

大 學 用 書

應用數理統計學

顏 月 珠 著

三 民 書 局 印 行

應用數理統計學

顏 月 珠 著

現職：國立台灣大學講師

三 民 書 局 印 行

中華民國七十一年四月初版

應用數理統計學

基本定價柒元

版權
所有

編著者 顏 月 珠
發行人 劉 振 強
出版者 三民書局股份有限公司
印刷所 三民書局股份有限公司

臺北市重慶南路一段六十二號
郵政劃撥九九九八號

行政院新聞局登記證 局版臺字第〇二〇號

序

本書撰寫的目的，在確立數理統計學應用於解決實際問題的可行性和重要性。許多曾研讀過一般數理統計學者，碰到實際的問題或現象時，不知如何選擇適當的分析方法及解釋所得的數據。針對此，本書至少有以下的特點：

1. 每種分析方法使用的條件與限制，敘述極詳，分析步驟有條不紊，各方法下皆有實例配合，讓讀者有跡可循。

2. 迴歸分析及無母數統計方法兩章佔極大的篇幅，此乃因為這兩種分析方法是現代作決策最重要的工具之一。把近十數年來配合電腦發展的迴歸分析理論引進書中，讓讀者有最新理論與實務配合的觀念與知識。無母數統計方法發展的歷史極短，但其能適用於母體或現象不定、未知等情況，具有非常實用的特性，書中共介紹了二十餘種方法，能解決許多實際問題。

3. 為強調迴歸分析與無母數統計方法的重要及實用，在本書的最後附上著者所寫有關的臺灣實例研究。

著者受師長的教導、鼓勵與關愛，永銘於心，在此致上最至誠的謝意。又著者雖孜孜不倦，然以才力所限，本書不免有其疏漏之處，敬請先進方家多多指正。

顏 月 珠

民國七十一年四月

應用數理統計學 目次

序

第一章 隨機變數的分配

1-1	集合論的基本概念	1
1-2	機率集合函數	5
1-3	條件機率和獨立事件	9
1-4	隨機變數與機率分配	14
1-5	分配函數	16
1-6	數學期待值及其他平均數	18
1-7	變異數	23
1-8	Chebyshev 定理	26
1-9	動差母函數與動差	28
1-10	二元隨機變數的機率分配	35
1-11	結論	46
	參考書目	47

第二章 特殊機率分配

2-1	分立均等分配	50
2-2	Bernoulli 分配	51

2 應用数理統計學

2-3	二項分配	53
2-4	超幾何分配	58
2-5	Poisson 分配	62
2-6	幾何分配	67
2-7	負二項分配	69
2-8	多項分配	71
2-9	矩形分配	73
2-10	常態分配	76
2-11	Gamma 分配	85
2-12	指數分配	90
2-13	卡方分配	93
2-14	Beta 分配	96
2-15	Cauchy 分配	102
2-16	Weibull 分配	103
2-17	二元常態分配	105
2-18	結論	113
	參考書目	114

第三章 隨機變數函數的分配

3-1	抽樣分配	115
3-2	不連續隨機變數的轉換（或稱變換）	119
3-3	連續隨機變數的轉換	124
3-4	χ^2 、 t 與 F 分配	130
3-5	變數變換法的推廣	147

3-6	動差母函數法.....	153
3-7	$\bar{X}$ 分配及 $\frac{(n-1)\hat{s}^2}{\sigma^2}$ 分配.....	157
3-8	中央極限定理.....	162
3-9	結論.....	166
	參考書目.....	166

第四章 統計估計

4-1	點估計.....	167
4-2	最大概似法.....	185
4-3	區間估計.....	194
4-4	均數 μ 的估計.....	198
4-5	母體比例 p 的估計.....	205
4-6	母體變異數 σ^2 的估計.....	209
4-7	兩母體變異數比的區間估計.....	214
4-8	兩母體均數差的區間估計.....	217
4-9	兩母體比例差的區間估計.....	225
4-10	其他母數的估計問題.....	227
4-11	結論.....	231
	參考書目.....	231

