

汽车结构力学 与有限元计算



高卫民 王宏雁 洪善桃 编著

S2-2
G41.1

汽车结构力学与有限元计算

(基础篇)

高卫民 王宏雁 洪善桃 编著

同济大学出版社

.....

图书在版编目(CIP)数据

汽车结构力学与有限元计算/高卫民等编著. —上海:同济大学出版社, 2002. 6

ISBN 7-5608-2311-4

I. 汽… II. 高… III. ①汽车—结构力学②汽车—结构力学—有限元法 IV. U461.1

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2001)第 046779 号

汽车结构力学与有限元计算

作 者 高卫民 王宏雁 洪善桃

责任编辑 卞玉清 责任校对 郁 峰 装帧设计 潘向葵

出 版
发 行

同济大学出版社

(上海四平路 1239 号 邮编:200092 电话:021-65985622)

经 销 全国各地新华书店

印 刷 上海豪杰印刷厂印刷

开 本 787mm×1092mm 1/16

印 张 8.25

字 数 210000

版 次 2002 年 6 月第 1 版 2002 年 6 月第 1 次印刷

印 数 1—1000

书 号 ISBN 7-5608-2311-4/u·33

定 价 18.00 元

本书若有印装质量问题, 请向本社发行部调换

前 言

这是一套与众不同的系列教材,它将结构力学、弹性力学和板壳力学的基本概念、最基本的内容以及与其相关的有限元法揉和在一起,还讲述了它们在汽车工程中的应用,所以定名为《汽车结构力学与有限元计算》。这本书的对象主要是没有读过结构力学和弹性力学的汽车工程专业和机械专业的本科生。

本系列教材分为三篇。第一篇是基础篇,第二篇是应用弹性力学篇,第三篇是汽车结构力学篇。第二篇论述弹性力学有限元法和板壳力学有限元法的理论、方法以及汽车工程中有限元法的新进展。第三篇论述有限元法在汽车工程中的应用实例、计算程序的编制、相关软件应用的最新进展以及用有限元法解决汽车工程问题的科研成果。

本书是基础篇,共分五章。前三章讲述结构力学的基本理论,后两章阐述结构力学的有限元法。第一章讲述结构的位移计算,为以后的计算打下基础。它论述了实功原理,并运用动能原理进行了严格的论证。虚功原理及位移计算公式的应用,也是本章学习的重点内容。第二章论述力法,它是结构力学和弹性力学解题的基本方法。它的特点是以力为基本未知量,讲述了力法的基本方程及解题步骤,介绍了简化方法及对称性的利用,并且讲述了转角位移方程,为位移法作好准备。关于系数 δ_{ij} 的计算,在采用基本积分方法的同时,还运用了积分变换法,这样可加深对图乘法理解。第三章论述位移法,它比力法应用更为广泛。一方面是运用平衡条件建立位移法基本方程;另一方面是利用附加约束建立位移法典型方程,同时还讲述了利用对称性简化计算,最后对弯矩分配法也作了扼要介绍。第四章讲述结构力学的有限元法,首先介绍结构力学有限元法的基本原理和方法,接着运用转角位移方程形成结构单元刚度矩阵,并讲述了单元刚度矩阵的应用及其性质。与此相对应的,本章也重点论述了结构原始点刚度矩阵的形成、性质、边界约束的处理以及非结点载荷向结点的移置。为了使读者能深入了解和掌握结构力学有限元法,本章给出具体算例,详细地介绍了结构力学有限元法计算的全过程。最后,还简要地介绍了空间梁单元的刚度矩阵。第五章论述了结构力学中两大类型的变分原理及其应用,一是以位移作为变分的虚位移原理;另一是以力作为变系的虚力原理。虚位移原理是理论力学中虚位移原理的加深和推广,虚力原理是本书第一章中的虚功原理的加深和推广。本章首先论述以位移为变分的虚位移原理及其应用,其中包括虚位移原理在弹性体中的应用,最小势能原理,瑞利-李茨方法,运用变分原理建立结构单元刚度矩阵;其次论述了虚力原理及其应用,即本章第5节至第8节的内容。本章第4节介绍的方法具有一般性,它可以推广到弹性力学有限元法。本章讨论的余能理论可用于解决汽车的非线弹性零件。

本书为高等院校车辆工程专业和机械工程专业的教学用书,也可作其他有关专业的教学参考书,并可供汽车行业的工程技术人员参考。因水平和条件有限,书中难免有错漏之处,诚恳地欢迎使用本书的师生和广大读者批评指正,以便再版时修正。

编著者

2002.3.30

目 录

第一章 结构位移的计算	(1)
§ 1.1 概述	(1)
§ 1.2 实功和变形位能	(2)
§ 1.3 虚功和虚功方程	(6)
§ 1.4 载荷作用下的位移计算	(9)
§ 1.5 图乘法	(14)
习题	(15)
第二章 力法	(17)
§ 2.1 超静定结构的基本概念	(17)
§ 2.2 力法的基本原理	(17)
§ 2.3 力法的典型方程	(19)
§ 2.4 力法的简化计算方法	(24)
§ 2.5 转角位移方程	(26)
§ 2.6 其他支承情况	(32)
习题	(35)
第三章 位移法	(36)
§ 3.1 引言	(36)
§ 3.2 位移法计算举例	(37)
§ 3.3 利用附加约束建立位移法典型方程	(45)
§ 3.4 经典位移法典型方程的应用	(49)
§ 3.5 对称性的利用	(51)
§ 3.6 力矩分配法概要	(54)
习题	(60)
第四章 矩阵位移法	(61)
§ 4.1 引言	(61)
§ 4.2 单元刚度矩阵	(61)
§ 4.3 单元刚度矩阵的应用	(67)
§ 4.4 单元刚度矩阵的坐标变换	(71)
§ 4.5 结构总刚度矩阵的形成	(74)
§ 4.6 结构总刚度矩阵的性质	(77)
§ 4.7 边界约束条件的处理和结点位移列向量计算	(78)
§ 4.8 非结点载荷	(80)

