的失误与错漏在所难免，敬请读者批评指正。

作　者

2002年12月于浙江大学

目　　录

第1章 有限元方法的数学基础

1.1 有限元方法概述

随着高速电子计算机日益广泛的应用，流体力学中大量复杂问题，都希望通过计算机进行数值求解。有限元方法就是这样一种可以用来求解流体力学问题的数值计算方法。

工程实际中的流体力学问题，根据不同的具体特点，可以建立起不同的数学模型。这种数学模型通常是用一组给定初始条件与边界条件的微分方程来表示。求解出这类流体力学数学方程的分析解，除了为数不多的几个问题外，大多是相当困难的，往往需要求助于数值计算。

有限差分法是求解微分方程常用的一种数值计算方法。它的基本思想是将求解区域划分为有限个离散点的网格，用各种不同类型的差商式去近似地替代方程中的微商，从而建立起含有求解函数离散值的代数方程组。解此方程就可获得原来微分方程的近似解。

有限元方法是另一种类型的数值计算方法。由于它具有一些有限差分法所没有的特殊优点，因此虽然这种方法的提出比较晚，但发展十分迅速，现在已经成为流体力学数值计算中的一种常用的重要方法，日益广泛地用来解决工程实际中的流体力学问题。

有限元方法的数学原理与离散方式都不同于有限差分法。

有限元方法的数学原理是泛函变分原理或者是方程余量与权函数正交化原理。对于给定的某些流体力学问题，如果可以找到能量泛函，则可以建立起能量泛函极小化的变分表达式。而对另外一些无法获得能量泛函的流体力学问题，通常是从它所对应的微分方程出发，根据方程余量与权函数正交化原理，建立起加权余量积分表达式。这种变分表达式或者是加权余量积分表达式，实质上是流体力学物理量在求解区域整体上的一种数学描述，是流体力学的另一种数学模型，和微分方程具有同等的意义。通过这种积分表达式进行求解的传统方法是Ritz—Galerkin方法。而有限元方法则是在高速电子计算机出现以后，在Ritz—Galerkin方法基础上发展起来的数值计算方法；实质上可以说是一种规则化的、特殊类型的Ritz—Galerkin方法。本章的内容便是介绍如何将微分方程通过变分原理或者

是加权余量正交化原理，转化为积分表达式，同时还介绍进行求解的 Ritz—Galerkin 方法。

有限元方法离散化求解的主要思想是“分块逼近”。也就是将流场的求解区域剖分成有限个互不重叠的子区域，这些子区域称为“单元”；在每个单元体内，选择若干个合适的点作为求解函数的插值点，这些点称为“结点”。单元中的求解函数将由一种规则化的基函数的线性组合来近似替代，线性组合的系数正是求解函数在结点上的函数值（或导数值）。这样，通过单元体的积分就可以获得单元有限元方程，经过累加可以获得总体有限元方程。通过求解总体有限元方程，即可获得所有结点上的函数值。第 2 章的内容便是介绍从积分表达式出发，如何进行有限元离散化求解的详细步骤与方法。

有限元方法与差分法相比，其主要优点是：

1）有限元方法对于求解区域的单元剖分没有特别的限制。这对于处理具有复杂边界区域，特别是多连通区域的工程实际问题，格外方便；而且完全可以根据问题的物理特点，在求解区域中安排单元网格的疏密。

2）有限元方法是将区域进行分片离散。对每一个单元而言，它的近似解是连续解析的，这和有限差分法中完全用离散的结点值来近似地表示连续函数不一样。

3）对于具有事先未知边界形状的求解区域，或者是求解区域内部具有不同介质的交界面，处理起来比较容易。

有限元方法的计算思想早在 20 世纪 40 年代就提出了。1943 年 Courant 在一篇论文中就提出用一组三角形单元和最小位能原理研究了 St. Venant 的扭转问题。但真正用以解决工程中的数值计算问题是在 50 年代电子计算机出现以后，1956 年 Turner、Clough、Martin 和 Topp 发表了在结构力学采用有限元方法的第一篇论文，但当时并没有用“有限元方法”这个名称。“有限元方法”（Finite Element Method）这个名称，是 1960 年 Clough 在一篇结构分析的计算论文中首次明确提出的。在我国，60 年代初期冯康等人独立地建立了有限元方法的数学理论并应用于工程实际问题。自那时起，不论国际上还是国内，随着高速电子计算机日益广泛的应用，有限元方法得到迅速的发展。

