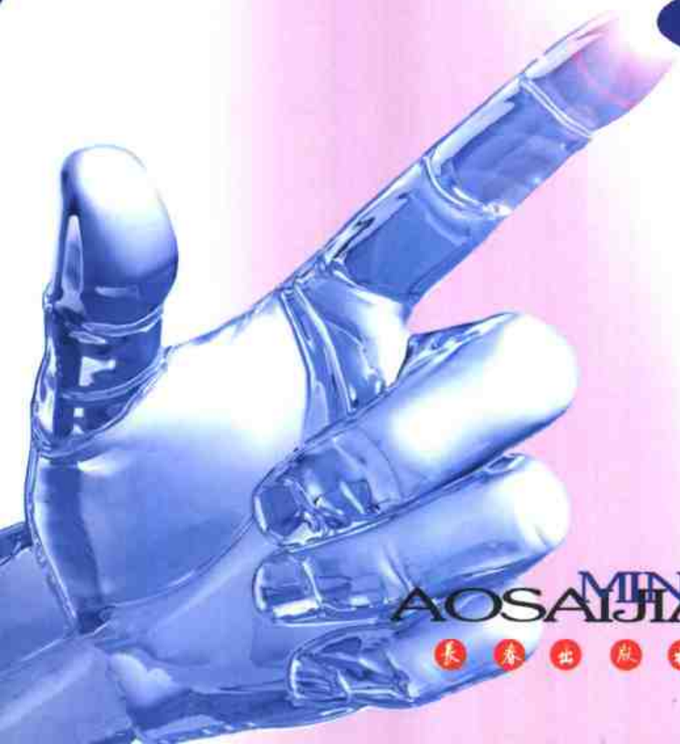
名师辅导

奥赛教程

总主编 单墫 / 前国家数学奥赛教练组组长
国家数学奥林匹克代表队领队

初中数学



MINGSHIFUDAO
AOSAIJIAOCHENG

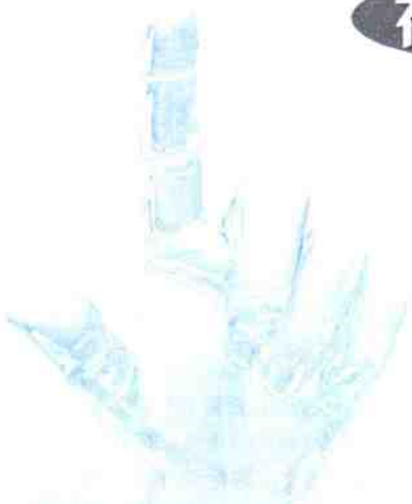
长春出版社

名师辅导

奥赛教程

总主编/单 墫 副总主编/孙夕礼 本册主编/潘娉姣

初中数学



MINGSHIFUDAO
AOSAIJIAOCHENG

长春出版社

图书在版编目(CIP)数据

名师辅导奥赛教程/初中数学/单墫总主编：—长春：长春出版社，2003.6
ISBN 7-80664-534-9

Ⅰ.名... Ⅱ.单... Ⅲ.数学课-初中-教学参考资料 Ⅳ.G634

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2003)第 042010 号

责任编辑：杨爱萍　　封面设计：尹小光

长春出版社出版
(长春市建设街 1377 号)
(邮编 130061　电话 8569938)
长春博文印刷厂照排室制版
长春市新世纪印业有限公司印刷
新华书店经销
880 毫米×1230 毫米　32 开本　13 印张　500 千字
2003 年 7 月第 1 版　2003 年 7 月第 1 次印刷
印数：1—10 000 册　定价：18.80 元

名师辅导

奥赛教程

初中数学

编委会

总 主 编：单　墫

副总主编：孙夕礼

本册主编：潘娉姣

编　　委：张爱平　施镇新

苏泰盛　赵启麟

孙祥雨　何炳钧

冯惠愚　居　燕

总主编

单　墫

南京师范大学教授、博士生导师。曾任国家数学奥林匹克竞赛委员会教练组组长，国家数学奥林匹克代表队领队，著名数学奥赛教练。

副总主编

孙夕礼

南京市教研室化学教研员，中学高级教师，南京市优秀青年教师。江苏省奥赛、国家奥赛优秀指导教师，江苏省化学奥赛高级教练。

本册主编

潘娉姣

中学高级教师，江苏省数学特级教师，江苏省著名数学奥赛教练。

编写说明

全国中学生各学科奥林匹克竞赛是当前我国在青少年中开展素质教育的最高层次的学科知识竞赛。它注重能力的考核，内容广泛，命题新颖，思路开阔，对学生创新能力的培养和发散思维的训练具有极强的指导作用。近几年的全国各省市初中奥赛试题，都强调了紧扣新课标要求，与初中教学内容相结合的命题特点。这些试题命题精巧，难度适中，接近中考各科中、高档试题的难度，命题特色也与中考大体相同。因此掌握奥赛试题的解题思路和答题技巧，不但对参加奥校、奥赛学有余力的同学培养冲刺竞赛奖牌的能力很有帮助，就是对一般学生补充深化课本知识、开拓思维、冲刺中考也大有裨益。

