数学物理方法

Mathematical Methods of Physics

沈 施 编著

同济大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

数学物理方法/沈施编著．—上海：同济大学出版社，2002.8

ISBN 7-5608-2401-3

Ⅰ．数…　Ⅱ．沈…　Ⅲ．数学物理方法
Ⅳ．O411.1

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2002)第 017223 号

数学物理方法

作　者　沈　施　编著

策划　张智中　责任编辑　许纪森　责任校对　徐春莲　装帧设计　徐丽娟

出版发行　同济大学出版社

（上海四平路 1239 号　邮编 200092　电话 021-65985622）

经　销　全国各地新华书店
印　刷　常熟市华顺印刷有限公司
开　本　787mm×960mm　1/16
印　张　18.5
字　数　370 000
印　数　1—2 000
版　次　2002 年 8 月第 1 版　　2002 年 8 月第 1 次印刷
书　号　ISBN 7-5608-2401-3/O・207
定　价　30.00 元

序　　言

法国哲学家伏尔泰(F.-M. A. de Voltaire)指出:"当我们不能利用数学的圆规或经验的火炬时,……肯定的,我们连一步也不能向前迈进。"这就是说,促使物理学发展的有两方面因素,一为实验,一为数学。以数学而论,物理学与它的密切关系当然是毋庸置疑的。物理学是一种定量的学科,必须借助于数学,才能把物理现象概括、把物理概念提炼、把物理规律抽象化。普通物理的全部课程充分说明了这一点。至于理论物理课程,数学所占比重明显增加;或者说,在理论课程中,物理学与数学的关系更为密切。"数学物理方法"实际上就是关于理论物理所应用的数学方法的基础性课程;不把它学好,要精通各门理论课程,乃是相当困难的。

回顾一下理论物理的发展历史,可以看出数学的某一项重大突破,往往伴随着物理学的某一项建树。牛顿(I. Newton)和莱布尼兹(W. Leibniz)创立微积分,牛顿的经典力学随之诞生;常微分方程理论在经典力学中得以充分应用,并得以完善和发展。求解力学体系的常微分运动方程,实际上就是"理论力学"这门课程的主要内容。显然,在理论力学中,常微分方程居于"主妇"的地位;18 世纪末到 19 世纪初,虽然数学家们已在探讨偏微分方程,但对经典力学来说,它还并不重要,只是充当一名"婢女"而已*。然而,电磁学的发展,需要采用新的数学工具;矢量分析和偏微分方程在电磁学领域的广泛应用,促使麦克斯韦(J. C. Maxwell)的电磁场理论——"电动力学"应运而生。这是一种经典场论。在场论的范畴里,偏微分方程的地位骤变,由"婢女"转化为"主妇"。因此,深刻理解偏微分方程理论,熟练掌握其运算技巧,是学好电动力学的一个重要前提;而求解各类二阶线性偏微分方程,恰是"数学物理方法"的主要内容。

同样,随着概率论和数理统计的发展,"热力学和统计物理"日臻完善。为了从宏观上解释热学、热力学的各种现象,玻耳兹曼(L. Boltzmann)等人深入研究微观体系的统计分布规律,成功地采用了一些特殊的函数和积分公式,以反映这些规律。至于"量子力学",则更与近代数学的进展不可分割。将厄密(Hermite)算符代替普通的代数符号以表示力学量,将矩阵运算代替普通的代数运算,量子物理学家从近代数学中获得了崭新的研究工具。说明算符理论,特别是其中的本征值理

---

* 所谓"主妇"和"婢女"者,取自爱因斯坦(A. Einstein)用语。

论，以及与此有关的希耳伯特(Hilbert)函数空间概念和矩阵代数，都是“数学物理方法”课程的重要任务。并且，量子力学的核心——薛定谔(Schrödinger)方程正是一种解析函数的二阶线性偏微分方程；学好“数学物理方法”，对求解各类定解条件下的薛定谔方程，是颇有助益的。此外，一些积分变换方法、广义函数、特殊函数、变分法等等，在电动力学、量子力学以及其他理论物理课程中均有广泛的应用。再则，爱因斯坦这位科学巨匠在发表狭义相对论以后，曾花费相当长时间去钻研微分几何，为建立广义相对论进行了充分的数学准备，这是人所共知的。