流体力学领域中采用有限元方法，要稍晚些。1965 年两位固体力学工作者 Zienkiwicz 和 Cheung 提出用有限元方法解决位势流问题的可能性，被认为是流体力学中有限元方法的起点。但自那时以后的 30 多年中，有限元方法已被广泛应用于流体力学的各个领域，理论研究和实际应用的文献资料大量涌现。可以认为，有限元方法已经成为流体力学进行理论研究和解决工程实际问题强有力的数值计算工具。

1.2 数学物理中的变分原理

变分原理是以变分形式表述的物理定律。数学上可表述为：如果存在于某个函数空间 D 中的物理状态函数 u，决定了一个依赖于 u 的泛函$J(u)$(一般称作“能量泛函”)，则在一切可能的物理状态中 ($u \in D$)，真实的物理状态是 D 中使能量泛函$J(u)$达到极小值的那个函数。

数学物理问题中存在着大量变分原理。物理学中最早发现的变分原理是 Fermat 1657 年提出的“光线沿着用时最短的路径传播”的 Fermat 原理。力学中著名的变分原理有“Lagrange 最小作用量原理”，“Hamilton 原理”，“最小势能原理”，“最小余能原理”等。在数学物理问题中寻求变分原理至今仍是人们感兴趣的课题。

如果获得了一个数学物理问题的变分原理，则可以借助于变分法求解，数值计算时就可以采用有限元方法。

1.2.1 变分原理实例

下面通过两个具体例子说明变分原理的应用。

例 1 最速降线问题。

设处在同一铅垂平面上的两点 A 和 B，由一条光滑的曲线轨道联结起来。假定有一光滑小圆球在重力作用下，沿此曲线轨道从 A 点自由下滑到 B 点，所需时间显然与轨道的曲线形状有关，求使下滑时间最短的曲线形状。

这样的问题如果由通常的建立微分方程途径去求解，显然是相当困难的；而由寻求能量泛函去建立变分表达式，再去求解就比较直观简便。

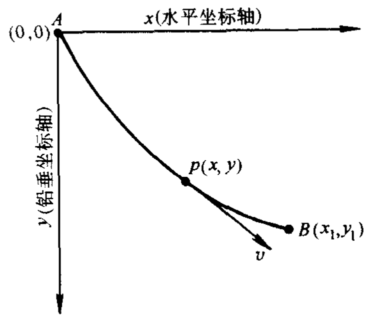

图 1-1 最速降线

不妨建立如图 1-1 所示的坐标系，A 点处在坐标原点 (0, 0)，B 点坐标为 (x_1, y_1)；A 点为起始点，曲线弧长记为 s，微元弧长为

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2} = \sqrt{1 + y'^2}\,dx \tag{1-1}$$

另一方面，看作质点的圆球在曲线任一点$p(x, y)$的速度 v，根据能量守恒定理应有

$$v = \frac{ds}{dt} = \sqrt{2gy}$$

$$ds = \sqrt{2gy}\,dt \tag{1-2}$$

由式(1-1)、(1-2)可得

$$\mathrm{d}t = \sqrt{\frac{1+y'^2}{2gy}}\mathrm{d}x$$

于是圆球从 A 点沿曲线 $y=y\ (x)$ 下滑到 B 点所需时间为

$$T = \int_0^T \mathrm{d}t = \int_0^{x_1} \sqrt{\frac{1+y'^2}{2gy}}\mathrm{d}x \tag{1-3}$$

这样，问题就归结为在所有满足端点条件

$$y(0)=0 \qquad y(x_1)=y_1$$

的一次可微的连续函数集合中，寻找使泛函式(1-3)为极小值的函数 $y=y(x)$。也就是求解变分式

$$\delta T(y,y')=0 \tag{1-4}$$

在这个具体的物理问题中，能量泛函是由式(1-3)所表示的 $T(y,\ y')$；相应的变分原理，数学上由变分式(1-4)来表示。

例 2 弹性薄膜的形变问题。

如图 1-2 所示，弹性薄膜所在区域 Ω 上承受外力 $f\ (x_1,\ x_2)$，边界 Γ 上所产生的垂直位移 $u=\bar{u}$ 给定。求薄膜在外力作用下，平衡时所发生的垂直方向的变形。