为此我们编写了这套《名师辅导奥赛教程》丛书，本书具有以下特点：

1. 权威性

丛书总主编单墫为国家著名奥赛教练员，南京师范大学教授，博士生导师。曾任国家数学奥赛教练组组长，中国数学奥林匹克代表队领队。全书所有参加编写的人员都是国家、省级奥赛优秀教练员，有着丰富的奥赛指导经验和奥赛图书编写经验，他们指导的学生在国内外各种竞赛中都取得了优异的成绩。

2. 系统性

本书不同于一般的竞赛试题汇编和单纯的方法讲解，而是将所学内容按知识点结构归纳整理，由浅入深、循序渐

进。读者通过对一个个知识点的学习，由点及面即可系统掌握所学内容。

3. 全面性

(1)能力培养全。本书对学生的思维能力、实验能力、观察检测能力、想象能力、自学能力等多方面能力进行培养训练，全面开发学生智力。(2)题型收录全。本书类型齐全，覆盖面广，全书悉数收入各科竞赛的热点题、开放题、经典题、与STS联系题，以拓宽学生视野，开拓学生思路。(3)解答提示全。本书不但对精选的典型例题有详尽的分析解答，对一般习题也有详尽的解答提示，便于学生自学、自测。

4. 实用性

本书各章节编排与初中教学内容同步，编排科学、体例新颖。全书均设有(1)知识·规律·方法。归纳知识要点，总结一般规律，提炼基本方法。(2)范例·解析·拓展。精选典型范例，深入分析讲解，纵向思维拓展。(3)检测·反馈·提高。选编一定量的与本章内容密切相关、难度适中、有较好区分度的习题，检测知识掌握情况，提高解题能力。(4)思路·点拨·详解。为师、生讲解练习之用，附详细解题过程，点拨思路、指导方法，每份试题实际上就是名师的辅导。书后所附的模拟试题是在认真研究了近几年全国各学科奥赛试题的指导思想、命题特点、题型配置的基础上精心设计的，供学生在复习训练结束时自我检测。

本书要特别感谢南京教研室的孙夕礼先生，能将这么多优秀的奥赛教练员组织到一起编写出这套奥赛指导用书，孙夕礼先生功不可没。

限于我们的水平，书中疏漏之处恐难避免，恳请各位读者批评指正。

本书编者

目 录

第1章　实　数

第一单元　整数的基本知识

知识·规律·方法

1. 数的十进制表示

在社会劳动实践中，人类根据需要创造了多种进位制的计数方法，如二进制、十进制、十六进制等．在计算机中的二进制只有两个数码 0、1，日常生活中的十进制有 0、1、2、3、4、5、6、7、8、9 十个数码，按照满十进一的原则，表示一切整数．例如十进制数 $N=\overline{a_na_{n-1}\cdots a_2a_1a_0}=a_n\times10^n+a_{n-1}\times10^{n-1}+\cdots+a_2\times10^2+a_1\times10+a_0$ 或表示为 $N=10\times\overline{a_na_{n-1}\cdots a_2a_1}+a_0$．

2. 数的整除性

对于两个整数 a、b $(b\neq0)$，若存在一个整数 n，使 $a=bn$ 则称 b 整除 a 或 a 被 b 整除，记作 $b\mid a$；若 b 不整除 a，记作 $b\nmid a$.

3. 规律与方法

(1) 若 $a\mid b$，$b\mid c$，则 $a\mid c$；

(2) 若 $c\mid a$，$c\mid b$ 则 $c\mid ma+nb$，特别地，$c\mid a-b$，$c\mid a+b$；

(3) 若 $a+b=c+d$，$e\mid a$，$e\mid b$，$e\mid c$，则 $e\mid d$；

(4) 若 $b\mid a$，$c\mid a$，则 $[b,\ c]\mid a$；

(5) 若 $b\mid a$，$c\mid a$，且 $(b,\ c)=1$，则 $bc\mid a$；

(6) 若 $c\mid ba$，$(a,\ c)=1$，则 $c\mid b$；

(7) 若 $a\neq b$，n 为自然数，则 $a-b\mid a^n-b^n$；

(8) 若 $a\neq-b$，n 为正偶数，则 $a+b\mid a^n-b^n$；若 $a\neq-b$，n 为正奇数，则 $a+b\mid a^n+b^n$.