“数学物理方法”涉及面甚广，初学者自然只能择其要者而研习之。本教程阐解、论述解析函数理论及其应用、二阶常微分方程的求解方法、希耳伯特函数空间以及斯特姆-刘维(Sturm-Liouville)型常微分方程的本征值问题、一些常用的积分变换和广义函数、偏微分方程的理论基础和求解方法等。根据物理专业需要、并因课时限制的缘故，介绍各数学理论时仅对其中主要的定理、推论和典型应用的基本公式，给出比较严格的数学证明；就整个教程而言，则重在方法、重在应用性讨论。应用面较广，对几门理论物理课程的主要数学基础均有所涉猎；而且注意阐述其物理涵义和方法论意义，避免过分抽象的纯数学论证。

本教程通过长期的教改实践，在取材和体例上作了若干调整；特别是由于体例的更动，导致教学内容的浓缩和教学方式的改变。例如，精简了解析函数理论的原理部分，但仍以解析函数作为一根主线贯穿始终；突出了希耳伯特函数空间概念，使其作为斯特姆-刘维本征值问题的基石，对于各种特殊函数的讨论起到提纲挈领、融和一体的作用，并使求解偏微分方程的分离变量法有了可靠的理论依据；从理论物理课程的需求出发，相当集中地介绍了积分变换和广义函数的种种性质、及其有关的定理和公式，并藉此用于求解某些偏微分方程的定解问题，以作为“数学物理方法”的典型范例。教学方式上则注重教和学两方面的相辅相成，添加在教师指导下的自学比重。比如，让学生结合对有关参考书的阅读，在学习“希耳伯特空间”一章以后，列出各种特殊函数的性质一览表；在学习“分离变量法”一章以后，分析由不同坐标系表示的各类方程在不同定解条件下的通解结构。这样的做法颇能起到总结比较、理清思路、加深印象的功效，以免初学者产生视繁多的方程、繁杂的函数若“乱麻一团”的模糊感觉，并使其切实提高准确地运用数学工具的能力。

因当代物理学科出现新的进展以及对新世纪教学提出新的要求，理当使“数学物理方法”这门课程进一步“现代化”，也就是随着更为新颖的现代数学工具进入物理应用领域，理当使其也充实到该课程中来，所以该课程的教改须进一步开展；特别是在教学内容上，拟尝试作更大的变动。然而，这还得与物理类专业的统盘改造及其教学工作的全面安排相适应；况且，某些抽象的数学方法在物理学科中从“婢女”向“主妇”地位的转化是一个长期的过程，不可能一蹴而就。

目　　录

Contents

第一章　解析函数理论概述

众所周知，虚数 i 登上科学舞台，这在数学发展史上是一个重要的转折点。从实变函数论发展到复变函数论，不仅是数学领域的一次伟大飞跃，而且对物理学的进步有着深远的影响。诚然，一切可测量的物理量都是以实数计量的，但在许多场合，复变函数提供了处理物理问题的简捷方法和描述物理定律的完整形式。J·哈特马(J. Hadamard)说得好："实域中两个真理的最短路程是通过复域"。数学家们对解析函数各种独特性质的深入研究，使复变函数论成为抽象学科中最完美、最和谐的理论之一。本章概述解析函数的若干基本概念及其有关定理，由函数的解析性和在某些孤立点的奇异性出发，着重讨论一些复变函数的积分公式和各种幂级数的展开形式。

§1.1　复变函数的解析性

以复数变量 $z=x+\mathrm{i}y$ 为自变量的函数一般也为复变量，这就是复变函数。复变函数的一个最基本的性质，便是解析性；我们的讨论即围绕解析性而展开。为下文叙述方便起见，这里先简单说明一下复变量的几种表示形式。

