计算方法

复旦大学数学系 编著

上海科学技术出版社

計算方法

（試用本）

复旦大学数学系　編著

上海科学技术出版社

內 容 提 要

本书系复旦大学数学系計算数学专业革新教材之一，內容包括：常微分方程数值解、偏微分方程数值解和变分方法，可作綜合性大学計算数学专业計算方法課程的教材，亦可作高等院校有关专业的参考书。

簡裝本說明

本书原以 850×1168 1/32 开本排印，为了节約用紙，暫以 787×1092 1/32 开本印刷，定价相应減少，希鉴諒。

計 算 方 法

（試 用 本）

复旦大学数学系 編著

*

上海科学技术出版社出版

（上海瑞金二路 450 号）

上海市书刊出版业营业許可証出 098 号

新华书店上海发行所发行 各地新华书店經售

上海大东集成联合印刷厂印刷

*

开本 787×1092 1/32 印張 8 6/32 字数 195,000

1961 年 8 月第 1 版 1961 年 8 月第 1 次印刷

印数 1—6,000

統一书号：13119 · 411

定 价：（十）0.78 元

序

計算方法是計算数学专业的一門重要基础課。因此革新其內容，使之反映現代科学水平，将会促进計算数学的进一步发展。在教学革命浪潮的冲击下，我們边学边干，在短期內集体編写成了这本教材。

在編写过程中，我們作了下面几方面的尝試：

一、由于把生产实际問題归結成数学問題，其中絕大部分是微分方程問題，因此本教材就专講微分方程数值解，其中尤以偏微分方程数值解为重点，而将数值分析、綫性代数計算法、积分方程数值解等分别移到数学专业的数学分析、高等代数、泛函分析等課程中去。

二、这是一門基础課的教材，因此应該包括必要的基础內容本书基本上包含了最常用的計算方法。

三、在理論联系实际和反映現代科学成就方面作了初步努力，添加了与空气动力学密切相关的非綫性偏微分方程的一些解法，如积分关系法、特征綫法等，对解綫性微分方程（抛物型、椭圓型方程）是十分有效的，追赶法也作了介紹，企图以此提供一些解决实际問題的綫索。

四、为了能够突出方法的实质，达到灵活应用的目的，我們对不同的部分以不同的角度来叙述。如偏微分方程中的双曲型方程和抛物型方程部分，着重討論了它的稳定性；椭圓型方程則以解法为主，特别是迭代方法。

五、为了有利于今后进一步发展計算数学理論，在重視解法

的同时，对一些理論方面的問題，如收斂性問題等，我們仍作了必要的介紹。

限于思想水平和科学水平，这本教材一定还存在着不少缺点，我們迫切地期待着讀者的批評和指导，以便在再版时改进。

复旦大学数学系計算方法編写小組

1960年5月

目　录

第一章　常微分方程数值解

科学或技术上提出来的实际問題，当它能归結到数学公式来表示时，很大一部分是微分方程的問題。我們已經从微分方程的一些初等教程里学到了許多求解微分方程的方法，从理論上也知道了某些方程解的存在和唯一性，但是，实际上能用解析式表出解来的微分方程，只是极少的一部分。往往有些問題虽然已归結成很簡单的微分方程，但是缺乏解法，也有些方程則根本不能用初等形式表示出来，如方程

$$y''\pm a(y')^2+by=0.$$

因此，根据实际的需要，微分方程的数值解就被提出来了。这些数值方法，一般說来，可以对微分方程求到所需的任何精确程度的数值解，而且还可以代替某些解析解，更好和更容易地解决微分方程的求解問題，这就是要講微分方程数值解的根本理由。

本章主要討論常微分方程的数值解法，因此假定讀者已知道了常微分方程的一般知識，关于保証方程的解的存在、唯一等条件也就不一一列举了。为了掌握本章内容，讀者还必須具备插值法、值数微分、数值积分等知識。