4. 整数整除性的特征

(1) 被 2 整除的特征：个位数字是偶数；

(2) 被 5 整除的特征：个位数字是 0 或 5；

(3) 被 4 整除的特征：末两位数能被 4 整除；被 25 整除的特征：末两位数能被 25 整除；

解析　$A\times100+\overline{ab}$，所以$\overline{ab}$能被 4，25 整除即可.

(4) 被 8 整除的特征：末三位数能被 8 整除；被 125 整除的特征：末三位数能被

125 整除；

解析 $A\times1000+\overline{abc}$，所以$\overline{abc}$能被 8，125 整除即可.

(5) 被 3 整除的特征：各位数字的和被 3 整除；被 9 整除的特征：各位数字的和能被 9 整除.

解析 $\overline{abcd}=a\times1000+b\times100+c\times10+d=9(111a+11b+c)+a+b+c+d$

$9\mid\overline{abcd}\Leftrightarrow9\mid a+b+c+d$.

(6) 能被 11 整除的特征：奇位数字的和与偶位数字的和之差能被 11 整除；

解析 $\overline{abcd}=1000a+100b+10c+d$

$=1001a+99b+11c-a+b-c+d$

$\therefore11\mid\overline{abcd}\Leftrightarrow11\mid a-b+c-d$.

(7) 能同时被 7、11、13 整除的特征：奇位千进位的总和与偶位千进位的总和之差能被 7 或 11 或 13 整除.

范例·解析·拓展

例 1 若一个首位数字为 1 的六位数$\overline{1abcde}$乘以 3 所得的是一个末位为 1 的六位数$\overline{abcde1}$，求原来的六位数.

解析 *方法一* 观察算式

$$\begin{array}{r}\overline{1abcde}\\ \times3\\ \hline \overline{abcde1}\end{array},$$

因为 3 只有乘以 7，其积的末位数字为 1，所以 $e=7$，且进于十位，这说明 3 乘以 d 得到一个末位数字为 5 的整数，所以 $d=5$，且进于百位，用这种方法依次推算下去，可得六位数为 142857.

这种方法需要有较强的观察、分析、推理能力.

方法二 设$\overline{abcde}=x$，$\overline{1abcde}=1\times10^5+\overline{abcde}=10^5+x$，$\overline{abcde1}=10x+1$，所以 $3(10^5+x)=10x+1$，解得 $x=42857$，所以原来的六位数为 142857.

这种方法用整数的十进制表示方法，运用方程的思想解决问题，思路清晰.

拓展一 一个数的末位数字为 7，若将 7 移到头一位去，其它数字的顺序不变，则所得的新数是原数的 7 倍，求该数中的最小者.

答案提示 设原数为$\overline{a_na_{n-1}\cdots a_2a_17}$，$x=\overline{a_na_{n-1}\cdots a_2a_1}$，则原数为 $10x+7$，新数为 $10^n\cdot7+x$，得 $10^n\cdot7+x=7(10x+7)$，于是数 $700\cdots0$ 被 69 除，遇到的第一个余数为 49 的数，计算得到 $x=101449275362318840579$，所求的最小数是 1014492753623188405797.

拓展二 试确定最小的正整数 n，其末位数字为 6，若将末位数的 6 移作首位数字，则为原数的 4 倍.

答案提示 设 n 是 k 位数，

$n=\overline{a_ka_{k-1}\cdots a_26}$，

$\therefore n=\overline{a_k a_{k-1}\cdots a_2}\times 10+6$，$4n=\overline{6a_k a_{k-1}\cdots a_2}=6\times 10^{k-1}+\overline{a_k a_{k-1}\cdots a_2}$，

设 $x=\overline{a_k a_{k-1}\cdots a_2}$，则

$4(10x+6)=6\times 10^{k-1}+x$

$39x=6(10^{k-1}-4)$

则 $x=\dfrac{2(10^{k-1}-4)}{13}$. $\because (2,13)=13\mid 10^{k-1}-4$，

依次取 $k=2,3,4,5,6$，

得 6，96，996，9996，99996，只有 99996 能被 13 整除.

$\therefore x=15384$，$n=15384\times 10+6=153846$.