一、复数及其表示

往往把阿根(Argand)图作为复变量 z 在复平面上的矢量表示(图 1.1)。矢量 $\overrightarrow{OP}$ 即指

$$z=x+\mathrm{i}y \tag{1.1.1}$$

这就是复数 z 的代数表示式。x，y 分别为矢量 $\overrightarrow{OP}$ 向实轴(x 轴)和虚轴(y 轴)的投影，称为 z 的实部($\mathrm{Re}z$)和虚部($\mathrm{Im}z$)。若化成极坐标，则有

$$\rho=|z|=\sqrt{x^2+y^2} \tag{1.1.2}$$

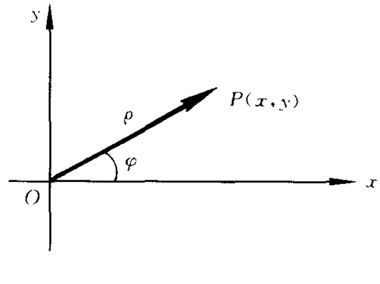

图 1.1

$$\varphi=\arg z=\arctan\frac{y}{x} \tag{1.1.3}$$

分别为 z 的模和辐角。于是，z 亦可表示为

$$z=\rho e^{i\varphi}=\rho e^{i(\varphi-2k\pi)} \tag{1.1.4}$$

其中，$k=0,\pm1,\pm2,\cdots$；这说明辐角不是唯一的。而 φ 是辐角的主值，取值范围为 $0\leqslant\varphi\leqslant2\pi$。再则，$z$ 还可表示成

$$z=\rho(\cos\varphi+i\sin\varphi) \tag{1.1.5}$$

式(1.1.4)和式(1.1.5)分别称为 z 的指数表示和三角表示。

复数 z 可以看作实数的一个有序对，记作(x,y)，那末式(1.1.1)可代以

$$z=(x,y) \tag{1.1.6}$$

至于复数的运算法则，下面列出几条：

$$\begin{cases}(x_1,y_1)\pm(x_2,y_2)=(x_1\pm x_2,y_1\pm y_2)\\ k(x,y)=(kx,ky)\\ (x_1,y_1)\cdot(x_2,y_2)=(x_1x_2-y_1y_2,x_1y_2+x_2y_1)\end{cases} \tag{1.1.7}$$

由此可见，整个复平面代表全体复数的集合；这几条运算法则正符合数的集合的基本定义。容易看出，用指数式和三角式进行复数的乘除、乘方、开方等运算比较方便些。

除了用复平面表示复数集合外，黎曼(B. Riemann)还引入复球面的几何表示。把一个球放在复平面上，使它以南极 S 与复平面相切于坐标原点。取复平面上任意一点 P，将 P 与球的北极 N 连接起来，连线交球面于 P' 点。于是，复平面上所有点均与球面上的点一一对应。这个球面就称为复球面(或黎曼球面)。球面上所有的点表示复数集合的全体，南极点 S 表示 $z=0$，北极点 N 表示 $z=\infty$(图 1.2)。

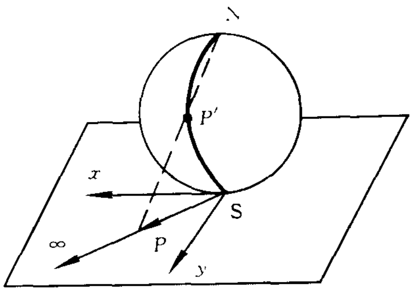

图 1.2

倘若 P 点沿复平面上的某一根射线移向无限远($z\to\infty$)，P'点便沿复球面上的某一根经线向北极 N 趋近；不论 P 按什么方式(直线或曲线)向无限远移动，P'便按相应的方式趋近于 N，因此 N 即表示$z=\infty$。在复变函数论中将无限远看成是一点；这从复球面上看自然是很清楚的。既然复平面上的点与复球面上的点一一对应，那末复平面上的无限远也应理解成一点。诸如