§ 4.9 直接刚度法计算举例·····	(82)
§ 4.10 空间梁单元的单元刚度矩阵 ·····	(93)
习题 ·····	(95)
第五章 结构力学的变分解法 ·····	(97)
§ 5.1 变分的概念,虚位移原理 ·····	(97)
§ 5.2 虚位移原理在弹性体中的应用 ·····	(101)
§ 5.3 最小势能原理,瑞利-李茨方法·····	(104)
§ 5.4 运用变分原理建立单元刚度矩阵 ·····	(107)
§ 5.5 虚力原理 ·····	(112)
§ 5.6 余能及其偏导数 ·····	(115)
§ 5.7 卡氏第二定理的应用 ·····	(118)
§ 5.8 虚力法用于非线性弹性梁 ·····	(122)
§ 5.9 简短的小结 ·····	(123)
习题·····	(124)
参考文献 ·····	(125)

第一章 结构位移的计算

§ 1.1 概 述

在机械工程结构中,所采用的材料均是可以变形的弹性体。在载荷作用、温度变化、支座移动、制造误差以及材料收缩等因素的影响下,结构上各点的位置会有所变动,这种位置的变动称为位移。结构的位移通常有两种:一种是截面的移动,称为线位移,在计算图上可用一点(截面形心处)的移动来表示;另一种是截面的转动,叫做角位移,在计算图上可用杆轴上一点切线方向的变化来表示,如图 1-1(b) 所示。A 点的位移为 $\overline{AA'} = \Delta_A$ 。也可用其铅垂线位移 Δ_{AV} 和水平线位移 Δ_{AH} 这两个分量来表示,见图 1-1(b)。另外,杆件各截面也要发生转动,转动的角度称为角位移,图 1-1(a) 中的 θ_A 表示刚架截面 A 的角位移。

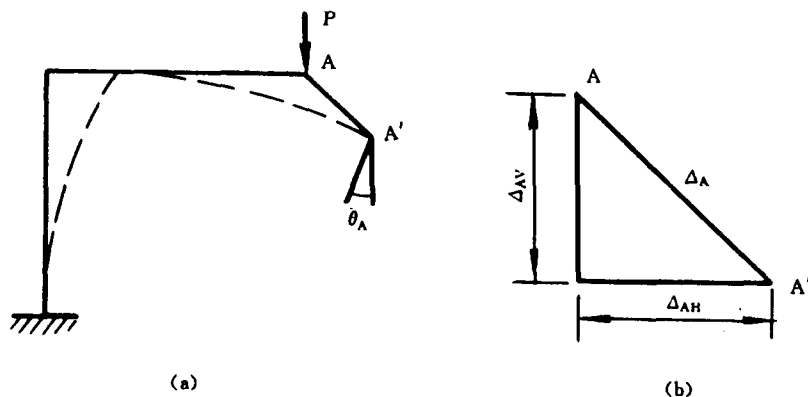


图 1-1

计算结构位移有两方面的目的:一是验算结构的刚度,校核结构的位移是否超过允许限值。例如对于桥式起重机、龙门起重机、装卸桥的主梁,其跨中挠度 f (梁中点铅垂位移) 就规定为 $f = (\frac{1}{700} \sim \frac{1}{1000})L$, L 为跨度。

计算结构位移的另一个重要目的,就是为以后超静定结构计算打下基础。因为超静定结构有多余约束,其内力单凭静力平衡条件是不能够确定的,还必须考虑变形协调条件,这就必须计算结构的位移。此外,在结构的动力计算和结构的稳定性计算中,也要用到结构的位移。结构有限元计算中也经常涉及到结构杆端的位移计算,因此,结构的位移计算就显得特别重要。

在弹性结构中,结构的位移一般是微小的,称为是小变形。在结构材料处于弹性阶段和小变形情况下,结构的位移和结构上所施加的载荷成正比变化,通常称这样的结构为线弹性结构。在求解线弹性结构的位移时,可以应用叠加原理进行计算。

结构力学计算位移的方法,是以功能原理为基础的,应用得特别多的是虚功原理,自然,这里所说的是变形体的虚功原理。因此,在论述结构的位移计算之前,有必要介绍有关的功

和能的基本概念和基本原理,然后再讨论具体的结构位移的计算。

§ 1.2 实功和变形位能

1.2.1 外力实功

图 1-2 所示的悬臂梁,在静力载荷 P 作用下产生了如虚线所示的变形,开始加载时,梁端位移为零。

载荷由零逐渐增加到最后数值 P 时,沿着 P 的方向位移 Δ (也称为梁的挠度) 也逐渐增加到最后数值。令在任一中间位置的位移为 Δ_x 而作用力为 P_x ,它们之间存在着线性关系:

$$\Delta_x = \alpha P_x \quad (1-1)$$

图 1-2

上式中, α 为比例常数,即单位力引起的位移。当载荷有一微小增加 dP_x 时,相应的位移也有一微小增加 $d\Delta_x$,在此过程中, P_x 所作的微功为 $dT_x = P_x d\Delta_x$,全部加载过程中,载荷所作的总功为

$$T = \int_0^{\Delta} P_x d\Delta_x \quad (1-2)$$

由于 $P_x = \frac{\Delta_x}{\alpha}$,于是有

$$T = \int_0^{\Delta} P_x d\Delta_x = T = \int_0^{\Delta} \frac{\Delta_x}{\alpha} d\Delta_x = \frac{\Delta^2}{2\alpha} = \frac{1}{2} P\Delta \quad (1-3)$$