例 2 求证：三个连续自然数的积能被 6 整除.

解析 设三个连续自然数是 $n-1$，n，$n+1$（$n\geqslant 2$），要证 $6\mid(n-1)n(n+1)$. 因为 $6=2\times 3$，$(2,3)=1$，所以只要证 $2\mid(n-1)n(n+1)$ 且 $3\mid(n-1)n(n+1)$，而两个连续自然数必有偶数，三个连续自然数中一定有 3 的倍数，所以得证.

拓展 **有 n 个整数，其积为 n，其和为 0，求证：$4\mid n$.**

答案提示 设 n 个整数为 a_1、a_2，…，a_n，依题意得 $a_1a_2\cdots a_n=n$，$a_1+a_2+\cdots+a_n=0$. 假设 n 为奇数，则所有的 a_i 为奇数，但奇数个奇数的和为奇数与和为 0 矛盾，所以 n 只能是偶数，则 a_i 中必有一个偶数，由 $a_1+a_2+\cdots+a_n=0$ 知 a_i 必有另一个偶数，所以 $4\mid n$.

例 3 若 x，y 均为整数，$5\mid x+9y$，则 $5\mid 8x-7y$.

解析 $\because (8x+7y)+2(x+9y)=5(2x+5y)$，

$5\mid 2(x+9y)$，$5\mid(2x+5y)$

$\therefore 5\mid 8x+7y$.

拓展一 **已知 $7^{82}+8^{161}$ 能被 57 整除，则 $7^{83}+8^{163}$ 也能被 57 整除.**

答案提示 因为：$7^{83}+8^{163}=(7^{82}+8^{161})\times 7-7\times 8^{161}+8^{163}=7(7^{82}+8^{161})+57\cdot 8^{161}$，所以 $7^{83}+8^{163}$ 也能被 57 整除.

拓展二 **对任意自然数 n，证明：$3\times 5^{2n+1}+2^{3n+1}$ 能被 17 整除.**

答案提示 $3\times 5^{2n+1}+2^{3n+1}=15\times 5^{2n}+2\times 2^{3n}$

$=15\times 5^{2n}+2\times 5^{2n}-2\times 5^{2n}+2\times 2^{3n}$

$=17\times 5^{2n}-2(25^n-8^n)$.

$\because 25-8\mid 25^n-8^n$，$17\mid 25^n-8^n$

所以 $3\times 5^{2n+1}+2^{3n+1}$ 能被 17 整除.

拓展三 **设 n 是自然数，试证：$120\mid n(n^2-1)(n^2-5n+26)$.**

答案提示 $120=1\times 2\times 3\times 4\times 5n(n^2-1)(n^2-5n+26)$

$=n(n^2-1)(n^2-5n+6)+20n(n^2-1)$

$=(n-3)(n-2)(n-1)n(n+1)+20(n-1)n(n+1)$

$\because 120\mid(n-3)(n-2)(n-1)n(n+1)$，$6\mid(n-1)n(n+1)$

$\therefore 120\mid(n-3)(n-2)(n-1)n(n+1)+20(n-1)n(n+1)$

$\therefore 120 \mid n(n^2-1)(n^2-5n+26)$.

例4　九位数 32＊35717＊能被 72 整除，其中每一个＊代表一个数码，求这个九位数.

解析　设九位数 $x=\overline{32a35717b}$，若 x 能被 72 整除，则一定能被 8 和 9 整除. 若被 9 整除，则 $3+2+a+3+5+7+1+7+b$ 能被 9 整除，所以 $a+b=8$ 或 17；若被 8 整除，则 $\overline{17b}$ 能被 8 整除，则 $b=6$，因此 $a=2$，$x=322357176$.

拓展一　能被 33 整除的六位数 $\overline{19xy87}$ 的个数是多少？

答案提示　能被 33 整除的数一定能被 3 整除，也能被 11 整除.

即满足 $\begin{cases}1+9+x+y+8+7=3k\\1-9+x-y+8-7=11m\end{cases}$

$\begin{cases}x+y=3k-25\\x-y=11m+7\end{cases}$

因为 $0\leqslant x\leqslant 9$，$0\leqslant y\leqslant 9$，$\therefore 0\leqslant x+y\leqslant 18$，$-9\leqslant x-y\leqslant 9$，于是 $x+y$ 可取 2，5，8，11，14，17，$x-y$ 可取 -4，7，检查组成的十二个二元一次方程组，满足条件的解有 $\begin{cases}x=2\\y=6\end{cases}$，$\begin{cases}x=5\\y=9\end{cases}$，$\begin{cases}x=9\\y=2\end{cases}$，故本题答案是 3.