本章包含初值問題与边值問題两部分内容。

I. 初 值 問 題

一阶微分方程

$$\frac{dy}{dx}=f(x,y),\tag{0-1}$$

其中函数 $f(x, y)$ 在 (x, y) 平面上的区域 D 上确定，連續且有对 y 的偏导数，又設 $f(x, y)$ 和 $f_y(x, y)$ 在 D 上有界

$$|f(x, y)| \leqslant M, \qquad |f_y(x, y)| \leqslant K.$$

对方程 (0-1) 可以提出初値問題：确定函数 $y(x)$，在 D 中連續且有連續导数，并且滿足

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = f(x, y(x)), \\ y(x_0) = y_0. \end{cases} \tag{0-2}$$

所謂方程 (0-1) 初値問題的数値解，就是要求出 (0-2) 的解 $y(x)$，在一串点 $x_0, x_1, \cdots, x_n$ 上的値 $y(x_n)$ 的近似値 y_n。

§1 阿当姆斯方法

阿当姆斯(Adams)方法是常微分方程差分解法中最典型的方法。我們先对常微分方程的差分解法作簡单的一般描述。

初値問題 (0-2) 与求解积分方程

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, y(t))\,dt$$

等价。差分解法就是从一般公式

$$y(x_{n+1}) = y(x_{n-p}) + \int_{x_{n-p}}^{x_{n+1}} f(t, y(t))\,dt$$

出发，并对其中积分利用数値积分公式，我們就得到了差分方程

$$y_{n+1} = \sum_{\lambda=0}^{n} \alpha_\lambda y_{n-\lambda} + h \sum_{\lambda=-1}^{n} \beta_\lambda f_{n-\lambda}. \tag{1-1}$$

在 (1-1) 式中，$y_{n-\lambda}$ $(\lambda = 0, 1, 2, \cdots, n)$ 算作已知的，称为开始点上的値。若 $\beta_{-1} = 0$，則等式右端不含有 y_{n+1}，此时 (1-1) 称为开型的，它可以由初始点数値 $y_{n-r}, y_{n-r+1}, \cdots, y_n$ 直接求出 y_{n+1} 的値。若 $\beta_{-1} \neq 0$，則 (1-1) 式右端的 f_{n+1} 中含有 y_{n+1}，这样不能直接由初始点上的値求出 y_{n+1}，(1-1) 就称为閉型的。

一、阿当姆斯开型公式

記 $x_n=x_0+nh$, $u=\frac{1}{h}(x-x_n)$, h 是一固定的数。对于函数 $y'(x)=f(x, y(x))$,写出在点 $x_n, x_{n-1}, \cdots, x_{n-N}$ 的牛顿(Newton)向后插值公式

$$y'(x)=y'_n+u\nabla y'_n+\frac{u(u+1)}{2!}\nabla^2 y'_n+\cdots$$

$$+\frac{u(u+1)\cdots(u+N-1)}{N!}\nabla^N y'_n+R_{N+1}(x), \quad (1\text{-}2)$$

其中

$$R_{N+1}(x)=h^{N+1}\frac{u(u+1)\cdots(u+N)}{(N+1)!}y^{(N+2)}(\eta),$$

$$\min\{x_{n-N}, x\}\leqslant\eta\leqslant\max\{x_n, x\},$$

而 $\nabla y'_n$, $\nabla^2 y'_n$, …分别表示一阶向后差分,二阶向后差分,…。它們的定义如下:

$\nabla f(a)=f(a)-f(a-h)$ 称为 $f(x)$ 在 $x=a$ 的一阶向后差分,

……………………………

$\nabla^n f(a)=\nabla^{n-1}f(a)-\nabla^{n-1}f(a-h)$ 称为 $f(x)$ 在 $x=a$ 的 n 阶向后差分。以(1-2)代入积分方程,得到

$$y(x_{n+1})-y(x_{n-p})=\int_{x_{n-p}}^{x_{n+1}}y'(x)\,dx=h\sum_{l=0}^{N}a_{lp}\nabla^l y'_n+S_{N+1,p},$$

其中 $$a_{0p}=1+p,$$

$$a_{lp}=\frac{1}{l!}\int_{-p}^{1}u(u+1)(u+2)\cdots(u+l-1)\,du \quad (l=1,2,\cdots,N),$$

$$S_{N+1,p}=h^{N+2}\frac{1}{(N+1)!}\int_{-p}^{1}u(u+1)\cdots(u+N)y^{(N+2)}(\eta)\,du,$$