上式也可用 P 和 Δ 分别为两坐标轴所组成三角形 OAB 的面积表示,如图 1-3 所示。应该注意,这里的位移 Δ 是由载荷 P 的作用所产生的,其方向沿载荷的方向,我们称这种为外力实功。计算公式前面有系数 $\frac{1}{2}$,这是由于力 P 是由零逐渐增加到最后值所致。此处由于载荷所产生的位移,其方向总是与载荷的位移一致,因此,外力的实功总是正值。

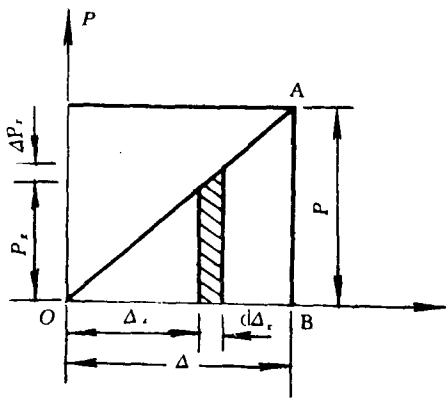


图 1-3

如果作用的载荷不是集中力而是力偶,如图 1-4 所示。在弯矩(相当于力偶)作用的截面上引起相应的转角 φ 称为角位移,同样可以证明其外力实功为

$$T = \frac{1}{2} M\varphi \quad (1-4)$$

在具体计算中,通常将集中力和集中力偶及分布载荷统称为广义力 Q ;而把线位移 Δ 和角位移 φ 统称为广义位移 q ,广义力与广义位移相乘的乘积的量纲为功,即等于力乘以距离。用公式表示为

$$T = \frac{1}{2} Qq$$

在以上的论述中,有以下几点值得注意:① 结构处于弹性状态;② 结构的位移很小;满

足以上两个条件的结构称为线弹性结构;③ 载荷是沉静地、缓慢地施加于结构,即所谓静力过程。满足条件①、②和③的结构被称为“处于静力状态的线弹性结构”。本教程只研究线弹性结构的静力学问题,或简称为“结构静力学”。

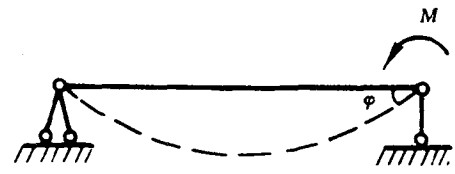
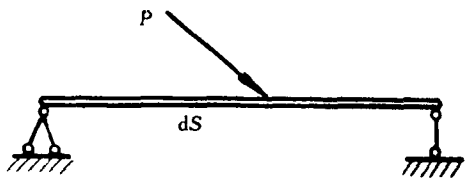


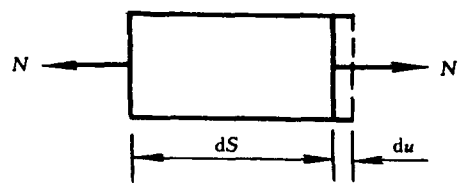
图 1-4

1.2.2 内力实功

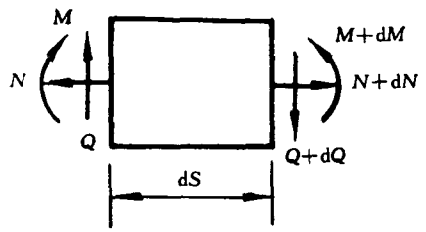
线弹性结构(以下简称为弹性结构)受到载荷作用时,将同时产生内力和变形,因而内力将在其相应的变形上作功。今以图 1-5(a) 所示的简支梁为例,研究其内力所作的功。结构在载荷作用下,各截面的内力一般是不相同的,我们从梁中任取一微段 dS 来研究,如图 1-5(b) 所示。在左端面上作用的内力有轴力 N ,弯矩 M 和剪力 Q ,右端面作用的力为 $N + dN$, $M + dM$, 和 $Q + dQ$ 现考察轴力 $N + dN$ 的实功,假设与其相对应的位移增量为 du ,则其实功为 $dW_N = \frac{1}{2}(N + dN)du = \frac{1}{2}Ndu + \frac{1}{2}dNdu$ 。



(a)

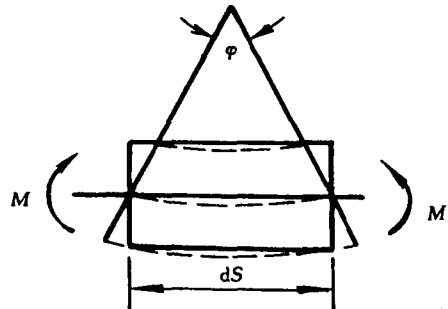


(a)



(b)

图 1-5



(b)