拓展二　证明由数字 0、1、2、3、4、5 组成的不重复六位数不可能被 11 整除.

答案提示　设组成的六位数是 $\overline{a_5a_4a_3a_2a_1a_0}$，若能被 11 整除，则 $a_0-a_1+a_2-a_3+a_4-a_5=11n$，（$n$ 为整数）

$a_0+a_1+a_2+a_3+a_4+a_5=11n+2(a_1+a_3+a_5)$

由 $a_0+a_1+a_2+a_3+a_4+a_5=15$，$\therefore 2(a_1+a_3+a_5)=15-11n$

$\therefore n=-1$，$a_1+a_3+a_5=13$，不符题意（最大 $3+4+5=12$）

$n=0$，$2(a_1+a_3+a_5)=15$，不符题意（左偶右奇）

$n=1$，$a_1+a_3+a_5=2$，不符题意（最小 $0+1+2=3$）

n 为其他整数也不可能，故结论成立.

或 $(0+1+2)-(3+4+5)\leqslant 11n\leqslant(3+4+5)-(0+1+2)$，

$-9\leqslant 11n\leqslant 9$，$\therefore n=0$.

拓展三　用 0，1，2，3，…，9 这十个不同的数字组成能被 11 整除的十位数，求出这类数中的最大者和最小者.

答案提示　先求能被 11 整除的最大十位数.

设十位数的五位奇数位的数字和为 x，五位偶数位的数字和为 y，所以 $x+y=45$.

又由能被 11 整除的数的特征，$x-y$ 能被 11 整除，$|x-y|=0$，11，22，又因为 $x+y$ 是奇数，所以 $x-y$ 也是奇数，所以 $|x-y|=11$，由此得出 $x=28$，$y=17$，或 $x=17$，$y=28$.

为了排出最大的十位数，在前几位数字尽量取 9，8，7，6.

若前四位数为 9876，则 $9+7=16$，$8+6=14$，可知 $x\neq 17$，只有 $x=28$，$y=17$.

所以除 9，7 外，另三位奇数位的数字和是 $28-16=12$；除 8，6 外，另三位偶数位

的数字和为 $17-14=3$，所以偶数位的数字只能取 2，1，0，从而奇数位的数字取 5，4，3．由此得到的能被 11 整除的最大的十位数是 9876524130．

同样的方法得到最小的十位数是 1024375869．

例 5 证明整数 A 能被 13 整除的条件是：划去个位数后所得的数加个位数的 4 倍能被 13 整除．

解析 设 A 的个位数为 b，划去个位数后所得的数是 k，则 $A=10k+b$，划去个位数后所得的数加个位数的 4 倍所得的数是 $A'=k+4b$．就要证明若 $A'=k+4b$ 是 13 的倍数，则 A 也是 13 的倍数．$\because A-10A'=10k+b-10k-40b=-39b$，