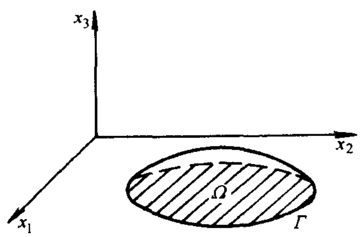

图 1-2 弹性薄膜的形变

这是一个弹性体的受力平衡问题，可以根据最小势能原理，求出能量泛函，写出变分式。最小势能原理表明：在满足外界位移约束的前提下，所有允许的位移中，实际的位移 u_i 是使弹性体总的势能泛函

$$J=V-W$$

为极小。其中 V 是弹性体内总应变能，对各向同性弹性体

$$V=\frac{1}{2}\int_\Omega \sigma_{ij}e_{ij}\mathrm{d}\Omega$$

σ_{ij}，e_{ij}分别是应力张量和应变张量的分量。W 是外力对弹性体做的功；外力包括质量力 f_i 和边界上的外力 p_i。这样

$$W=\int_\Omega f_i u_i \mathrm{d}\Omega + \int_\Gamma p_i u_i \mathrm{d}\Gamma$$

这里作一点必要的说明。上面的表达中，我们采用下标 i，j 表示矢量或张量的分量序号。在给定的任一坐标系（x_1，x_2，x_3）中，矢量或张量都可以采用指标的表示方法。如矢量 $f=\{f_i\}$，张量 $P=\{\sigma_{ij}\}$。这里的指标 i 表示可任取 1、2、3；称 i 为自由指标。同时我们将采用求和约定：若表达式中某一项中，相同

的指标出现两次以上，则约定这一项将对这一指标分别取 1、2、3 进行求和。这种重复出现的指标称为“求和指标”。例如

$$f_i u_i \equiv \sum_{i=1}^{3} f_i u_i = f_1 u_1 + f_2 u_2 + f_3 u_3$$

在本书各章节中均采用此约定。

在上面所讨论的弹性薄膜形变问题中，位移 u_i 只出现在 x_3 的方向上，因此可设

$$u_1 = u_2 = 0, \qquad u_3 = u$$

于是应变张量的非零分量为

$$e_{13} = e_{31} = \frac{1}{2}\frac{\partial u}{\partial x_1}, \qquad e_{23} = e_{32} = \frac{1}{2}\frac{\partial u}{\partial x_2}$$

应力张量分量为

$$\sigma_{13} = \sigma_{31} = \mu\frac{\partial u}{\partial x_1}, \qquad \sigma_{23} = \sigma_{32} = \mu\frac{\partial u}{\partial x_2}$$

于是总的势能

$$J = V - W = \frac{\mu}{2}\iint_{\Omega}\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial x_2}\right)^2\right] \mathrm{d}\Omega - \int_{\Omega} fu\,\mathrm{d}\Omega$$

根据最小势能原理，薄膜在垂直方向上所产生的位移 $u = u(x_1, x_2)$ 一定满足变分式

$$\delta J = \delta\left\{\frac{\mu}{2}\iint_{\Omega}\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial x_2}\right)^2\right] \mathrm{d}\Omega - \int_{\Omega} fu\,\mathrm{d}\Omega\right\} = 0 \tag{1-5}$$

在这个问题中，我们是应用已经获得的变分原理，导出了变分式(1-5)。

关于变分式(1-4)、(1-5)如何求解，将在本章 1.4 节中作进一步讨论。

1.2.2 对称正算子方程的变分原理

从上面介绍的两个例子中可以看到，对于一个具体的数学物理问题要建立变分式，首先是要寻求相应的变分原理。而事实上，不少数学物理问题，我们已经建立了相应的微分方程，因此我们要问：如果一个问题没有直接从物理上给出变分原理，能否可以从相应这个问题的微分方程出发，寻求相应的能量泛函，从而可采用变分法求解？对此，数学上只对某一类型的微分方程给出了肯定的回答。这就是下面要介绍的变分原理。