图 1-6

由于 $dNdu$ 是比 Ndu 高一阶的微量,即二阶微量,在线弹性问题的计算中,通常只计算到一阶微量而将二阶微量忽略不计,于是有

$$dW_N = \frac{1}{2} Ndu \tag{1-5}$$

这表明在计算轴力 N 作功时,将其增量 dN 忽略不计。关于计算 M, Q 作功时,也是如此。下面分别论述 N, M 和 Q 所作的实功。

(1) 轴力所作的实功

由图 1-6(a) 可见,微段在轴力 N 作用下,所产生的轴向变形,由材料力学公式可知

$$du = \frac{NdS}{EA} \quad (1-6)$$

上式中, E 为弹性模量, A 为截面面积, 于是有

$$dW_N = \frac{1}{2} Ndu = \frac{1}{2} \frac{N^2 dS}{EA} \quad (1-7)$$

(2) 弯矩所作的实功

由图 1-6(b) 可见, 微段在弯矩 M 作用下, 两端截面将产生相对转角, 由材料力学知

$$d\varphi = \frac{MdS}{EI} \quad (1-8)$$

上式中, I 为截面对中性轴的惯性矩。于是可得弯矩所作的实功为

$$dW_M = \frac{1}{2} Md\varphi = \frac{1}{2} \frac{M^2 dS}{EI} \quad (1-9)$$

(3) 剪力所作的实功

如图 1-7(a) 所示, 微段在剪力作用下, 将产生剪切变形, 由于截面上的剪力 τ 分布是不均匀的, 所以不能很快地算出它所做的功。

在微段 dS 两端横截面上, 距主轴为 y 处平行于 z 轴分别取面积为 dA 的窄条来研究。在窄条上所受到的剪力为

$$\tau dA = \frac{QS}{Ib} dA \quad (1-10)$$

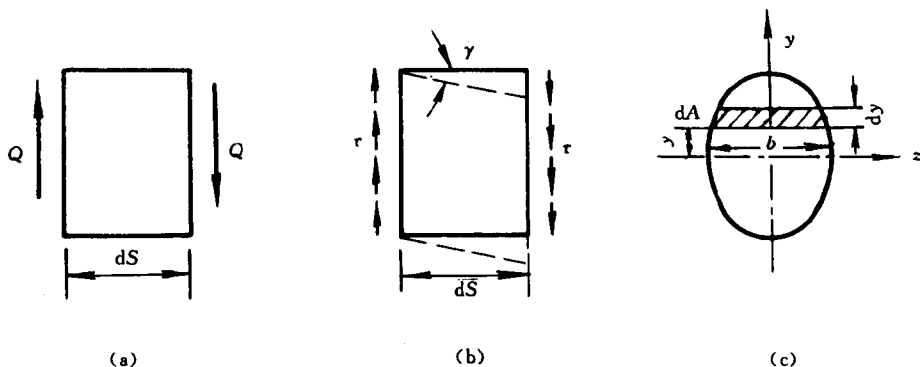


图 1-7

上式中, S 为窄条以上部分(图 1-7c)截面对 z 轴的静矩。用 γ 表示窄条的剪切角, 两窄条的相对位移为

$$\gamma dS = \frac{\tau}{G} dS \quad (1-11)$$

上式中, G 为材料的剪切模量。

作用于微面积 dA 上的剪力在它引起的位移上所作的实功为

$$\frac{1}{2} \tau dA \gamma dS \quad (1-12)$$

将上式在整个截面 A 内进行积分, 则可得到剪力 Q 在微段 dS 上所做的功为

$$dW_Q = \int_A \frac{1}{2} \tau dA \cdot \gamma dS = \frac{1}{2} \int_A \frac{\tau^2}{G} dA dS \quad (1-13)$$

将材料力学中的儒拉夫斯基公式:

$$\tau = \frac{QS}{Ib} \quad (1-14)$$

代入到式(1-13),得

$$dW_Q = \frac{1}{2G} \int_A \frac{Q^2 S^2}{I^2 b^2} dA dS = \frac{Q^2 dS}{IGI^2} \int_A \frac{S^2}{b^2} dA = k \frac{Q^2 dS}{2GA} \quad (1-15)$$

上式中, $k = \frac{A}{I^2} \int_A \frac{S^2}{b^2} dA$, 是与截面形状有关的系数。对于矩形截面, $k = 1.2$; 对于圆形截面, $k = 1.18$ 。关于矩形截面的情况, 今证明如下:

$$k = \frac{A}{I^2} \int_A \frac{S^2}{b^2} dA = \frac{A}{I^2} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \frac{S^2}{b^2} b dy = \frac{A}{I^2} \cdot \frac{1}{b} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} S^2 dy$$

$$S = \int_y^{\frac{h}{2}} y b dy = \frac{b}{2} \left(\frac{h^2}{4} - y^2 \right)$$

$$k = \frac{A}{I^2} \cdot \frac{1}{b} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} S^2 dy = \frac{A}{I^2} \cdot \frac{b}{4} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \left(\frac{h^2}{4} - y^2 \right)^2 dy = \frac{Ab}{4I^2} \left(h^4 y - \frac{1}{b} h^2 y^3 + \frac{y^5}{5} \right) \Big|_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} = \frac{72}{60} = 1.2$$

我们仅限于讨论直杆的情况。对于直杆, N, M 和 Q 三个力中的任何一个力都不在其他两个力的方向上引起变形, 所以, N, M 和 Q 三个力在微段上作功的时候, 彼此互不影响, 可以将它们各自所作的功叠加起来。于是, N, M 和 Q 在微段 dS 上所作的总功为

$$dW = dW_N + dW_M + dW_Q = \frac{N^2 dS}{2EI} + \frac{M^2 dS}{2EI} + k \frac{Q^2 dS}{2GA} \quad (1-16)$$

对于整个结构来说, N, M 和 Q 都是内力, 因此, 将 dW 沿每一杆件长度积分, 并将各杆的积分总和起来, 就得到整个结构内力所做的功, 即

$$W = \sum \int \frac{N^2 dS}{2EA} + \sum \int \frac{M^2 dS}{2EI} + \sum \int \frac{Q^2 dS}{2GA} \quad (1-17)$$