即 $A=10A'-39b$，所以若 $13\mid A'$，则 $13\mid A$．

拓展一 若 a，b，c，d 是互不相等的整数且整数 x 满足等式

$(x-a)(x-b)(x-c)(x-d)-9=0$

证明：$4\mid a+b+c+d$．

答案提示

$\because (x-a)(x-b)(x-c)(x-d)=9$

$9=1\times3\times(-3)\times(-1)$

$(x-a)$，$(x-b)$，$(x-c)$，$(x-d)$

是互不相同的整数，

$\therefore x-a$，$x-b$，$x-c$，$x-d$ 的值是 1，-1，-3，3，

$\therefore (x-a)+(x-b)+(x-c)+(x-d)=0$，

$\therefore a+b+c+d=4x$，

$\therefore 4\mid a+b+c+d$．

拓展二 **在体育彩票销售活动中，若买到的奖券的六位数号码前三位与后三位数字完全相同，则可以得到大奖，试证明得奖的奖券的号码能被 13 整除．**

答案提示 设中奖的奖券的号码为 $A=1000a+a$，所以 $A=1001a$，$1001=11\times13\times7$，故 A 是 13 的倍数．

拓展三 **173__是个四位数，在这个空格处先后填入 3 个数字，所得的 3 个四位数，依次被 9、11、6 整除，求先后填入的 3 个数字的和是多少？**

答案提示 解此题的关键是，怎样的自然数能被 9，11，6 整除？其中能被 6 整除的数是能被 3 整除的偶数．

因为能被 9 整除的数的各位数字的和能被 9 整除，$1+7+3=11$，所以应填入 7．

能被 11 整除的数的奇数位的和与偶数位的和的差是 11 的倍数，设填入 x，则 $7+x-1-3=3+x$ 是 11 的倍数，所以 $x=8$．

能被 3 整除的数的各位数字的和能被 3 整除，因为 $1+7+3+x=11+x$，故 $x=4$（x 只能为偶数）．$x=8$ 不合条件，舍去．

例 6 三个连续奇数的平方和加 1，能被 12 整除，但不能被 24 整除．

解析 设三个连续的奇数是

$2n-1$，$2n+1$，$2n+3$，则 $(2n-1)^2+(2n+1)^2+(2n+3)^2+1=12(n^2+n+1)$

$\because n^2+n+1=n(n+1)+1$ 是奇数，所以 $12(n^2+n+1)$ 能被 12 整除，不能被 24 整除.

拓展　证明对一切整数 n，$n^2+2n+12$ 不是 121 的倍数.

答案提示　因为 $n^2+2n+12=(n+1)^2+11$，若 $121 \mid (n+1)^2+11$，则一定有 $11 \mid (n+1)^2+11$，$\therefore 11 \mid (n+1)^2$. $\because 11$ 是质数，$11^2 \mid (n-1)^2$，所以 $121 \mid 11$，这是不可能的，故结论成立.

检测·反馈·应用

一、选择题

1. 一个六位数，如果它的前三位数码与后三位数码完全相同，顺序也相同，则此六位数可以被(　　)整除

A. 111　　B. 1000　　C. 1001　　D. 1111

2. 在十进制表示的数中，若个位数字和百位数字互换时，该数不变，这些数中存在一个最大的偶三位数，这个偶三位数的数字之和为(　　)

A. 23　　B. 24　　C. 25　　D. 26

3. 从 1 到 1000 的整数中，能被 5 整除或能被 7 整除的数有(　　)个

A. 316　　B. 314　　C. 342　　D. 344

4. 下列各数中能被 9 整除的数是(　　)

A. 60847　　B. 3514　　C. 31196　　D. 71235

5. 已知五位数 $\overline{4x97x}$ 能被 3 整除，它的最末两个数字组成的两位数能被 6 整除，则 x 所代表的数字是(　　)

A. 2 或 6　　B. 2 或 8　　C. 4 或 6　　D. 4 或 8

6. 设 p 是任意三个相邻的正奇数的积，则能整除所有这样的 p 的最大整数是(　　)

A. 15　　B. 6　　C. 5　　D. 3

7. 已知 m 是被 3 除余 1，被 7 除余 5，被 11 除余 4 的最小自然数，则 m 被 4 除余(　　)

A. 0　　B. 1　　C. 2　　D. 3

8. 设六位数 $N=\overline{x1527y}$ 是 4 的倍数，且 N 被 11 除余 5，那么 $x+y$ 的值为(　　)

A. 8　　B. 9　　C. 10　　D. 11

二、填空题

9. 五位数 $\overline{abcde}$ 是 9 的倍数，其中 $\overline{abcd}$ 是 4 的倍数，那么 $\overline{abcde}$ 的最小值是________.

10. 若自然数 n 的各位数字之和为 527，则 n 的最小值是________.

11. 一个两位数被 7 除余 1，如果交换它的十位与个位数字的位置，所得的两位数被 7 除余 1，那么这样的两位数有________个，它们是________.

12. 今天是星期天，从今天算起，第$\underbrace{111\cdots1}_{2000个}$天是星期______.

13. 七位数$\overline{62xy427}$（$x\neq0$）能被 99 整除，则$\overline{xy}$=_______.

14. 用 6、7、8、9 四个数字组成的各位数字互不相同的四位数中能被 11 整除的数有_______个.

三、解答题

15. 设四位数$\overline{abcd}=25c^2+10c+1$，求该四位数.

16. 已知 p 为大于 3 的质数. 求证：$24\mid p^2-1$.

17. 证明：对每一个整数 x，多项式$\frac{1}{5}x^5+\frac{1}{3}x^3+\frac{7}{15}x$ 的值总是整数.

18. 设$\overline{xyz}$是一个三位数，且 $x+y+z=7$. 求证：当 $y=z$ 时，$\overline{xyz}$一定能被 7 整除，并且反过来也成立.

思路·点拨·详解

1. 依题意设六位数为$\overline{abcabc}$. 则$\overline{abcabc}=a\times10^5+b\times10^4+c\times10^3+a\times10^2+b\times10+c=a\times10^2(10^3+1)+b\times10(10^3+1)+c(10^3+1)=(a\times10^2+b\times10+c)(10^3+1)$，$(a\times10^2+b\times10+c)$ 是整数，所以能被 1001 整除，选 C.