由此得到近似公式

$$y_{n+1}\doteq y_{n-p}+h\sum_{l=0}^{N}a_{lp}\nabla^l y'_n, \quad (1\text{-}3)$$

截断誤差为 $S_{N+1,p}$。这公式是开型的。

在(1-3)中取 $p=0$，就得到阿当姆斯开型公式

$$y_{n+1}=y_n+h\left(y'_n+\frac{1}{2}\nabla y'_n+\frac{5}{12}\nabla^2 y'_n+\frac{3}{8}\nabla^3 y'_n+\frac{251}{720}\nabla^4 y'_n+\cdots\right). \tag{1-4}$$

取 $p=1$，就得到尼史特洛孟(Nyström)公式

$$y_{n+1}=y_{n-1}+h\left(2y'_n+\frac{1}{3}\nabla^2 y'_n+\frac{1}{3}\nabla^3 y'_n+\frac{29}{90}\nabla^4 y'_n+\frac{14}{45}\nabla^5 y'_n+\cdots\right).$$

若应用公式

$$\nabla^N y'_n=\sum_{l=0}^{N}(-1)^l\binom{N}{l}y'_{n-l},$$

可以得出以导数表示的阿当姆斯开型公式

$$y_{n+1}=y_n+h\sum_{l=0}^{N}\alpha_{Nl}y'_{n-l}. \tag{1-5}$$

特别当 $N=0$，

$$y_{n+1}=y_n+hy'_n \text{（这就是尤拉公式）};$$

$N=1$，

$$y_{n+1}=y_n+\frac{h}{2}(3y'_n-y'_{n-1});$$

$N=2$，

$$y_{n+1}=y_n+\frac{h}{12}(23y'_n-16y'_{n-1}+5y'_{n-2});$$

$N=3$，

$$y_{n+1}=y_n+\frac{h}{24}(55y'_n-59y'_{n-1}+37y'_{n-2}-9y'_{n-3}).$$

在应用公式 (1-4) 或 (1-5) 計算时，当步长确定后，还要选取 $N+1$ 个初始点的值。

二、阿当姆斯閉型公式

利用上面記号，写出函数 $y'(x)=f(x, y(x))$ 在点 $x_{n+1}, x_n, \cdots,$

x_{n-N+1} 的牛頓向后插值公式

$$y'(x)=y'_{n+1}+(u-1)\nabla y'_{n+1}+\frac{(u-1)u}{2!}\nabla^2 y'_{n+1}$$
$$+\cdots+\frac{(u-1)u(u+1)\cdots(u+N-2)}{N!}\nabla^N y'_{n+1}$$
$$+R^*_{N+1}(x), \tag{1-6}$$

其中

$$R^*_{N+1}(x)=h^{N+1}\frac{(u-1)u(u+1)\cdots(u+N-1)}{(N+1)!}y^{(N+2)}(\eta^*),$$
$$\min\{x_{n-N+1},\ x\}\leqslant\eta^*\leqslant\max\{x_{n+1},\ x\}.$$

以(1-6)代入前面提到的积分方程，得到

$$y(x_{n+1})=y(x_{n-p})+h\sum_{l=0}^{N}a^*_{lp}\nabla^l y'_{n+1}+S^*_{N+1,p},$$

其中
$$a^*_{0p}=1+p,$$
$$a^*_{lp}=\frac{1}{l!}\int_{-p}^{1}(u-1)u(u+1)\cdots(u+l-2)du\quad(l=1,\ 2,\ \cdots,\ N),$$
$$S^*_{N+1,p}=\frac{h^{N+2}}{(N+1)!}\int_{-p}^{1}(u-1)u(u+1)\cdots(u+N-1)y^{(N+2)}(\eta^*)du.$$