上式中, W 表示整个结构的内力实功, $\sum$ 表示结构的各构件的总和。有两点需要说明: ① 结构内力实功总是负的, 因为结构内力总是在与它相反方向的位移上作功; ② 对于大多数结构, 通常只考虑式(1-17) 右端的前两项, 而对第三项忽略不计。但对于短而粗的杆件, 第三项不能忽略, 必须计及剪切的效应。

1.2.3 变形位能

弹性结构受到外力作用而发生变形时, 其内部将积蓄能量且具有作功的本领, 我们把这种能量称为变形位能或变形势能, 也称为应变能。总之, 它是由于弹性变形而生成的能量。以图 1-8 所示的简支梁为例, 在载荷作用下, 沿 P 方向将产生位移 Δ , 这样, P 在自身产生位移 Δ 方向上作了外力实功 T 。如果将 P 逐渐移去, 梁会作出同样大小的功而恢复原状, 这是由于梁在外力作用下发生变形时, 积蓄了变形位能 U , 当载荷移去时, 该变形位能又以作功的形式释放出来。如果略去微小的能量损失, 例如克服内部摩擦形成的热量等, 根据能量守恒定律, 可以认为外力所做的功 T 全部转化为变形位能, 即

$$T = U \quad (1-18)$$

梁在载荷 P 作用下, 也将同时产生内力和变形, 因而内力也将在其相应的变形上作内力实功 W , 因此, 内力实功也等于变形位能 U , 即

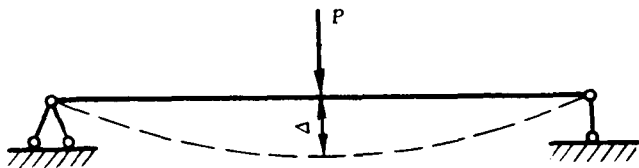


图 1-8
 $W = U$

(1-19)

比较式(1-19)与式(1-18)可得

$$T = W \quad (1-20)$$

上式表明外力的实功和内力的实功在数值上相等。上式称为弹性结构的实功原理,或称为实功方程。

上述的实功方程还可以从动能变化定理推演得到。理论力学中的动能变化定理表示为

$$T_2 - T_1 = W_{12}^{\text{外}} + W_{12}^{\text{内}} \quad (1-21)$$

上式表明,当系统由状态 1 转到状态 2 时,动能的改变等于外力和内力做功之和。为简单起见,将上式写为

$$T_2 - T_1 = W^{\text{外}} + W^{\text{内}} = T + W \quad (1-22)$$

应该指出,内力的功恒为负值,而外力的功恒为正值,于是可将上式写成

$$T_2 - T_1 = |T| - |W| \quad (1-23)$$

注意到载荷是沉静地、缓慢地施加,因此,开始时即状态 1 时,结构各点的速度为零,因而 $T_1 = 0$ 。同理,终止时即状态 2 时,动能也等于零。于是有

$$0 - 0 = |T| - |W|, |T| = |W| \quad (1-24)$$

这就证明了式(1-20),外力实功的数值 = 内力实功的数值,即实功原理

§ 1.3 虚功和虚功方程

1.3.1 虚功,实功和虚功的区别

在上节中所论述的功,都是外力(或内力)在自身引起的位移上所作的功,称之为实功,可是还有另外一种功,它的位移不是由做功的外力(或内力)所引起的,外力(或内力)也不是由零逐渐增大到最后数值,现以图 1-9 为例来说明。首先在杆端逐渐施加外力 P_1 ,如图 1-9(a) 所示,杆件伸长了 Δ_1 ,最后达到平衡状态, P_1 在其本身位移上作了实功 $\frac{1}{2} P_1 \Delta_1$ 。如果在第一组力达到平衡状态以后,又逐渐施加第二组力 P_2 ,如图 1-9(b) 所示,杆件又伸长了 Δ_2 ,显然第二组力在其本身引起的位移上作了实功 $\frac{1}{2} P_2 \Delta_2$ 。

值得注意的是:第一组外力 P_1 已存在于杆件上,在第二组力所引起的位移 Δ_2 上, P_1 将继续做功,它的大小为

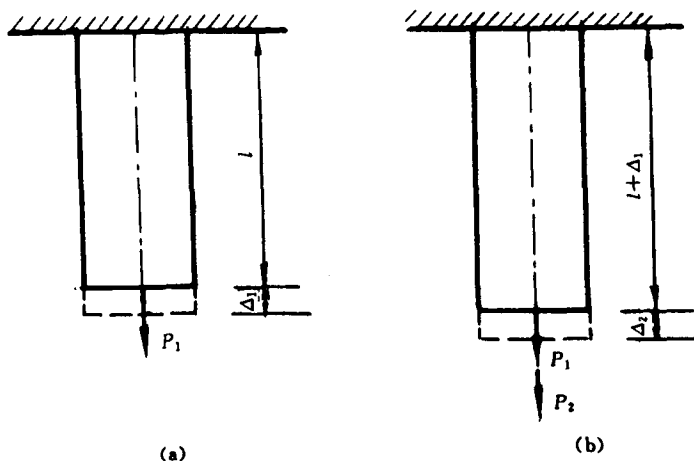


图 1-9

$$T_{12} = P_1 \Delta_2 = P_1 \frac{P_2 l}{AE} \quad (1-25)$$

T_{12} 中的第一个脚标表示作功的力(第一组力 P_1),第二个脚标表示产生位移的原因(即由第二组力引起的位移)。我们称 T_{12} 是虚功,又称为可能功。为了更好地对虚功进行理解,这里将虚功和实功作一比较。