$a+i\infty, 0+i\infty, \infty+ib, \infty+i0$等等均表示同一个$\infty$点，只是趋向$\infty$点的路径不同而已，所以$z=\infty$点的模$\rho=\infty$、辐角不定。从复球面还清楚可见，$z=0$点与$z=\infty$点是两个对称点，$z=0$点的模$\rho=0$，辐角亦不定。

我们规定，包括无限远点的复平面叫全复平面，不包括无限远点的复平面叫开复平面。全复平面与整个复球面相当。

二、复变函数的连续性、可微性和解析性

复变函数一般可写成

$$w=f(z)=u(x,y)+iv(x,y) \tag{1.1.8}$$

其实部$u=\mathrm{Re}w$和虚部$v=\mathrm{Im}w$均为x,y的函数。自变量（又常常称其为宗量）z的变化区域在一个复平面上，w的变化区域在另一个复平面上，因此可以说，复变函数$w=f(z)$把两个复数平面的相应区域联系起来，即这个函数把z平面的区域D里的点一一映射到w平面的区域D'里（图1.3）。

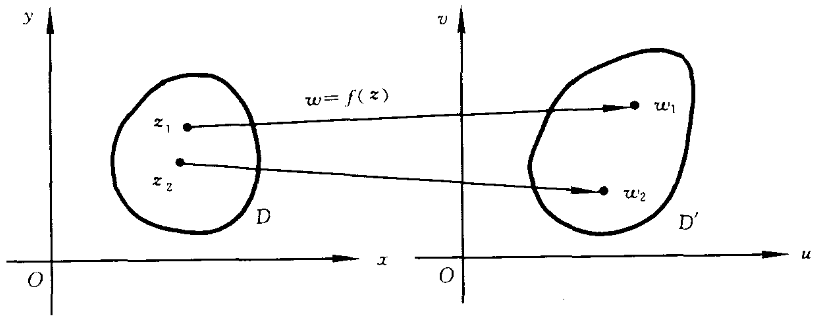

图 1.3

对应于z的每一个值，w还可不止取一个值，此时$f(z)$为多值函数。例如$\sqrt[n]{z}$（n为正整数），$\ln z$就是多值函数*；将宗量z以极坐标表示，那末

$$\sqrt[n]{z}=\rho^{1/n}e^{i(\varphi+2k\pi)/n} \quad k=0,1,2,\cdots,n-1 \tag{1.1.9}$$

$$\ln z=\ln\rho+i(\varphi+2k\pi) \quad k=0,\pm1,\pm2,\cdots \tag{1.1.10}$$

如果把k值取定，对应之函数即为原多值函数的一个单值分支。显然，$\sqrt[n]{z}$有n个单值分支，而$\ln z$有无限多个单值分支。其中，$k=0$的那个分支称为多值函数的主

* 对于这两种多值函数，$z=0$及$z=\infty$是它们的支点。关于函数的多值性及支点概念，这里不予详述，可参阅胡嗣柱、倪光炯：《数学物理方法》§1.4。

值。

与实变函数一样，复变函数亦具有连续性和可微性；所不同的是，复变函数还具有解析性。

［复变函数的连续性］　若复变函数 $f(z)$ 在 z_0 点及其邻域里确定，且 $\lim\limits_{z\to z_0} f(z)=f(z_0)$，则称 $f(z)$ 在 z_0 点连续。

复变函数的连续问题可归结为实变函数 $u(x,y)$ 和 $v(x,y)$ 的连续问题，即若 $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\y\to y_0}} u(x,y)=u(x_0,y_0)$，$\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\y\to y_0}} v(x,y)=v(x_0,y_0)$，则 $f(z)$ 在 z_0 点连续。因此，有关实变函数连续性方面的定理，对复变函数都成立。

［复变函数的可微性］　若 $f(z)$ 是 z 的某一区域里的单值函数，对于该区域中的 z_0 点，不论 Δz 按什么方式趋于零，比值 $\dfrac{f(z_0+\Delta z)-f(z_0)}{\Delta z}$ 都趋于同一个有限的极限值，则称 $f(z)$ 在 z_0 点可微，而此极限值即为 $f(z)$ 在 z_0 点的导数，记以 $f'(z_0)$。