由此得到近似公式

$$y_{n+1}=y_{n-p}+h\sum_{l=0}^{N}a^*_{lp}\nabla^l y'_{n+1}, \tag{1-7}$$

截断誤差为 $S^*_{N+1,p}$，这公式是閉型的。

在 (1-7) 中取 $p=0$，就得到阿当姆斯閉型公式

$$y_{n+1}=y_n+h\Big(y'_{n+1}-\frac{1}{2}\nabla y'_{n+1}-\frac{1}{12}\nabla^2 y'_{n+1}-\frac{1}{24}\nabla^3 y'_{n+1}$$
$$-\frac{19}{720}\nabla^4 y'_{n+1}-\cdots\Big), \tag{1-8}$$

或写成导数的表达式

$$y_{n+1}=y_n+h\sum_{l=0}^{N}\alpha^*_{Nl}y'_{n+1-l}. \tag{1-9}$$

当 $N=1$,

$$y_{n+1}=y_n+\frac{h}{2}(y'_{n+1}+y'_n);$$

$N=2$,

$$y_{n+1}=y_n+\frac{h}{12}(5y'_{n+1}+8y'_n-y'_{n-1});$$

$N=3$,

$$y_{n+1}=y_n+\frac{h}{24}(9y'_{n+1}+19y'_n-5y'_{n-1}+y'_{n-2}).$$

在閉型公式的右端含有 $y'_{n+1}=f(x_{n+1}, y_{n+1})$ 的值,故在使用时必須求出 y_{n+1} 的初始近似值,再用公式(1-9)作迭代

$$\begin{aligned} y_{n+1}^{[\nu+1]}&=y_n+h\sum_{l=0}^{N}\alpha^*_{Nl}y'^{[\nu]}_{n+1-l}\\ &=h\alpha^*_{N0}y'^{[\nu]}_{n+1}+y_n+\sum_{l=0}^{N-1}\alpha^*_{N,l+1}y'_{n-l}, \end{aligned} \tag{1-10}$$

其中 $y'^{[\nu]}_{n+1}=f(x_{n+1}, y^{[\nu]}_{n+1})\quad(\nu=0, 1, 2, \cdots)$.

迭代次数进行到需要的精确度内 $y^{[\nu+1]}_{n+1}=y^{[\nu]}_{n+1}$ 为止。

現在来研究以(1-10)作迭代公式时的收斂条件。由(1-10)可以得到

$$\begin{aligned} |y^{[\nu+1]}_{n+1}-y^{[\nu]}_{n+1}|&=|h\alpha^*_{N0}(y'^{[\nu]}_{n+1}-y'^{[\nu-1]}_{n+1})|\\ &=|h\alpha^*_{N0}(f(x_{n+1}, y^{[\nu]}_{n+1})-f(x_{n+1}, y^{[\nu-1]}_{n+1}))|\\ &\leqslant h|\alpha^*_{N0}|M|y^{[\nu]}_{n+1}-y^{[\nu-1]}_{n+1}|\\ &\leqslant (h|\alpha^*_{N0}|M)^{\nu}|y^{[1]}_{n+1}-y^{[0]}_{n+1}|, \end{aligned}$$

$$M=\max_x\left|\frac{\partial f}{\partial y}\right|.$$

因此只要取 h, 使得 $h|\alpha^*_{N0}|M<1$, 也就是

$$h<\frac{1}{M|\alpha^*_{N0}|}$$

时,迭代就保証收斂。

例如，当 $N=2$ 时，选取 $Mh<\frac{12}{5}$；$N=3$ 时，选取 $Mh<\frac{8}{3}$；$N=4$ 时，选取 $Mh<\frac{720}{251}$，就可以保証收斂。在实际計算时，为了加快收斂速度，所取步长 h 的值往往比滿足上面不等式的最大值要小。

我們再来估計用阿当姆斯閉型公式計算时的誤差。对微分方程的眞解应該成立下列关系式

$$y_{n+1}=y_n+h\sum_{l=0}^{N}\alpha_{Nl}^{*}f(x_{n+1-l},\ y(x_{n+1-l}))+S_{N+1}^{*},\quad (1\text{-}10')$$

