高等数学自学丛书

抽象代数

李师正 编

山东教育出版社

高等数学自学丛书

抽象代数

李师正 编

山东教育出版社
一九八三年·济南

内 容 提 要

本书是高等数学自学丛书之一，内容包括集合论基本知识及群胚、半群、群、环、域、代数、模、格等方面的基本概念和性质，并简述伽罗华理论的主要内容。标*号处为选学内容。

本书适合中等学校数学教师、理工科大学生、工程技术人员阅读及青年自学，也可作为高等院校有关专业的教学参考书。

高等数学自学丛书
抽 象 代 数
李 师 正 编
*
山 东 教 育 出 版 社 出 版
山东省新华书店发行
山东新华印刷厂潍坊厂印刷
*
787×1092 毫米 32 开本 13.75 印张 291 千字
1983 年 4 月新 1 版 1983 年 4 月第 1 次印刷
印数：1—5,500
书号 13275·11 定价 1.15 元

出 版 说 明

为了满足广大读者自学高等数学的需要，我们出版了这套高等数学自学丛书，包括《数学分析基础》、《一元函数微分学》、《一元函数积分学》、《无穷级数》、《多项式代数》、《线性代数》、《抽象代数》、《空间解析几何》、《概率论与数理统计》、《布尔代数》等十册．

这套丛书起点较低，系统性较强，次序的编排尽量作到由浅入深，由易到难，注意循序渐进，并适当渗透了一些现代数学的观点．在编写过程中，力求作到内容讲述详细，文字通俗顺畅；书中安排了较多的例题和习题，书末附有习题答案或提示．因此，这套丛书适合自学，也可以作为这些课程的教学参考书．

这套丛书由山东师范大学数学系主持编写．此外，还得到山东大学数学系、曲阜师范学院数学系、聊城师范学院数学系等单位的大力支持和帮助，在此一并致谢．

一九八二年八月

绪　　言

要回答什么是代数，并不是一件容易的事情，因为不同的历史阶段中代数有着不同的含义.

"代数"(Algebra) 一词原由古代一本书的名字(《Al jabr w' al muqâbala》)演化而来，这本书的作者阿里·花拉子米 (Al-Khowârizmî) 是九世纪阿拉伯国家花拉子模的数学家，他在书中记述了解一次及二次方程的法则. 不过他所叙述的结果都是用语言而不是用字母表达的，直到十六世纪，法国数学家韦达 (F. Vieta, 1540—1603)首先较系统地创造并利用了字母表示法，后来法国数学家笛卡尔(R. Descartes, 1596—1650) 等人又加以改进，这可以说是数学上的重大变革. 至十八世纪，代数被当成用字母表示数构成表达式进行变换和计算的学科. 它与算术的区别在于后者总局限于具体数目的运算. 从算术到代数，意味着人们思维发展的一次由具体到抽象的飞跃. 实际上，当时的代数包揽了除几何外的几乎全部数学. 这是代数发展的第一阶段，目前初等代数的内容大体来源于此.

十八世纪末和十九世纪初之后，代数学的中心任务转化为代数方程的求解和研究，代数被认为是有关代数方程理论和方法的学科. 与此同时，行列式、矩阵、二次型、线性变换等理论也相应地发展起来. 这是代数发展的第二阶段. 我们学过的多项式代数和线性代数大都属于这一时期的内容.

自十九世纪后期以来，由于科学的发展，在包括数学本身的许多科学领域中，出现了一些新的量，如向量、矩阵、张量等，它们也有自己的运算，这些运算除适合一些常见的规律外，还有一些特定的规律。如果把这些量用抽象的符号表示，就构成一个个不同的代数系，即带运算的不同集合。撇开具体的量，专门研究抽象代数系的性质，就是代数第三阶段的主要任务。这一阶段常称为抽象代数或近世代数。

实际上，抽象代数的萌芽始于十九世纪之初，因为当时法国青年数学家伽罗华（E. Galois，1811—1832)在彻底解决代数方程能否用根式求解的问题上，曾利用了群论的方法。

整个十九世纪和本世纪二十年代之前，抽象代数处于比较零乱的状态，后来由于一批德国代数学家的综合工作，才统一为一门独立的学科。近几十年来，抽象代数的许多新分支和边缘学科不断涌现，而且在数学和其他科学领域中，如试验设计、计算机科学、图论、几何、分析、理论物理、结构化学等方面应用越来越广泛。总之，抽象代数已成为近代数学中一个十分重要的组成部分。