［复变函数的解析性］　若复变函数 $f(z)$ 在 z_0 点及其 ε 邻域* 里的各点均可微，则称 $f(z)$ 在 z_0 点解析。

可见，可微性是对孤立点而言，解析性则反映凝聚点——一个小邻域范围的性状。也就是说，解析函数把区域中点与邻近点相互联系起来，后面会详细讨论这种关联性。

三、柯西-黎曼条件

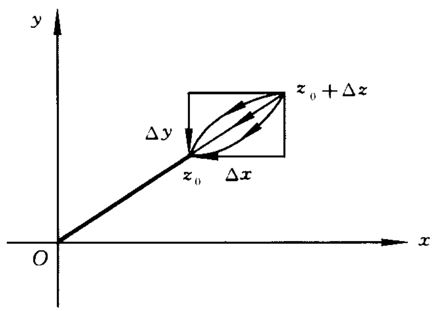

图 1.4

复变函数可微的条件比较严格，它要求函数具有各向同性的导数，不论 Δz 如何取法，即不论 z 沿哪条路径趋近于 z_0 点（见图 1.4），极限值

$$\lim_{z\to z_0}\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{\Delta f}{\Delta z}$$

均相同。由此定义，可得出函数可微的必要条件。其推导如下：

因为 $f(z)=u(x,y)+\mathrm{i}v(x,y)$，而 $\Delta z=\Delta x+\mathrm{i}\Delta y$，取两条向 z 点的趋近路径

* 所谓 z_0 点的 ε 邻域，是指以 z_0 点为圆心、任意小正数 ε 为半径的一个开圆，即符合 $|z-z_0|<\varepsilon$ 的那些点的集合；此无限小开圆点集，有时又可称为凝聚点。

（在证明中以任意点 z 代替 z_0 点）。先取 $\Delta y=0,\Delta z=\Delta x$

$$f_1'(z)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{u(x+\Delta x,y)+\mathrm{i}v(x+\Delta x,y)-u(x,y)-\mathrm{i}v(x,y)}{\Delta x}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\left[\frac{u(x+\Delta x,y)-u(x,y)}{\Delta x}+\mathrm{i}\,\frac{v(x+\Delta x,y)-v(x,y)}{\Delta x}\right]$$

$$=\frac{\partial u}{\partial x}+\mathrm{i}\,\frac{\partial v}{\partial x}$$

然后再取 $\Delta x=0,\Delta z=\mathrm{i}\Delta y$，同样可证

$$f_2'(z)=-\mathrm{i}\,\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial y}$$

既然这两个极限值相等，即 $f_1'=f_2'$，那末便得

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y},\quad \frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x} \tag{1.1.11}$$

这就是柯西-黎曼条件（此二式或称柯西-黎曼方程）。但该条件成立，并不足以确定函数的可微性，下面的定理才给出其充分条件。

［**定理 1.1**］ 如果复变函数 $f(z)$ 的实部、虚部的一阶偏导数在某一点存在且连续，而且满足柯西-黎曼方程，那末 $f(z)$ 在该点可微。

〈证〉 因为 $u(x,y)$，$v(x,y)$ 的一阶偏导数在 z 点存在且连续，故而

$$\Delta u=u(x+\Delta x,y+\Delta y)-u(x,y)$$

$$=\frac{\partial u}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial u}{\partial y}\Delta y+\varepsilon_1\Delta x+\varepsilon_2\Delta y$$

$$\Delta v=v(x+\Delta x,y+\Delta y)-v(x,y)$$

$$=\frac{\partial v}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial v}{\partial y}\Delta y+\varepsilon_3\Delta x+\varepsilon_4\Delta y$$