(1) 实功是指力在自身所引起的位移上所作的功,而虚功则是力在其他原因所引起的位移上所作的功。

(2) 实功的计算公式有系数 $\frac{1}{2}$,虚功的计算公式则没有。这是由于作虚功时,力不是由零逐步增大到最后值而是始终保持常量的缘故。

(3) 实功之值恒为正,虚功之值可能为正,也可能为负。其正负号按以下原则确定:若位移和作功的力方向一致时,虚功为正,反之为负。上面仅通过特殊的例子(只有轴向力和轴向位移作虚功),介绍了虚功的基本概念。下面进一步对虚功和虚功方程作一般性的介绍。

1.3.2 虚功方程

如图 1-10 所示的简支梁,在第一组外力作用下,最后达到了平衡状态。在 P_1 的作用点沿 P_1 方向上产生了位移 Δ_{11} ,这里, Δ_{11} 的第一个脚标表示位移发生的地点和方向,即此位移是 P_1 的作用点沿 P_1 方向上的位移。第二个脚标表示位移的原因,即此位移是由于 P_1 的作用而引起的。外力 P_1 在其位移 Δ_{11} 上所作的实功的数值为

$$T_{11} = \frac{1}{2} P_1 \Delta_{11} \quad (1-26)$$

同时,由第一组外力 P_1 所引起的第一组内力,也将在其本身引起的变形上作了内力实功 W_{11} ,按实功方程式(1-20), W_{11} 的数值应等于外力实功的数值,即

$$T_{11} = W_{11} \quad (1-27)$$

当第一组外力 P_1 作用在梁上, 达到平衡状态后, 又有第二组外力 P_2 作用于梁上, 在 P_2 方向上又发生了位移 Δ_{22} , 最后梁又达到新的平衡状态, P_2 在位移 Δ_{22} 上所作的外力实功为

$$T_{22} = \frac{1}{2} P_2 \Delta_{22} \quad (1-28)$$

同样, 由第二组外力所引起的内力, 也将在其本身所引起相应的变形上作内力实功 W_{22} , 根据虚功方程式(1-20), 有

$$T_{22} = W_{22}$$

此外, 在 P_2 加载过程中, P_1 已作为常量作用于梁上。由于 P_2 的作用, 使 P_1 的作用点沿 P_1 方向又增加了新的位移 Δ_{12} , 此时, P_1 将继续做功, 其值为 $T_{12} = P_1 \Delta_{12}$ 。 T_{12} 称之为外力的虚功。显然, 新的位移 Δ_{12} 是在 P_1 的作用点及其方向上, 但产生位移的原因不是力 P_1 而是力 P_2 。

同样, 在 P_2 的加载过程中, 由 P_1 引起的第一组内力也将第二组内力所引起相应的变形上继续做功, 称之为内力虚功, 用 W_{12} 表示。这样, 两组外力先后作的总功为

$$T_{11} + T_{12} + T_{22} = T$$

而两组内力先后作的总功为

$$W_{11} + W_{12} + W_{22} = W$$

根据动能变化定理, 有

$$T_2 - T_1 = T + W \quad (1-29)$$

由于是静力学问题, 因此, 动能 $T_2 = T_1 = 0$, 于是上式变为

$$T + W = 0 \quad (1-30)$$

上式中, 外力总功 T 恒为正值, 内力总功 W 恒为负值, 由式(1-30)可见, 外力总功与内力总功在数值上相等, 即

$$T = W$$

或写为

$$T_{11} + T_{12} + T_{22} = W_{11} + W_{12} + W_{22} \quad (1-31)$$

由于

$$T_{11} = W_{11}, \quad T_{22} = W_{22} \quad (1-32)$$

将式(1-32)代入式(1-31), 得到

$$T_{12} = W_{12}$$

上式称为虚功原理, 它表明, 第一组外力在第二组外力所引起的位移上所作的外力虚功等于第一组内力在第二组内力所引起的变形上所作的内力虚功。

为了便于以后的应用, 把第一组外力 P_1 作用于梁上达到的平衡状态称为第一状态, 把第二组外力作用于梁上达到的平衡状态称为第二状态, 如图 1-11 所示。由于所加的两组力是彼此独立无关的, 所以, 可以把图 1-10 分成上述两个状态, 这样, 虚功原理可以叙述为: 第一状态的外力和内力在第二状态相应的位移和变形上所作的外力虚功和内力虚功相等。

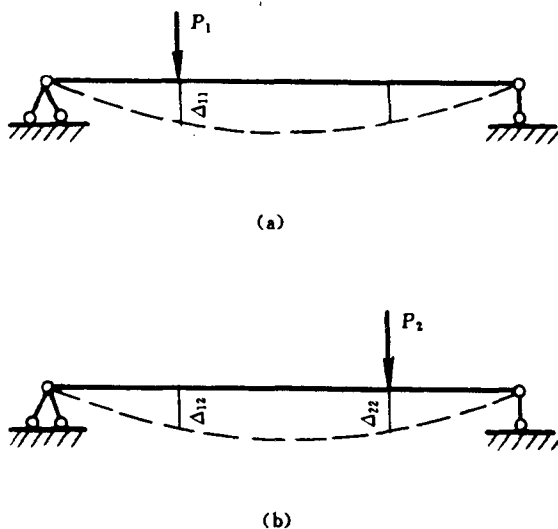


图 1-11

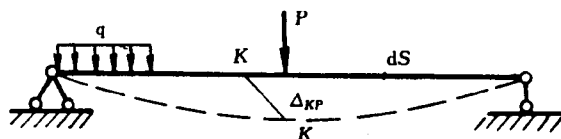
在实际应用上,两个状态中常有一个是虚拟的,所作的功 T_{12} 和 W_{12} 不是实在的,因而把式(1-33)称为虚功方程更恰当,以后,不论是计算静定结构,还是计算超静定结构,虚功方程(1-33) 均将得到广泛的应用。