先对将在下面定理中涉及到的，关于函数内积和算子等概念作简要的介绍。

(1) **函数内积** 定义域在 Ω 上的函数 u、v 的乘积在 Ω 上的积分，称作这两个函数在该区域上的内积，记作

$$\langle u, v\rangle = \int_{\Omega} uv\,\mathrm{d}\Omega$$

(2) 算子　若内积空间（具有一般性的是 Hilbert 空间）中某一集合 D 和另一集合 R 建立了某种一一对应的关系，即 D 中任一元素 u 对应于 R 中的一个元素 $L(u)$，则称 L 为算子。集合 D 称为算子 L 的定义域，集合 R 称为算子 L 的值域。

例如 Laplace 算子

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_i}$$

定义域 D 是所有二次可微函数的集合，值域 R 是微分后生成的函数集合。

(3) 线性算子　如果对任意实数 α、β，算子 L 有性质

$$L(\alpha u_1 + \beta u_2) = \alpha L(u_1) + \beta L(u_2)$$

则称 L 为线性算子。其中 u_1，$u_2 \in D$；$\alpha u_1 + \beta u_2 \in D$。

(4) 对称算子　如果线性算子 L 定义域中任意两个元素 u、v，都有

$$\langle L(u), v\rangle = \langle u, L(v)\rangle \qquad u,\ v \in D$$

则称 L 为对称算子。

(5) 正算子　如果线性算子 L 定义域中任意一个非零元素 u，都有

$$\langle L(u), u\rangle > 0 \qquad u \in D$$

则称 L 为正算子。

(6) 算子方程　如果在算子 L 的值域 R 中给定一个元素 f，则称等式

$$L(u) = f \qquad u \in D$$

为算子方程。

微分方程边值问题都可以转化为算子方程问题。例如常见的 Poisson 方程边界问题

$$\begin{cases} \Delta u \equiv \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f(x, y) \qquad (x,\ y) \in \Omega & (1\text{-}6) \\ u|_\Gamma = p(x, y) \qquad (\Gamma \text{ 为 } \Omega \text{ 的边界}) & (1\text{-}7) \end{cases}$$

等价于算子方程

$$\Delta u = f \qquad u \in D \tag{1-8}$$

其中算子 Δ 的定义域 D 是所有在区域 Ω 二阶可微的，在边界 Γ 上取值为 $p(x, y)$ 的函数的集合。寻求满足边界条件式（1-7）和微分方程式(1-6)的解，等价于在 D 中寻找满足算子方程式(1-8)的解。

显然，线性算子方程相对应的微分方程边值问题一定是齐次边界条件的边值问题。

下面给出对称正算子方程的变分原理。

定理：设 L 是对称正算子，若算子方程

$$L(u) = f \qquad u \in D \tag{1-9}$$

存在解 $u = u_0$，则 u_0 所满足的充分必要条件是泛函

$$J(u)=\langle L(u),u\rangle-2\langle f,u\rangle \tag{1-10}$$

在 $u=u_0$ 处取极小值。

定理中的泛函 $J(u)$，一般称为算子方程的能量泛函。下面给出这个定理的证明。

证明 先证明必要性。若 $u=u_0$ 是算子方程式(1-9)的解，则有

$$L(u_0)-f=0$$

对 D 中任意的 $u=u_0+\eta$，应有

$$J(u)=J(u_0+\eta)=\langle L(u_0+\eta),u_0+\eta\rangle-2\langle f,u_0+\eta\rangle$$

因为 L 是对称正算子，根据内积的性质，上式可以展开

$$\begin{aligned}J(u)&=\langle L(u_0),u_0\rangle+\langle L(u_0),\eta\rangle+\langle L(\eta),\eta\rangle\\&\quad+\langle L(\eta),u_0\rangle-2\langle f,u_0\rangle-2\langle f,\eta\rangle\\&=J(u_0)+\langle L(\eta),\eta\rangle+2\langle L(u_0)-f,\eta\rangle\end{aligned}$$