那末

$$\lim_{\Delta z\to 0}\frac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta z}=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta z}+\mathrm{i}\lim_{\Delta z\to 0}\frac{\Delta v}{\Delta z}$$

$$=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial u}{\partial y}\Delta y\right)+\mathrm{i}\left(\frac{\partial v}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial v}{\partial y}\Delta y\right)+(\varepsilon_1+\mathrm{i}\varepsilon_3)\Delta x+(\varepsilon_2+\mathrm{i}\varepsilon_4)\Delta y}{\Delta z}$$

$$=\frac{\partial u}{\partial x}+\mathrm{i}\,\frac{\partial v}{\partial x}=f'(z)$$

这里利用了柯西-黎曼条件；并因为偏导数连续，所以当 $\Delta x,\Delta y\to 0$ 时

$$\left|(\varepsilon_1+\mathrm{i}\varepsilon_3)\frac{\Delta x}{\Delta x+\mathrm{i}\Delta y}\right|=|\varepsilon_1+\mathrm{i}\varepsilon_3|\frac{|\Delta x|}{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}}$$

$$\leqslant|\varepsilon_1+\mathrm{i}\varepsilon_3|=\sqrt{\varepsilon_1^2+\varepsilon_3^2}\to 0$$

同理

$$\left|(\varepsilon_2+\mathrm{i}\varepsilon_4)\frac{\Delta y}{\Delta x+\mathrm{i}\Delta y}\right|\to 0$$

而$\dfrac{\partial u}{\partial x}+\mathrm{i}\dfrac{\partial v}{\partial x}$与 Δz 无关，即不论沿哪条路径趋近于 z，导数 $f'(z)$存在、而且是同一的。

倘若把定理中的“在某一点”换成“在某一点及其 ε 邻域里”，那末该定理就给出函数$f(z)$在这一点解析的充分条件；倘若换成“在区域 D 里”，那末该定理就给出函数 $f(z)$在区域 D 解析的充分条件。这条确定复变函数解析性的定理是解析函数理论研究的前提。

由上述可知，函数在一点解析的条件是相当苛刻的。例如，对于函数 $f(z)=z\mathrm{Re}\,z=x^2+\mathrm{i}xy$，$\dfrac{\partial u}{\partial x}=2x$，$\dfrac{\partial v}{\partial y}=x$，$\dfrac{\partial u}{\partial y}=0$，$-\dfrac{\partial v}{\partial x}=-y$，仅在 $z=0$，即$(0,0)$点符合柯西-黎曼条件，故而该函数在这一点可微，但并不解析(因为在 $z=0$ 点的 ε 邻域里就不满足 C-R 方程)。至于在其余点，既不可微，更不解析。又如 e^z，$\sin z$，$\cos z$ 等函数在 $z=\infty$点不解析，因为它们的导数在该点取值不定，即沿不同路径趋近于 $z=\infty$点时，$\dfrac{\Delta f}{\Delta z}$的极限不等(其实，此时这些函数本身的取值不确定，即$\lim\limits_{z\to\infty}f(z)$不存在)。而在任何有限远点，这些函数均满足定理 1.1 的条件，因此都解析。这种在整个开复平面上解析的函数称为全纯函数，或整函数(e^z、$\sin z$、$\cos z$是超越整函数)。

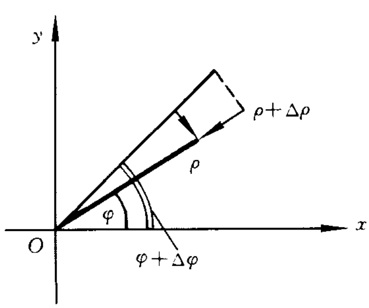

图 1.5

C-R 方程的形式不是唯一的，由所采用的坐标而定，下例导出另一种形式。

［例 1.1］　求以平面极坐标表示的柯西-黎曼方程。

〈解〉　用极坐标表示，

$$w=f(z)=u(\rho,\varphi)+\mathrm{i}v(\rho,\varphi)$$

Δz 以两种方式(见图 1.5)趋于零：(1) Δz 沿径