本书主要讨论抽象代数中的基本代数系——群胚、半群、群、环、域的基本概念和性质，此外还以少量篇幅简单介绍代数、模和格。掌握这些内容不仅是数学工作者以及数学教师所必须的，对于从事其他专业的科学工作者、工程技术人员来说也是很需要的。

在次序的编排上，本书在介绍了必要的预备知识后，先讲述群胚和半群，因为它们不仅是独立的最基本的代数系，而且是群、环、代数等代数系的基础，如群是特殊的半群，

环关于乘法是半群，代数关于乘法是群胚。特别是唯一分解环的非零元作成高斯（Gauss）半群，即唯一分解半群，它的大部分理论只依赖于乘半群的结构，与加法无关。所以，搞清群胚与半群，对后面的学习就会比较顺利，也算本书的一点尝试。伽罗华理论是抽象代数中一颗灿烂的明星，是最著名最精湛的部分之一，但它涉及面广，所以本书仅概述它的主要内容。

目　　录

第一章 预备知识

这一章是本书的基础，介绍集合、映射、关系、等价关系、分类、积集、商集、代数运算等基本概念.

§1·1 集合及其运算

一、集合与元素

某些确定的对象的集体，称为一个集合．集合中包含的对象，称为这个集合的元素．

亚洲国家的集合，包括且仅包括地处亚洲的国家．

区间[1,2]中实数的集合，包括且仅包括一切满足 $1\leqslant x\leqslant 2$ 的实数 x．

$M_2(\boldsymbol{R})$——全体实二阶方阵的集合，包括且仅包括一切矩阵$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$，其中$a_{ij}(i,j=1,2)$是任意实数．

集合的例子举不胜举，可以顺手拈来．

集合有一个重要原则，那就是它的元素具有确定性．

给出一个集合，就相当于给出一个明确的判定标准，由它可以判定任意对象在不在这个集合里．如果没有这样一个标准，或标准不明确，就不算给出一个集合．如“一切大数的全体”不是一个集合，因为数是不是“大数”，并没有一个明确的标准，比方 10000 算不算大数？10^{10} 算不算大数？

无从得知[注]．

再如分子是偶数的分数的全体，也不是一个集合，因为一个分数属不属于它并不确定．如分数$\frac{1}{2}=\frac{2}{4}$，既不属于它，又属于它．如果说分子是偶数的既约分数（约定分母为正整数）全体就是一个集合了．

集合的元素是确定的，但并不要求元素能一一列举出来．如方程

$$x^5+2x+2=0$$

的复根尽管无法精确地表出（见§5·8五），但任意复数是不是该方程的根却是完全确定的．事实上，只要代入验证就能判明．所以上述方程的复根组成一个集合．

二、集合描述法

集合常用大写字母A、B、C、…表示，元素常用小写字母a、b、c、…或α、β、…表示．如果a是A的元素，则记为$a\in A$，或$A\ni a$，读作"a属于A"或"A包含a"．如果a不是A的元素，则记为$a\notin A$或$A\not\ni a$，读作"a不属于A"或"A不包含a"．

为了表明一个集合含些什么元素，需要对集合进行描述．最常用的是下面两种方法：

1．列举法：将集合的元素全部开列出来，外加花括号．

如：集合$\{-2,\ -1,\ 1,\ 2\}$，$\{1\}$等，属于用列举法描述集合．有时集合的元素很多，甚至无限多，可以写出少数

注　这种界限不清楚的"集合"，是本世纪六十年代出现的一门新学科——"模糊数学"的研究对象，不属于本书的讨论范围．

元素，以显示出它的规律（如规律不明显，则不能用列举法），后面加上省略号。如

$\{1, 2, 3, 4, \cdots\}$表示自然数集。

$\{1, 3, 5, 7, \cdots\}$表示正奇数集。

$\{2, 4, 6, 8, \cdots, 10000\}$表示2与10000之间的全体偶数组成的集合。

2. 叙述法：用集合的元素独具的性质描述集合。

如集合$\boldsymbol{E}=\{$整数$n \mid 2$整除$n\}$表示2的所有倍数组成的集合，即偶数集。$A=\{$实数$x \mid x^2+3x+2=0\}$表示方程$x^2+3x+2=0$的全体实根组成的集合。