2. 当百位数字与个位数字互换时，该数不变的偶三位数有：$2a2$，$4a4$，$6a6$，$8a8$，其中 a 为 0 到 9 中的任一数字，这些数中最大的是 898，其数字的和为 25，选 C.

3. 先求能被 5 整除的数有 5，10，15，…，1000 共 200 个；能被 7 整除的有 7，14，21，…，7×142 共 142 个；其中重复的有 35，70，…，35×28 共 28 个，依题意有 200+142−28=314 个，选 B.

4. 判断一个数能否被 9 整除，关键看它的各位数之和能否被 9 整除；

其中：6+8+4+7=25，3+5+1+4=13，3+1+1+9+6=20，7+1+2+3+5=18. 选 D.

5. 因为$\overline{4x97x}$能被 3 整除，所以 $3\mid4+x+9+7+x$，即 $3\mid20+2x$. 因为 2 与 3 互素，所以 $3\mid10+x$. 因为$\overline{7x}$能被 6 整除，一定能被 2 整除，所以 x 一定是偶数 0，2，4，6，8. 所以 x 只能取 2 或 8，选 B.

6. 设 $p=n(n+2)(n+4)=n(n+1+1)(n+2+2)=n(n+1)(n+2)+3n(n+2)$ 其中 n 为奇数. 因为 $n(n+1)(n+2)$ 能被 6 整除，$3n(n+2)$ 能被 3 整除，所以 p 能被 3 整除，选 D.

7. 可求出 $m=103$，m 被 4 除余 3，选 D.

8. 因为 N 是 4 的倍数，所以 $4\mid\overline{7y}$，$y=2$ 或 6. 因为 N 被 11 整除余 5，所以 $x+5+7-(1+2+y-5)$ 或 $x+5+7-(1+2+y+5)$ 是 11 的倍数. 所以 $x-y=-3$ 或 $x-y=8$. 可得 $x=3$，$y=6$. 所以 $x+y=9$，选 B.

9. 要求$\overline{abcde}$最小，$\overline{abcd}$也必须最小，且被 4 整除. 所以$\overline{abcd}$的最小是 1000，要补上一个末位数字 e 变为五位数，且是 9 的倍数，则这五个数字的和是 9 的倍数，所以补

上的只能是 8．所求的$\overline{abcde}$的最小数是 10008.

10．如果是两位数，数字之和最多是 18；如果是三位数，数字之和最多是 27；……如果是 58 位数，数字之和最多是 522，因此这个数一定是 59 位数．要使 n 最小，$n=5\underbrace{99\cdots9}_{58个9}$.

11．设十位数字为 x，个位数字为 y，并设 $10x+y=7m+1$，$10y+x=7n+1$．则有 $9(x-y)=7(m-n)$，可知 $x=y$ 或 $x-y=\pm7$．当 $x=y$ 时，$x=y=2$ 或 $x=y=9$；当 $x-y=7$ 时，$x=9$，$y=2$；当 $x-y=-7$ 时，$x=2$，$y=9$．共有 4 个，这样的两位数为 22、99、92、29.

12．因为 $111111=15873\times7$，$2000=333\times6+2$，所以$\underbrace{111\cdots1}_{2000个}$被 7 除的余数与 11 被 7 除的余数相同，而 11 被 7 除余数为 4，所以从今天算起，到第$\underbrace{111\cdots1}_{2000个}$天是星期三.

13．$99=9\times11$，所以$\overline{62xy427}$能被 9 和 11 整除．$9\mid6+2+x+y+4+2+7$ 即 $9\mid x+y+21$，$11\mid6+x+4+7-(2+y+2)$ 即 $11\mid13+x-y$.

设$\begin{cases}21+x+y=9h,\\13+x-y=11k.\end{cases}$得到$\begin{cases}x+y=9h-21,\\x-y=11k-13.\end{cases}$因为 $0<x+y\leqslant18$，$-9<x-y\leqslant9$，

所以$\begin{cases}0<9h-21\leqslant18,\ \dfrac{7}{3}<h\leqslant\dfrac{13}{3},\\-9<11k-13\leqslant9,\ \dfrac{4}{11}<k\leqslant2\end{cases}$所以 $h=3$，4．$k=1$，2.

由方程组解出$\begin{cases}x=\dfrac{1}{2}(9h+11k-34)\\y=\dfrac{1}{2}(9h-11k-8)\end{cases}$可以知道 h，k 同奇同偶.