其中

$$|S_{N+1}^{*}|\leqslant c^{*},$$

$$c^{*}=h^{N+2}|\alpha_{N+1}^{*}|\max\left|\frac{d^{N+1}f}{dx^{N+1}}\right|.$$

令誤差

$$\varepsilon_n=y_n-y_{n-1},$$

将(1-10)，(1-10′)相減，得到

$$\varepsilon_{n+1}=\varepsilon_n+h\sum_{l=0}^{N}\alpha_{Nl}^{*}\{f(x_{n+1-l},\ y_{n+1-l})$$

$$-f(x_{n+1-l},\ y(x_{n+1-l}))\}-S_{N+1}^{*},$$

由此

$$|\varepsilon_{n+1}|\leqslant|\varepsilon_n|+hM\sum_{l=0}^{N}|\alpha_{Nl}^{*}|\,|\varepsilon_{n+1-l}|+c^{*},$$

即

$$(1-hM|\alpha_{N0}^{*}|)|\varepsilon_{n+1}|\leqslant(1+hM|\alpha_{N1}^{*}|)|\varepsilon_n|$$

$$+hM\sum_{l=2}^{N}|\alpha_{Nl}^{*}|\,|\varepsilon_{n+1-l}|+c^{*}.\quad (1\text{-}11)$$

为了估計 ε_n，我們考慮差分方程

$$(1-hM|\alpha_{N0}^{*}|)\delta_{n+1}=(1+hM|\alpha_{N1}^{*}|)\delta_n$$

$$+hM\sum_{l=2}^{N}|\alpha_{Nl}^{*}|\delta_{n+1-l}+c^{*},\quad (1\text{-}11')$$

由迭代收斂条件得到 $1-hM|\alpha_{N0}^{*}|>0$，如果再假設成立

$$\delta_l = |\varepsilon_l| \qquad (l=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ N-1),$$

则 $$\delta_l \geqslant |\varepsilon_l| \qquad (l>N-1)$$

所以只要求出 (1-11′) 的一个解 u_l，使 $u_l \geqslant \delta_l$ $(l=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ N-1)$，那么

$$|\varepsilon_l| \leqslant \delta_l \leqslant u_l \qquad (l>N-1).$$

首先，找出常系数非齐次差分方程(1-11′)的一个特解

$$u^* = \frac{-c^*}{Mh\sum\limits_{l=0}^{N}|\alpha^*_{Nl}|}.$$

按有限差方程性质，

$$u_n = Az^n + u^*$$

是 (1-11′) 的一个解，其中 z 由差分方程的特征方程确定，特征方程为

$$(1-hM|\alpha^*_{N0}|)z^{n+1} - (1+hM|\alpha^*_{N1}|)z^n - hM\sum_{l=2}^{N}|\alpha^*_{Nl}|z^{n+1-l} = 0,$$

它在$(1,\ \infty)$变号，故有大于 1 的根，选最小者为 z，再选 A，使

$$u_l \geqslant |\varepsilon_l| \qquad (l=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ N-1),$$

設 $$|\varepsilon_l| < \varepsilon \qquad (l=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ N-1),$$

则可选 $A=\varepsilon-u^*$，于是

$$|\varepsilon_n| \leqslant u_n = \varepsilon z^n - u^*(z^n-1) \qquad (n=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ N-1),$$

最后得到估計式

$$|\varepsilon_n| \leqslant \varepsilon z^n + r^*_N h^{N+1}\frac{1}{M}(z^n-1)\max\left\{\left|\frac{d^{N+1}f}{dx^{N+1}}\right|\right\}.$$

