大 學 用 書

應用數理統計學

顏 月 珠 著

三民書局印行

應用數理統計學

顏 月 珠 著

現職：國立台灣大學講師

三 民 書 局 印 行

行政院新聞局登記證局版臺業字第〇二〇〇號

中華民國七十一年四月初版

應用數理統計學

基本定價柒元

編著者　顏月珠

發行人　劉振強

出版者　三民書局股份有限公司

印刷所　三民書局股份有限公司
臺北市重慶南路一段六十一號

郵政劃撥九九九八號

序

本書撰寫的目的，在確立數理統計學應用於解決實際問題的可行性和重要性。許多曾研讀過一般數理統計學者，碰到實際的問題或現象時，不知如何選擇適當的分析方法及解釋所得的數據。針對此，本書至少有以下的特點：

1. 每種分析方法使用的條件與限制，敍述極詳，分析步驟有條不紊，各方法下皆有實例配合，讓讀者有跡可循。

2. 迴歸分析及無母數統計方法兩章佔極大的篇幅，此乃因為這兩種分析方法是現代作決策最重要的工具之一。把近十數年來配合電腦發展的迴歸分析理論引進書中，讓讀者有最新理論與實務配合的觀念與知識。無母數統計方法發展的歷史極短，但其能適用於母體或現象不定、未知等情況，具有非常實用的特性，書中共介紹了二十餘種方法，能解決許多實際問題。

3. 為強調迴歸分析與無母數統計方法的重要及實用，在本書的最後附上著者所寫有關的臺灣實例研究。

著者受師長的教導、鼓勵與關愛，永銘於心，在此致上最至誠的謝意。又著者雖孜孜不倦，然以才力所限，本書不免有其疏漏之處，敬請先進方家多多指正。

顏　月　珠

民國七十一年四月

應用數理統計學　目次

序

第一章　隨機變數的分配

第二章　特殊機率分配

第三章 隨機變數函數的分配

第四章　統計估計

第五章　統計檢定

第六章　變異數分析

第七章　迴歸分析

第八章 無母數統計方法

實例研究

常用統計附表

第一章　隨機變數的分配

統計學是科學方法的一支，是由度量或點計方法所獲得的資料，對母體特性加以探討，並能在不確定情況下做成決策的科學方法。「機率」(Probability) 一詞是日常生活的用語，它代表人們對未來某一事件發生與否的信賴程度，它是一種實際具有意義的表達方法。我們在從事物理、生物等自然現象或人文社會結構等社會現象之不能確定結果的觀察時，都必須用到機率的概念，亦即機率論爲在不確定情況下進行決策的工具，統計學所處理的問題即具有不確定性，因此統計學必須建立在機率論的基礎上，而集合論與機率論有密不可分的關係。

1-1　集合論的基本概念

集合論不但在現代數學上佔極重要地位，而且在應用科學的研究中運用極廣，故我們在講述數理統計學之前，應先予以闡明其有關名詞及運算定理。首先介紹名詞:

1. 集合 (Set)：一羣具有某一特定性質的元素 (Elements) 或點

(Points) 的聚集體。故所謂集合可視爲有確定意義事物的集體，集合中的每一分子稱爲元素，以 $x \in A$ 表示 x 爲 A 集合的一個元素。

2. 空間 (Space)：在研究範圍內之所有元素或點組合的集合稱爲空間，以 S 表示之。

3. 部份集合 (Subset)：若集合 A 之每一元素或點都屬於集合 B，則稱集合 A 爲集合 B 的部份集合或子集，以 $A \subset B$（A 包含於 B）表示之。

4. 空集合 (Empty Set)：不含任何元素或點的集合稱爲空集合，以 ϕ 表示之。空集合 ϕ 爲任一集合 A 的部份集合，且空集合具有唯一性 (Uniqueness)，意即空集合僅僅有一個而已。

5. 餘集合 (Complementary Set)：設 S 爲空間，A 爲其部份集合，則 A 的餘集合（又稱補集）爲 S 中除去 A 所剩餘的部份，以 A' 表之，即 $A'=\{x;x\in S$ 與 $x\notin A\}$。

6. 相等集合 (Equal Sets)：若集合 A 爲集合 B 的部份集合，同時集合 B 亦爲集合 A 的部份集合，即 $A\subset B$ 及 $B\subset A$，則此兩集合稱爲相等集合，以 $A=B$ 表示之。

7. 交集 (Intersection)：同時屬於 A 與 B 兩集合的共同元素或點所組成的集合，稱爲 A 與 B 的交叉集合，簡稱交集，以 $A\cap B$ 表示之，即 $A\cap B=\{x;x\in A$ 與 $x\in B\}$。

8. 互斥集合 (Mutually Exclusive Sets)：若 A 與 B 兩集合無共同之元素或點存在，即 $A\cap B=\phi$，則稱 A 與 B 爲互斥集合或分離集合 (Disjoint Sets)。

9. 聯集 (Union)：由 A 與 B 兩集合的全部元素或點所組成的集合，稱爲 A 與 B 的相聯集合，簡稱聯集，以 $A\cup B$ 表示之，即 $A\cup B=\{x;x\in A$ 或 $x\in B\}$。