叙述法是在花括号中间加一条竖线，左边写元素的一般形式，右边写集合的元素独具的性质。

同一个集合可以用不同的方法描述。如集合$\boldsymbol{E}$和$\boldsymbol{A}$也可以用列举法写成

$\boldsymbol{E}=\{0, \pm 2, \pm 4, \cdots\}$，$\boldsymbol{A}=\{-1, -2\}$。

三、集合的包含与相等

假设A、B是两个集合，如果集合A的元素都是集合B的元素，则称A属于B，或B包含A，记之$A \subseteq B$，或$B \supseteq A$。这时，也称A是B的子集，B是A的扩集。如$\boldsymbol{E} \subseteq$整数集$\boldsymbol{Z}$。

如果A、B含有完全相同的元素，则称两个集合相等，记之$A=B$。显然，$A=B$的充要条件是$A \subseteq B$且$B \subseteq A$。

如果$A \subseteq B$，但$A \neq B$，则称A是B的真子集，或B真包含A，记之$A \subset B$。这时，B至少有一元素不属于A，但A的元素全部属于B。如$\{2,4\} \subset \{2,4,8\} \subset \boldsymbol{E}$。

四、有限集与无限集

一个集合包含的元素（指不同的元素，下同）可以是任意多个．如集合$\{1\}$，只含一个元素1，这种只含一个元素的集合称为单元素集．不含任何元素的集合，称为空集合，用ϕ表示．空集可以认为是任何集合的子集．

单元素集与一个元素本身含义不同，而空集也不要与单元素集$\{0\}$相混．

全体实数组成的集合记为$\boldsymbol{R}$，集合

$$\{x\in\boldsymbol{R}\,|\,(x-1)^2=0\}=\{1\}$$

不能写成1．集合

$$\{x\in\boldsymbol{R}\,|\,x^3+x=0\}=\{0\}$$

不是空集ϕ．相反地，集合

$$\{x\in\boldsymbol{R}\,|\,x^2+2=0\}=\phi$$

（方程$x^2+2=0$无实根）不是$\{0\}$．

集合的元素可以是有限多个，也可以是无限多个，前者称为有限集，后者称为无限集．空集认为是有限集．

有限集S的元素个数是一个非负整数，用记号$|S|$表示．如

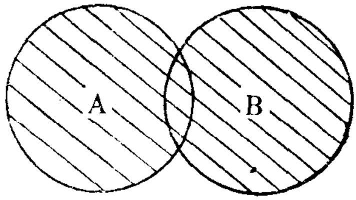
$$|\{-1,2,5\}|=3\quad|\{\sqrt{2}\}|=1,$$
$$|\{1,3,5,\cdots,101\}|=51,\ |\phi|=0.$$

如果A是有限集，$B\subseteq A$，则显然B也是有限集，且$|B|\leqslant|A|$，如果$B=A$，则$|B|=|A|$．如果$B\subset A$，则$|B|<|A|$．

五、集合的并集

假定A和B是两个集合，A和B的元素合在一起，又

形成一个新的集合，称为 A 和 B 的并集，记为 $A\cup B$.也就是说，$A\cup B$的元素或者属于 A，或者属于 B（包括同时属于 A、B的元素）（如图 1—1）。即



A∪B

图 1—1

$$A\cup B=\{x\mid x\in A \text{ 或 } x\in B\}.$$

例 1　$A=\{1,2,3\}$，$B=\{2,4,6\}$，
则 $A\cup B=\{1,2,3,4,6\}$.

例 2　设 $A=\{x\in \mathbf{R}\mid x>2\}$，

$B=\{x\in \mathbf{R}\mid x<-1\}$，

则 $A\cup B=\{x\in \mathbf{R}\mid x>2 \text{ 或 } x<-1\}=\{x\in \mathbf{R}\mid (x-2)(x+1)>0\}$（如图 1—2）。

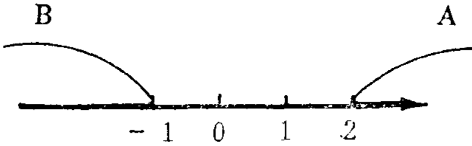
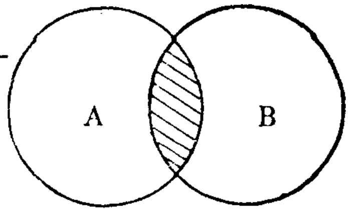


图 1—2



A∩B

图 1—3

六、集合的交集

假定 A 和 B 是两个集合，由同时属于 A 和 B 的元素组成的集合，称为 A 和 B 的交集，记为 $A\cap B$（如图 1—3）。即

$$A\cap B=\{x\mid x\in A \text{ 且 } x\in B\}.$$

例 3　设 $A=\{1,2,3\}$，$B=\{2,4,6\}$，
则$A\cap B=\{2\}$.