所以$\begin{cases}h=3,\\k=1,\end{cases}$或$\begin{cases}h=4,\\k=2,\end{cases}$代入求出$\begin{cases}x=2,\\y=4,\end{cases}$或$\begin{cases}x=12,\\y=3.\end{cases}$（舍去），所以$\overline{xy}=24$.

14．8 个．因为能被 11 整除的数的奇数位数字和与偶数位数字的和之差能被 11 整除，而 $6+9=7+8$，差为 0，能被 11 整除．组成的四位数为 6798，6897，9768，9867，8976，8679，7986，7689.

15．$\overline{abcd}=25c^2+10c+1$，即

$a\times10^3+b\times10^2+10c+d=25c^2+10c+1$，$a\times10^3+b\times10^2-25c^2=1-d$.

所以 25 能整除 $1-d$．将 $d=1$ 代入上式得到 $c^2=4(b+10a)$，所以 c 是偶数，设 $c=2k$（k 是整数），则 $k^2=b+10a$，所以只有 $b=6$，$a=1$，$d=1$，$c=8$，$k=4$．所求的四位数是 1681.

16．因为 $24=3\times8$，且 3 与 8 是互质的．下面只要证明 $3\mid p^2-1$ 和 $8\mid p^2-1$.

先证明 $3\mid p^2-1$.

设 $p=3k+1$，或 $p=3k+2$.

当 $p=3k+1$ 时，$p^2-1=3(3k^2+2k)$，$3\mid p^2-1$；

当 $p=3k+2$ 时，$p^2-1=3(3k^2+4k+1)$，$3\mid p^2-1$.

再证明 $8\mid p^2-1$．因为 p 是大于 3 的质数，所以 p 是奇数，设 $p=2k+1$，$p^2-1=$

$4k(k+1)$，因为 $2\mid k(k+1)$，所以 $8\mid p^2-1$.

17. $\frac{1}{5}x^5+\frac{1}{3}x^3+\frac{7}{15}x=\frac{3x^5+5x^3+7x}{15}$. 其中 $3x^5+5x^3+7x$

$=3(x-2)(x-1)x(x+1)(x+2)+5(x-1)x(x+1)+15x+15x(x-1)(x+1)$，容易得到是 15 的倍数.

18. $\overline{xyz}=100x+10y+z=100(7-y-z)+10y+z=700-90y-99z$.

当 $y=z$ 时，$\overline{xyz}=700-189y$，结论成立；

当 $7\mid\overline{xyz}=7\mid 700-91y-98z-(y-z)$，所以 $7\mid y-z$. 再由 $x+y+z=7$ 知 $0\leqslant y<7$，$0\leqslant z<7$，$-7<y-z<7$，所以 $y-z=0$.

第二单元　奇数与偶数

知识·规律·方法

1. 奇数和偶数的概念

在整数中，能被 2 整除的数叫做偶数，不能被 2 整除的数叫做奇数. 偶数一般用 $2n$ 表示，奇数用 $2n-1$，$2n+1$ 表示（n 为整数）.

2. 奇数和偶数的性质

（1）奇数与偶数不可能相等；奇数±奇数＝偶数；

（2）奇数±偶数＝奇数；偶数±偶数＝偶数；

（3）奇数个奇数的和是奇数；偶数个奇数的和是偶数；

（4）若 a，b 为整数，则 $a+b$ 与 $a-b$ 有相同的奇偶性；

（5）两个连续的整数中，必有一个奇数，一个偶数；三个连续的整数中，至少有一个奇数，一个偶数；

（6）奇数×奇数＝奇数，奇数×偶数＝偶数，偶数×偶数＝偶数（4 的倍数）；

（7）若干个整数的积为奇数，则每一个数为奇数；若干个整数的积为偶数，则至少有一个偶数.

（8）奇数的平方为 $4k+1$ 型的数；偶数的平方为 $4k$ 型的数；

（9）n 个偶数的积必为 2^n 的倍数；

（10）若 n^2 为偶数，则 n 为偶数；若 n^2 为奇数，则 n 为奇数.

3. 奇偶数的特殊表示法

奇数与偶数是以被 2 除的余数为 1 和 0 进行分类的，这种分类只有两类，即用整数的两种状态研究整数. 在解题时可以用另外的两种状态来表示奇数与偶数. 如用红色代表奇数，黄色代表偶数，即用染色的方法研究奇数与偶数；用 0 代表偶数，1 代表奇数；或＋1 代表偶数，－1 代表奇数即赋值进行奇偶分析.