但 $L(u_0)-f=0$，又从正算子定义

$$\langle L(\eta),\eta\rangle>0$$

因此有

$$J(u)>J(u_0)$$

这说明泛函 $J(u)$ 在 $u=u_0$ 时取极小值。

再证明充分性。因为当 $u=u_0$ 时，$J(u)$取极小值，应有

$$\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\varepsilon}J(u_0+\varepsilon\eta)\right|_{\varepsilon=0}=0$$

根据 L 是对称正算子，因此有

$$\begin{aligned}J(u_0+\varepsilon\eta)&=\langle L(u_0+\varepsilon\eta),u_0+\varepsilon\eta\rangle-2\langle f,u_0+\varepsilon\eta\rangle\\&=J(u_0)+2\varepsilon\langle L(u_0),\eta\rangle+\varepsilon^2\langle L(\eta),\eta\rangle\end{aligned}$$

于是

$$\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\varepsilon}J(u_0+\varepsilon\eta)\right|_{\varepsilon=0}=2\langle L(u_0)-f,\eta\rangle=0$$

由于 η 是任意连续函数，因此有

$$L(u_0)-f=0$$

即 u_0 是方程式(1-9)的解。定理证毕。

这个定理指出了相当一类微分方程初边值问题，可以转化为泛函求极值的变分问题，为微分方程问题的求解，开辟了新的变分法途径。

现在来讨论算子方程式(1-9)等价的变分式。根据定理，方程(1-9)的解必定

满足

$$\delta J=\delta[\langle L(u),u\rangle-2\langle f,u\rangle]=\langle L(\delta u),u\rangle+\langle L(u),\delta u\rangle-2\langle f,\delta u\rangle=0$$

注意到算子 L 是对称的，因此有

$$2\langle L(u),\delta u\rangle-2\langle f,\delta u\rangle=2\langle L(u)-f,\delta u\rangle=0$$

于是可获得算子方程(1-9)解所满足的变分式为

$$\langle L(u)-f,\delta u\rangle=0$$

即为

$$\int_{\Omega}[L(u)-f]\delta u\mathrm{d}\Omega=0 \tag{1-11}$$

这样，我们就得到一个重要结论：对称正算子方程式(1-9)的解，可以通过变分式(1-11)的求解来获得。式(1-11)是很重要的积分表达式，当采用变分法，包括以后将介绍的有限元方法求解算子方程式(1-9)时，都是以式(1-11)作为出发点的。

下面讨论这个定理的应用。以齐次边界条件的 Poisson 方程为例，方程与边界条件如下：

$$\begin{cases}-\Delta u\equiv-\left(\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)=f \quad (x,\ y)\in\Omega & \text{(1-12a)}\\ u\big|_{\Gamma_1}=0 & \text{(1-12b)}\\ \dfrac{\partial u}{\partial n}\bigg|_{\Gamma_2}=0 & \text{(1-12c)}\end{cases}$$

这个方程的微分算子是负 Laplace 算子

$$L(u)=-\Delta u=-\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) \qquad u\in D$$

定义域 D 是在区域 Ω 上具有齐次边条件的二阶可微连续函数的集合。

应用这个变分原理，前提是算子方程的算子是对称正算子。在这个问题中，由于 D 中的函数都满足齐次边条件式(1-12b)、(1-12c)，因此对 D 中的任意两个函数 u、v 和任意实数 α、β 都有

$$-\Delta(\alpha u+\beta v)=\alpha(-\Delta u)+\beta(-\Delta v)$$

可见 $-\Delta$ 算子是线性算子。又因为

$$\begin{aligned}\langle-\Delta u,v\rangle&=-\iint_{\Omega}\Delta u\cdot v\mathrm{d}\Omega=-\iint_{\Omega}[\nabla\cdot(\nabla u\cdot v)-\nabla u\cdot\nabla v]\mathrm{d}\Omega\\&=\iint_{\Omega}\nabla u\cdot\nabla v\mathrm{d}\Omega-\oint_{\Gamma_2}\frac{\partial u}{\partial n}v\mathrm{d}\Gamma=\iint_{\Omega}\nabla u\cdot\nabla v\mathrm{d}\Omega\end{aligned} \tag{1-13}$$