第五章 統計檢定

5-1	統計檢定的意義.....	233
5-2	統計假設及檢定的要件.....	234

4 應用数理統計學

5-3	兩種錯誤及決策法則·····	237
5-4	母體均數 μ 的檢定·····	240
5-5	母體比例 p 的檢定·····	247
5-6	母體變異數 σ^2 的檢定·····	254
5-7	兩母體變異數比較的檢定·····	260
5-8	兩母體均數差的檢定·····	264
5-9	兩母體比例差的檢定·····	276
5-10	檢定力·····	281
5-11	最佳拒絕區·····	289
5-12	概似比檢定法·····	299
5-13	貝氏決策理論·····	308
5-14	結論·····	312
	參考書目·····	313

第六章 變異數分析

6-1	變異數分析與實驗設計的意義·····	315
6-2	一因子分類的變異數分析·····	319
6-3	一因子分類（完全隨機設計）的估計·····	330
6-4	多個變異數是否相等的檢定·····	337
6-5	二因子分類未重複試驗的變異數分析·····	341
6-6	二因子分類未重複實驗（或隨機化集區設計）的估計·····	350
6-7	二因子分類重複實驗的變異數分析·····	359
6-8	拉丁方格設計的變異數分析·····	365
6-9	拉丁方格設計的估計·····	369

6-10	樣本大小的決定	372
6-11	結論	374
	參考書目	375

第七章 迴歸分析

7-1	迴歸、相關的意義	377
7-2	簡單直線迴歸	378
7-3	直線迴歸母數的估計及檢定	385
7-4	預測	391
7-5	迴歸分析中的變異數分析	397
7-6	迴歸模型中 X 與 Y 變數關係程度的測度	404
7-7	迴歸之直線性的檢定	408
7-8	簡單迴歸分析的矩陣方法	412
7-9	多元迴歸與相關	417
7-10	相關係數的估計及檢定	440
7-11	多項式迴歸模型	444
7-12	其他的非直線型迴歸模型	453
7-13	虛設變數	458
7-14	線型重合	468
7-15	自變數最佳組合的搜尋	476
7-16	自身相關	488
7-17	迴歸模型在時間數列上的應用	505
7-18	結論	526
	參考書目	526

第八章 無母數統計方法

8-1	無母數統計方法的意義·····	529
8-2	統計估計——母體中位數 η 的估計·····	532
8-3	適合度檢定·····	534
8-3-1	χ^2 檢定法·····	534
8-3-2	Kolmogorov-Smirnov 檢定法·····	544
8-4	獨立性檢定·····	547
8-5	連檢定·····	549
8-6	一組樣本的符號檢定法·····	557
8-7	一組樣本的 Wilcoxon 符號等級檢定法·····	559
8-8	兩組有關樣本的符號檢定法·····	561
8-9	兩組有關樣本的 Wilcoxon 符號等級檢定法·····	563
8-10	中位數檢定法·····	567
8-11	Wilcoxon 兩樣本檢定法·····	572
8-12	Mann-Whitney 檢定法（檢定平均數）·····	575
8-13	Mann-Whitney 檢定法（檢定變異數）·····	584
8-14	Kolmogorov-Smirnov 兩樣本檢定法·····	585
8-15	Wald-Wolfowitz 連檢定法·····	587
8-16	極端反應檢定·····	591
8-17	Friedman 檢定法·····	593
8-18	中位數檢定法的推廣·····	596
8-19	齊一性檢定·····	599
8-20	Kruskal-Wallis 檢定法·····	600

8-21 Spearman 的等級相關	604
8-22 Kendall 的等級相關	608
8-23 結論	609
參考書目	612

實例研究

壹、臺灣主要森林遊樂區的遊樂需求分析	613
貳、臺灣主要風景區遊客人數的預測	636

常用統計附表

A. 常用對數	654
B. 常態分配機率表	656
C. 二項分配機率表	657
D. Poisson 分配機率表	662
E. 指數分配機率表	666
F. χ^2 分配表	667
G. t 分配表	668
H. F 分配表	670
I. r 與 Z_r 變換表	674
J. Durbin-Watson 檢定	675
K. 母體中位數區間估計的位次 r	677
L. Kolmogorov-Smirnov 一組樣本檢定	678
M. 連檢定的 r_L 及 r_u	681