§ 1.4 载荷作用下的位移计算

1.4.1 再论外力的虚功和内力的虚功

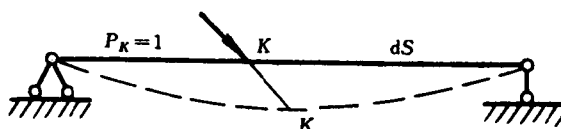
下面来论述如何运用虚功原理来推导结构在载荷作用下的位移计算公式。

设有静定梁如图 1-12(a) 所示,在任意载荷作用下,引起了虚线所示的变形,现计算梁上任一点 K 沿某一方向 $K-K$ 的位移 Δ_{KP} 的大小。



(a) 实际状态(第二状态)

这一问题可以应用以上的虚功方程来解决。只要建立两个状态:即力状态和位移状态,便可达到。图 1-12(a) 所示是梁在实际载荷作用下达到平衡状态并产生了真实的位移,简言之,图 1-12(a) 所表示的是真实位移状态。为了和上节相对应,称之为第二状态。此外,还需要建立另一个力状态,可以通过在同一梁上,在点 K 并沿 $K-K$ 方向加上一单位力 $P_K = 1$,如图 1-12(b) 所示,称它为第一状态,这个状态是虚拟的,是为了运用虚功方程而假设的,称它为虚拟状态。这样一来,第一状态的外力和内力(虚设的),在第二状态上的位移和变形(真实的) 上所作的虚功分别为



(b) 虚拟状态(第一状态)

图 1-12

这个状态是虚拟的,是为了运用虚功方程而假设的,称它为虚拟状态。这样一来,第一状态的外力和内力(虚设的),在第二状态上的位移和变形(真实的) 上所作的虚功分别为

(1) 外力的虚功

$$T_{12} = P_K \Delta_{KP} = 1 \times \Delta_{KP} = \Delta_{KP} \quad (1-34)$$

(2) 内力的虚功

计算内力虚功时,可以从结构上取出一微段 dS 来研究,如图 1-12 所示。在第一状态 $P_K = 1$ 作用下,微段 dS 的内力分别用 $\bar{N}$ (轴力), $\bar{Q}$ (剪力) 及 $\bar{M}$ (弯矩) 来表示(均为虚力)。而在第二状态真实外载荷 P 及 q 作用下,微段 dS 受到的内力为 N_P (轴力), Q_P (剪力) 及 M (弯矩),它们均为真实力,在它们的作用下产生的相应变形为 du_P , $\gamma_P dS$, 以及 $d\varphi_P$, 它们均为真实变形。由 1-2 可知,这些变形为

$$du_P = \frac{N_P dS}{EA}; \gamma_P dS = K \frac{Q_P dS}{GA}; d\varphi_P = \frac{M_P dS}{EI} \quad (1-35)$$

于是,内力虚功为

$$\begin{aligned} W_{12} &= \sum \int \bar{N} du_P + \sum \int \bar{M} d\varphi_P + \sum \int \bar{Q} \gamma_P dS \\ &= \sum \int \frac{\bar{N} N_P}{EA} dS + \sum \int \frac{\bar{M} M_P}{EI} dS + \sum K \int \frac{\bar{Q} Q_P}{GA} dS \end{aligned} \quad (1-36)$$

这里,值得指出的是,在理论力学教程中,曾提及虚功原理,那里的虚功是真实力与虚位移的乘积,而我们这里的虚功是虚力和真实位移的乘积,这说明我们已经将虚功的概念作了推广。功是力与位移的乘积,只要力和位移中任意一个是虚的,我们就称它为虚功。虚功和实功除了上述的重要区别以外,还有一个区别,就是系数 $\frac{1}{2}$,实功在力与位移乘积上还乘上系数 $\frac{1}{2}$,而虚功则没有。在理论力学中,称虚功原理为虚位移原理,这里可将虚功原理称为虚力原理。

1.4.2 位移计算公式

由虚功方程 $T_{12} = W_{12}$ 可得

$$\Delta_{KP} = \sum \int_0^l \frac{\bar{N}N_P dS}{EA} + \sum \int_0^l \frac{\bar{M}M_P dS}{EI} + \sum K \int_0^l \frac{\bar{Q}Q_P dS}{GA} \quad (1-37)$$

上式是计算平面杆系结构位移的一般公式。这一公式对于静定结构或超静定结构均适用。应用该公式,可计算在载荷作用下结构上任一点沿某一方向的位移。应用式(1-37) 计算位移的步骤如下:

(1) 在结构上选择适当的坐标原点,列出已知载荷所引起的内力 N_P, M_P 和 Q_P 的算式。

(2) 建立虚拟状态,在所求位移的地点和方向上施加一个单位力 $P_K = 1$,请注意这是广义力,它必须和所求的位移二者的乘积为功。若求线位移,就需要施加一集中力。若求角位移,则需要施加一个力偶。