例 4　设 $A=\{x\in \boldsymbol{R} \mid x<2\}$,

$B=\{x\in \boldsymbol{R} \mid x>-1\}$,

则 $A\cup B=\{x\in \boldsymbol{R} \mid -1<x<2\}$

$=\{x\in \boldsymbol{R} \mid (x-2)(x+1)<0\}$ (如图 1—4).

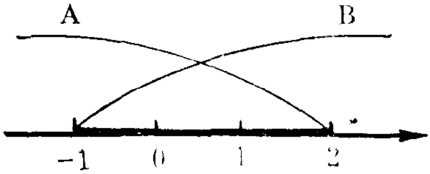


图 1—4

七、并集与交集的性质

定理 1　设 A、B、C 是任意三个集合，则

(1) $A\cup A=A$, $A\cap A=A$(幂等律);

(2) $A\cup B=B\cup A$, $A\cap B=B\cap A$(交换律);

(3) $A\cup(B\cup C)=(A\cup B)\cup C$,

$A\cap(B\cap C)=(A\cap B)\cap C$(结合律);

(4) $A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$,

$A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$(分配律).

证明：(1)、(2)、(3)是显然的，下面证明(4)的第一式. 只须证明左集$\subseteq$右集，右集$\subseteq$左集.

任取 $x\in$ 左集，则 $x\in A$ 且 $x\in B\cup C$. 如果 $x\in B$，那末 $x\in A\cap B$；如果 $x\in C$，那么 $x\in A\cap C$. 因而 $x\in(A\cap B)\cup(A\cap C)$，即右集. 左集$\subseteq$右集.

任取 $x\in$ 右集，分两种情况：若 $x\in A\cap B$，那末 $x\in A$ 且 $x\in B$；若 $x\in A\cap C$，那么 $x\in A$ 且 $x\in C$. 不管怎样，总有 $x\in A$，且 $x\in B\cup C$. 因而 $x\in A\cap(B\cup C)$，即右集

$\subseteq$左集，(4)的第一式得证。

(4)的第二式，留作练习。

证毕

多个集合的并集与交集可以类似地定义。如集合 A_1、A_2、…的并集和交集记为 $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n$ 和 $\bigcap\limits_{n=1}^{n} A_n$。

八、集合的差集

假定 A，B 是两个集合。一切属于 A 但不属于 B 的元素组成的集合称为 A 和 B 的差集，记为 $A\setminus B$。即

$$A\setminus B=\{x\,|\,x\in A，但\ x\notin B\}。(如图 1—5)$$

例 5　设 $A=\{1,2,3,4,5\}$，$B=\{1,3,5,7\}$，则 $A\setminus B=\{2,4\}$。

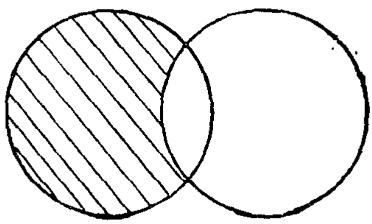


图 1—5

定理 2　设 A，B 是两个集合，则

$$(A\setminus B)\cup B=A\cup B,$$
$$(A\setminus B)\cap B=\phi,\quad A=(A\setminus B)\cup(A\cap B).$$

证明留给读者。

习　题　1·1 [注]

1．设 $M_1=\boldsymbol{N}$，$M_2=\boldsymbol{Z}$，$M_3=\boldsymbol{R}$，$M_4=\boldsymbol{R}^+$，$M_5=\{x\in\boldsymbol{R}\,|\,x^2=x\}$，$M_6=\{x\in\boldsymbol{R}\,|\,x^2\neq x\}$。

(1) 试问下面的数各属于上述的哪些集合？

注　习题中所涉及到的常用数集记号可直接查阅书末附录。