8 應用数理統計學

N. Wilcoxon 檢定法 W 的臨界值	682
O. Wilcoxon 檢定之 $P_{r,0}(U \leq u H_0 \text{ 對})$	683
P. Wilcoxon 檢定法 U 的臨界值	686
Q. Kolmogorov-Smirnov 兩樣本檢定	688
R. Wald-Wolfowitz 連檢定	691
S. Friedman 檢定	692
T. Kruskal-Wallis 檢定	694

第一章 隨機變數的分配

統計學是科學方法的一支，是由度量或點計方法所獲得的資料，對母體特性加以探討，並能在不確定情況下做成決策的科學方法。「機率」(Probability) 一詞是日常生活的用語，它代表人們對未來某一事件發生與否的信賴程度，它是一種實際具有意義的表達方法。我們在從事物理、生物等自然現象或人文社會結構等社會現象之不能確定結果的觀察時，都必須用到機率的觀念，亦即機率論為在不確定情況下進行決策的工具，統計學所處理的問題即具有不確定性，因此統計學必須建立在機率論的基礎上，而集合論與機率論有密不可分的關係。

1-1 集合論的基本概念

集合論不但在現代數學上佔極重要地位，而且在應用科學的研究中運用極廣，故我們在講述數理統計學之前，應先予以闡明其有關名詞及運算定理。首先介紹名詞：

1. 集合 (Set)：一羣具有某一特定性質的元素 (Elements) 或點

2 應用數理統計學

(Points) 的聚集體。故所謂集合可視為有確定意義事物的集體，集合中的每一分子稱為元素，以 $x \in A$ 表示 x 為 A 集合的一個元素。

2. 空間 (Space): 在研究範圍內之所有元素或點組合的集合稱為空間，以 S 表示之。

3. 部份集合 (Subset): 若集合 A 之每一元素或點都屬於集合 B ，則稱集合 A 為集合 B 的部份集合或子集，以 $A \subset B$ (A 包含於 B) 表示之。

4. 空集合 (Empty Set): 不含任何元素或點的集合稱為空集合，以 ϕ 表示之。空集合 ϕ 為任一集合 A 的部份集合，且空集合具有唯一性 (Uniqueness)，意即空集合僅僅有一個而已。

5. 餘集合 (Complementary Set): 設 S 為空間， A 為其部份集合，則 A 的餘集合 (又稱補集) 為 S 中除去 A 所剩餘的部份，以 A' 表之，即 $A' = \{x; x \in S \text{ 與 } x \notin A\}$ 。

6. 相等集合 (Equal Sets): 若集合 A 為集合 B 的部份集合，同時集合 B 亦為集合 A 的部份集合，即 $A \subset B$ 及 $B \subset A$ ，則此兩集合稱為相等集合，以 $A = B$ 表示之。

7. 交集 (Intersection): 同時屬於 A 與 B 兩集合的共同元素或點所組成的集合，稱為 A 與 B 的交叉集合，簡稱交集，以 $A \cap B$ 表示之，即 $A \cap B = \{x; x \in A \text{ 與 } x \in B\}$ 。

8. 互斥集合 (Mutually Exclusive Sets): 若 A 與 B 兩集合無共同之元素或點存在，即 $A \cap B = \phi$ ，則稱 A 與 B 為互斥集合或分離集合 (Disjoint Sets)。

9. 聯集 (Union): 由 A 與 B 兩集合的全部元素或點所組成的集合，稱為 A 與 B 的相聯集合，簡稱聯集，以 $A \cup B$ 表示之，即 $A \cup B = \{x; x \in A \text{ 或 } x \in B\}$ 。

10. 相差集合 (Difference Set): 從集合 A 中除去集合 B 所剩餘的集合, 稱為 A 與 B 的相差集合, 以 $A-B$ 表示之, 即 $A-B = \{x; x \in A \text{ 但 } x \notin B \text{ 與 } x \in A \cap B\} = A \cap B'$ 。

效舉二例以闡明集合的意義, 再進一步說明集合的運算。

[例 1] 令 $A = \{(x, y); 0 \leq x+y \leq 1\}$ 及 $B = \{(x, y); 1 < x+y\}$, 求 $A \cap B$ 。

[解] $\because A = \{(x, y); 0 \leq x+y \leq 1\}, B = \{(x, y); 1 < x+y\},$
 $\therefore A \cap B = \phi$