10. 相差集合 (Difference Set)：從集合 A 中除去集合 B 所剩餘的集合，稱爲 A 與 B 的相差集合，以 $A-B$ 表示之，即 $A-B=\{x;x\in A$ 但 $x\notin B$ 與 $x\notin A\cap B\}=A\cap B'$。

玆舉二例以闡明集合的意義，再進一步說明集合的運算。

〔例 1〕 令 $A=\{(x,y);0\leq x+y\leq 1\}$ 及 $B=\{(x,y);1<x+y\}$，求 $A\cap B$。

〔解〕 $\because$ $A=\{(x,y);0\leq x+y\leq 1\}$，$B=\{(x,y);1<x+y\}$，

$\therefore$ $A\cap B=\phi$

〔例 2〕 令 $A_k=\{x;0<x<\frac{1}{k}\}$，$k=1,2,3,\cdots$，試求 $A_1\cap A_2\cap A_3\cap\cdots\cdots$。

〔解〕 $\because$ $A_1=\{x;0<x<1\}$，$A_2=\{x;0<x<\frac{1}{2}\}$，

$A_3=\{x;0<x<\frac{1}{3}\},\cdots\cdots,$ $\therefore A_1\cap A_2\cap A_3\cap\cdots\cdots=\phi$

所謂集合的運算，係指求某數個集合的相聯、交叉及餘補 (Complementation) 而言，集合的運算定理主要者如下：（各定理所用的集合都是同一空間 S 的部份集合）。

1. 交換律 (Commutative Laws)

(1) $A\cup B=B\cup A$

(2) $A\cap B=B\cap A$

2. 結合律 (Associative Laws)

(1) $A\cup(B\cup C)=(A\cup B)\cup C$

(2) $A\cap(B\cap C)=(A\cap B)\cap C$

3. 分配律 (Distributive Laws)

(1) $A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$

(2) $A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$

4. 轉移律 (Transitive Laws)

若 $A\subset B$ 及 $B\subset C$, 則 $A\subset C$。

5. 餘補律 (Complementative Laws)

(1) $A\cup A'=S$

(2) $A\cap A'=\phi$

(3) $(A')'=A$

6. 同一律 (Identity Laws)

(1) $A\cup\phi=A$

(2) $A\cap S=A$

(3) $A\cup S=S$

(4) $A\cap\phi=\phi$

7. 自交自聯不變律 (Idempotent Laws)

(1) $A\cup A=A$

(2) $A\cap A=A$

8. De Morgan 律 (De Morgan's Laws)

(1) $(A\cup B)'=A'\cap B'$

(2) $(A\cap B)'=A'\cup B'$

其推廣亦成立。

9. 其他運算定理

(1) $A=(A\cap B)\cup(A\cap B')$

〔證〕 $A=A\cap S=A\cap(B\cup B')=(A\cap B)\cup(A\cap B')$

(2) $(A\cap B)\cap(A\cap B')=\phi$

〔證〕 $(A\cap B)\cap(A\cap B')=(A\cap A)\cap(B\cap B')=A\cap\phi=\phi$

1-2　機率集合函數 (Probability Set Function)

令X與Y為兩個不一定相異的集合，則映X入Y的函數係指對應於X中的每一元素x可配予唯一的一個元素於Y中的一種法則，集合X稱為函數的定義域 (Domain)，而函數所配予的所有元素的集合 $\{y\in Y;\ y=f(x), x\in X\}$ 稱為函數的變域 (Range)。就一般而言，函數的變域小於Y，若函數的變域等於Y，則稱函數f為映X成Y的函數 (Function from X into Y)。

在指定的空間內求函數一點的解稱為點函數 (Point Function)，就整個點集合求解的函數稱為集合函數 (Set Function)。

玆舉數例以闡明之。

〔例 3〕 設 (1) $f(x)=2x,\quad -\infty<x<\infty$, (2) $h(x_1,x_2,\cdots\cdots,x_n)=3x_1x_2\cdots\cdots x_n, 0\le x_i\le 1,\quad i=1,2,3,\cdots\cdots,n$, 試求 $f(x)$ 在 $x=1$ 的解與 $h(x_1,x_2,\cdots\cdots,x_n)$ 在 $x_1,x_2,\cdots\cdots,x_n$ 皆等於 1 的解。

〔解〕 (1) $x=1,\quad \therefore\ f(x)=2(1)=2$

(2) $x_1,x_2,\cdots\cdots,x_n=1,$

$$\therefore\ h(x_1,x_2,\cdots\cdots,x_n)=3(1)(1)\cdots\cdots(1)=3$$

〔例 4〕 令A表一度空間的集合，$Q(A)$ 表示在A中對應於正整數的數目，則若 (1) $A=\{x;0<x<5\}$，(2) $A=\{x;x=-2,-1\}$，(3) $A=\{x;-\infty<x<6\}$，試求 $Q(A)$。

〔解〕 (1) $Q(A)=4$

(2) $Q(A)=0$