当 $N=1$， $$r^*_1 = \frac{1}{12} \approx 0.0833;$$

$N=2$， $$r^*_2 = \frac{1}{28} \approx 0.0375;$$

$N=3,\qquad r_3^*=\frac{19}{1020}\approx 0.0186;$

$N=4,\qquad r_4^*=\frac{27}{2572}\approx 0.0105.$

三、其他方法

如果从

$$y(x_{n+1})=y(x_{n-1})+\int_{x_{n-1}}^{x_{n+1}} f(x,\,y(x))\,dx$$

出发，用司特林(Stirling)插值多項式

$$G(x)=f_n+u\frac{\Delta f_n+\Delta f_{n-1}}{2}+\frac{u^2}{2!}\Delta^2 f_{n-1}$$

$$+\frac{u(u^2-1)}{3!}\,\frac{\Delta^3 f_{n-1}+\Delta^3 f_{n-2}}{2}+\frac{u^2(u^2-1)}{4!}\Delta^4 f_{n-2}+\cdots$$

$$+\frac{u^2(u^2-1)\cdots(u^2-(N-1)^2)}{(2N)!}\Delta^{2N} f_{n-N}$$

代替 $f(x,\,y(x))$，而令

$$y_{n+1}=y_{n-1}+\int_{x_{n-1}}^{x_{n+1}} G(x)\,dx,$$

则

$$y_{n+1}=y_{n-1}+h\sum_{l=0}^{N}\beta_l^{**}\,\Delta^{2l} f_{n-l}$$

$$=y_{n-1}+h\left\{2f_n+\frac{1}{3}\Delta^2 f_{n-1}-\frac{1}{90}\Delta^4 f_{n-2}+\frac{1}{756}\Delta^6 f_{n-3}+\cdots\right\},\tag{1-12}$$

其中

$$\beta_l^{**}=\frac{1}{(2l)!}\int_{-1}^{1}u^2(u^2-1)(u^2-4)\cdots(u^2-(l-1)^2)\,du.\tag{1-13}$$

若只保留 Δ^2 項，則(1-12)就是辛浦生(Simpson)公式

$$y_{n+1}-y_{n-1}=h\left\{2f_n+\frac{1}{3}\Delta^2 f_{n-1}\right\}=\frac{h}{3}\{f_{n-1}+4f_n+f_{n+1}\}.$$

同样(1-12)是含 y_{n+1} 的隐式方程，要用迭代法才能求出 y_{n+1}，如果 $f(x,y)$ 满足李普希兹 (Lipschtiz) 条件及 h 充分小，則迭代是收斂的。

在实用上，常常联合应用一些近似差分公式进行計算，例如較好而常用的有密倫(Milne)方法，現在我們只写出計算方案：

$$(A)\begin{cases} y_{n+1}^{[0]}=y_{n-3}+\dfrac{4h}{3}(2f_{n-2}-f_{n-1}+2f_n), \\ y_{n+1}^{[\nu+1]}=y_{n-1}+\dfrac{h}{3}(f_{n-1}+4f_n+f_{n+1}^{[\nu]}), \end{cases}$$

$$(B)\begin{cases} y_{n+1}^{[0]}=y_{n-5}+\dfrac{3h}{10}(11f_{n-4}-14f_{n-3}+26f_{n-2}-14f_{n-1}+11f_n), \\ y_{n+1}^{[\nu+1]}=y_{n-3}+\dfrac{2h}{45}(7f_{n-3}+32f_{n-2}+12f_{n-1}+32f_n+7f_{n+1}^{[\nu]}). \end{cases}$$

这些公式的优点是比較簡单而又有較高的精确度。

我們对方案 (A) 来算出实用估値，它虽然比較粗糙，但是便于在电子計算机上实現。

由 (A) 的正确表达式我們得到

$$y(x_{n+1})=y_{n+1}^{[0]}+T'_n,\quad T'_n=\frac{14}{45}h^5y^{(5)}(\xi'),$$

$$y(x_{n+1})=y_{n+1}+T_n,\quad T_n=-\frac{h^5}{90}y^{(5)}(\xi).$$

若 $y^{(5)}$ 变化不大，則由 $y^{(5)}(\xi')=y^{(5)}(\xi)$ 得

$$C_0=T_n-T'_n=y_{n+1}^{[0]}-y_{n+1}=-\frac{29}{90}h^5y^{(5)}(\xi),$$

所以 $T_n=\dfrac{C_0}{29}$，由 $C_0=y_{n+1}^{[0]}-y_{n+1}$ 卽可估計出誤差 T_n。

四、例題

[例 1] 如图 1-1 含鉄心綫圈的电路，它的磁化曲綫由下式給定