[例 2] 令 $A_k = \{x; 0 < x < \frac{1}{k}\}, k=1, 2, 3, \dots$, 試求 $A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap \dots$ 。

[解] $\because A_1 = \{x; 0 < x < 1\}, A_2 = \{x; 0 < x < \frac{1}{2}\},$

$A_3 = \{x; 0 < x < \frac{1}{3}\}, \dots, \therefore A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap \dots = \phi$

所謂集合的運算, 係指求某數個集合的相聯、交叉及餘補 (Complementation) 而言, 集合的運算定理主要者如下: (各定理所用的集合都是同一空間 S 的部份集合)。

1. 交換律 (Commutative Laws)

$$(1) A \cup B = B \cup A$$

$$(2) A \cap B = B \cap A$$

2. 結合律 (Associative Laws)

$$(1) A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap C$$

$$(2) A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup C$$

4 應用数理統計學

3. 分配律 (Distributive Laws)

$$(1) A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

$$(2) A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

4. 轉移律 (Transitive Laws)

若 $A \subset B$ 及 $B \subset C$, 則 $A \subset C$ 。

5. 餘補律 (Complementative Laws)

$$(1) A \cup A' = S$$

$$(2) A \cap A' = \phi$$

$$(3) (A')' = A$$

6. 同一律 (Identity Laws)

$$(1) A \cup \phi = A$$

$$(2) A \cap S = A$$

$$(3) A \cup S = S$$

$$(4) A \cap \phi = \phi$$

7. 自交自聯不變律 (Idempotent Laws)

$$(1) A \cup A = A$$

$$(2) A \cap A = A$$

8. De Morgan 律 (De Morgan's Laws)

$$(1) (A \cup B)' = A' \cap B'$$

$$(2) (A \cap B)' = A' \cup B'$$

其推廣亦成立。

9. 其他運算定理

$$(1) A = (A \cap B) \cup (A \cap B')$$

$$[\text{證}] \quad A = A \cap S = A \cap (B \cup B') = (A \cap B) \cup (A \cap B')$$

$$(2) (A \cap B) \cap (A \cap B') = \phi$$

$$〔證〕 (A \cap B) \cap (A \cap B') = (A \cap A) \cap (B \cap B') = A \cap \phi = \phi$$

1-2 機率集合函數 (Probability Set Function)

令 X 與 Y 為兩個不一定相異的集合，則映 X 入 Y 的函數係指對應於 X 中的每一元素 x 可配予唯一的一個元素於 Y 中的一種法則，集合 X 稱為函數的定義域 (Domain)，而函數所配予的所有元素的集合 $\{y \in Y; y = f(x), x \in X\}$ 稱為函數的變域 (Range)。就一般而言，函數的變域小於 Y ，若函數的變域等於 Y ，則稱函數 f 為映 X 成 Y 的函數 (Function from X into Y)。

在指定的空間內求函數一點的解稱為點函數 (Point Function)，就整個點集合求解的函數稱為集合函數 (Set Function)。

茲舉數例以闡明之。

〔例 3〕 設 (1) $f(x) = 2x, -\infty < x < \infty$, (2) $h(x_1, x_2, \dots, x_n) = 3x_1x_2 \dots x_n, 0 \leq x_i \leq 1, i = 1, 2, 3, \dots, n$, 試求 $f(x)$ 在 $x=1$ 的解與 $h(x_1, x_2, \dots, x_n)$ 在 $x_1, x_2, \dots, x_n$ 皆等於 1 的解。

$$〔解〕 (1) x=1, \therefore f(x) = 2(1) = 2$$

$$(2) x_1, x_2, \dots, x_n = 1,$$

$$\therefore h(x_1, x_2, \dots, x_n) = 3(1)(1) \dots (1) = 3$$

〔例 4〕 令 A 表一度空間的集合， $Q(A)$ 表示在 A 中對應於正整數的數目，則若 (1) $A = \{x; 0 < x < 5\}$, (2) $A = \{x; x = -2, -1\}$, (3) $A = \{x; -\infty < x < 6\}$, 試求 $Q(A)$ 。

$$〔解〕 (1) Q(A) = 4$$

$$(2) Q(A) = 0$$