(3) 应用同一坐标原点,列出假想单位力所引起的内力 $\bar{N}, \bar{M}$ 和 $\bar{Q}$ 的算式。

(4) 将(1)和(3)所得的各内力计算式代入式(1-37),沿每一杆进行积分,并将各积分总加起来,最后便得到需要求的位移 Δ_{KP} 。

应该注意,实际状态载荷作用下的内力 N_P, M_P 和 Q_P 以及单位力作用下的内力 $\bar{N}, \bar{M}$ 和 $\bar{Q}$ 均带有正负号,它们相乘时, N_P, M_P 和 Q_P 与其相应的 $\bar{N}, \bar{M}$ 和 $\bar{Q}$ 的符号一致时为正,反之为负。

在应用位移公式(1-37)时,根据结构的具体情况可进行简化。

(1) 对于主要是受弯的结构,例如普通的梁和刚架,主要计算弯曲的作用,可以将剪切和轴力的影响忽略,于是式(1-37)简化为

$$\Delta_{KP} = \sum \int_0^l \frac{\bar{M}M_P dS}{EI} \quad (1-38)$$

(2) 若杆件只受轴力作用,同时,每一杆件的 EA 也是常数,例如一般的桁架结构,式(1-37)可简化为

$$\Delta_{KP} = \sum \int_0^l \frac{\bar{N}N_P}{EA} dS = \sum \frac{\bar{N}N_P}{EI} \int_0^l dS = \sum \frac{\bar{N}N_P l}{EA} \quad (1-39)$$

(3) 对于同时有受弯构件和受轴力的杆件,例如桁梁混合结构,公式(1-37)应写为

$$\Delta_{KP} = \sum \int_0^l \frac{\bar{M}M_P}{EI} dS + \sum \frac{\bar{N}N_P l}{EA} \quad (1-40)$$

(4) 对于既受弯曲又受剪切的杆件,例如短而粗的梁,这时,除弯曲以外,剪切不能忽略,式(1-37)应写为

$$\Delta_{KP} = \sum \int_0^l \frac{\bar{M}M_P}{EI} dS + \sum K \int_0^l \frac{\bar{Q}Q_P}{GA} dS \quad (1-41)$$

在结构中,受弯的杆件只计算弯矩一项,例如式(1-38),对于桁架杆件,只计算轴力一项,例如式(1-39)。

[例 1-1] 试求出图 1-13(a) 所示的刚架 A 点的水平位移及垂直位移。刚架的 $EI =$ 常数。

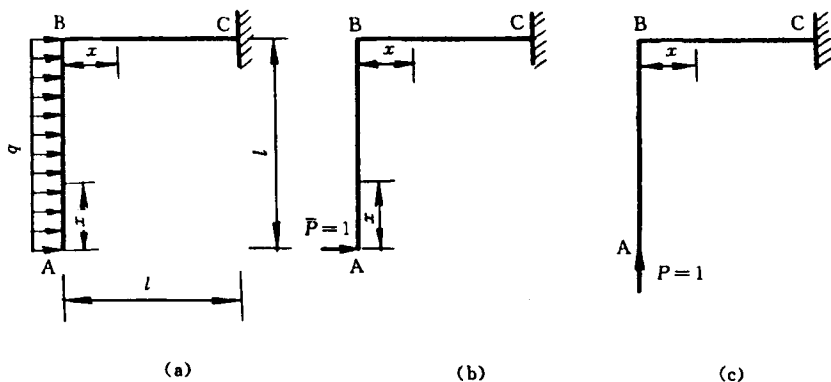


图 1-13

解 略去轴力和剪力的影响,只计算弯矩一项。

(1) 实际载荷作用下的状态为刚架的实际状态,见图 1-13(a),各杆的弯矩方程为

$$\text{AB 段} \quad M_P = -\frac{qx^2}{2}$$

$$\text{BC 段} \quad M_P = -\frac{ql^2}{2}$$

刚架弯矩的正负号是这样规定的:使刚架内侧受拉为正弯矩,使刚架外侧受拉为负弯矩。例如 AB 段和 BC 段的弯矩使得外侧受拉,故为负。

(2) 求 A 点水平位移时,可在刚架 A 点加上一水平单位力 $\bar{P} = 1$ 作为虚拟状态,如图 1-13(b) 所示。各杆内力为

$$\text{AB 段} \quad \bar{M} = -\bar{P}x = -x, \text{BC 段} \quad \bar{M} = -l$$

因为 AB 段和 BC 段的弯矩都是外侧受拉,故为负。

将 M_P 和 $\bar{M}$ 代入式(1-38),有

$$\Delta_{Ax} = \sum \int_0^l \frac{\bar{M}M_P}{EI} dS = \int_0^l \left(-\frac{qx^2}{2}\right)(-x) \frac{dx}{EI} + \int_0^l \left(-\frac{ql^2}{2}\right)(-l) \frac{dx}{EI} = \frac{5ql^4}{8EI}$$

计算结果为正,表示实际位移 Δ_{Ax} 和所虚拟的单位力方向一致,即向右。

(3) 求 A 点垂直位移时,在 A 点施加竖直单位力 $\bar{P} = 1$ 作为虚拟状态,如图 1-13(c) 所示。各杆内力为

$$\text{AB 段} \quad \bar{M} = 0, \quad M_P = -\frac{qx^2}{2}$$

$$\text{BC 段} \quad \bar{M} = x, \quad M_P = -\frac{ql^2}{2}$$

于是

$$\Delta_{Ay} = \sum \int_0^l \frac{\bar{M}M_P}{EI} dS = \int_0^l \frac{\left(-\frac{qx^2}{2}\right) \times 0}{EI} dx + \int_0^l x \left(-\frac{ql^2}{2}\right) \frac{dx}{EI} = -\frac{ql^4}{4EI}$$

计算结果为负,表示实际位移 Δ_{Ay} 和所设虚拟的单位力的方向相反,应向下。