与人教版九年义务教育初级中学教科书（最新修订本）同步

新教材课题研究中心

新教材解读

新思路　新理念　新方法　新题型

高中一年级
上册

主编：田祥高

数学

陕西师范大学出版社

新教材课题研究中心

新教材解读

高中一年级
上册

主编：田祥高
编者：田祥高 孔树礼 王泽胜 童卫东
杨旗国 胡清华 王建桃 江 伟
胡汉明 童修明

数学

陕西师范大学出版社

图书代号:JF3N0296

特邀编辑 洪 伟
责任编辑 李亚利
责任校对 陈常宝

新教材解读丛书
数 学(高中一年级上)
主 编 田祥高

出版发行	陕西师范大学出版社
社 址	西安市陕西师大120信箱(邮政编码:710062)
网 址	http://www.snuph.com
经 销	新华书店
印 制	国营五二三厂
开 本	880×1230 1/32
印 张	9.125
字 数	250千
版 次	2003年8月第1版
印 次	2003年8月第1次印刷
书 号	ISBN 7-5613-0731-4/G·526
定 价	10.80元

如有印装错误,请与承印厂联系、调换。

前言

《新教材解读》系列丛书与其他同类书相比，最突出的特点是新。

第一，教材新

丛书以人民教育出版社最新高中教材为蓝本编写，以国家教育部最新教学大纲为依据。

第二，理念新

首先突出新形势下新的教育理念。丛书从特色栏目“点燃思维火花”和“优生学法总结”中渗透了北京市、湖北省、江苏省、天津市、安徽省一代名师教育理念的变化，在学生生活经验基础上构建知识，让学生自己去寻找真理，从“学生身边的例事”展开课程，让课堂教学在师生互动中产生新知识。

第三，思路新

“掌握一种方法比做一百道题更有用。”丛书突出教给学生学习方法和新的思路。从特色栏目“重点难点解读”和“拓展延伸探究”中详细介绍各种类型的解题方法，思维受阻突破方法，知识灵活应用方法，思维拓展方法，研究性学习培养发散思维能力的方法，让学生在快乐轻松的学习中掌握全新的自主学习模式和方法。

第四，题目新

新型的活题训练是有效地培养学生思维的深刻性、灵活性、独创性、敏感性的重要手段之一。丛书大量题目是一代名师近期原创的新题、活题，注重知识“点”与“面”的联系、课堂内与课堂外的渗透，例题讲解透彻、独到、一题多问、一题多解，培养学生新的思路、新的想象、新的发现。

这套丛书尽管从策划、编写，再到出版精心设计，细致操作，可谓尽心尽力；尽管书中许多内容是作者长期教学实践和潜心研究的成果，但仍需要不断完善。不当之处，诚望广大读者指正。

●新教材课题研究中心　　2003.5

目录 CONTENTS

第1章 集合与简易逻辑

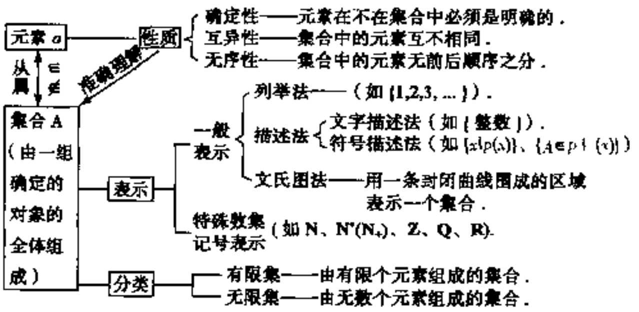
1.1 集　　合

启迪思维火花

在初中经常说到:"正数的集合"、"实数集"、"不等式的解集"……,这些语言也就是集合语言,而集合语言是现代数学的基本语言.那么什么是集合语言?用集合语言来表述问题又有哪些优点?它与其他语言之间又是如何进行转化的?

重点难点解读

重点讲解



难点突破

1. 用列举法表示集合时,必须注意如下几点:(1)元素与元素之间必须用","隔开;(2)集合的元素必须是明确的;(3)不必考虑元素出现的先后顺序;(4)集合的元素不能重复;(5)集合的元素可以表示任何事物;(6)对含有较多元素的集合,如果构成该集合的元素具有明显的规律,可用列举法表示,但是必须把元素间的规律显示清楚后,才能用省略号表示,如 $\mathbf{N}^*=\{1,2,3,\cdots,n,\cdots\}$.

2. 用形如 $\{x|p(x)\}$ 的描述法表示集合时需要注意的是:首先,要分清集合的代表元是

什么.如集合 $A=\{y|y=x^2-1,x\in\mathbf{R}\}$ 与 $B=\{(x,y)|y=x^2-1,x\in\mathbf{R}\}$ 中,A 的代表元是 y,而 y 满足"$y=x^2-1$ 且 $x\in\mathbf{R}$",因而 A 的元素是数;而 B 的代表元是 (x,y),是有序实数对.其次,要弄清集合到底由哪些元素组成,而不能被用来描述元素所具有的属性的字母所迷惑,如上例中,A 中的元素 y 所具有的属性是"$y=x^2-1$ 且 $x\in\mathbf{R}$",故 $y\geqslant-1$,即 A 是由大于或等于 -1 的实数所组成的集合;而在 B 中,尽管元素所具有属性仍然是"$y=x^2-1$ 且 $x\in\mathbf{R}$",但由于 B 中的代表元是有序实数对 (x,y),即直角坐标平面上的点,故 B 是由抛物线 $y=x^2-1$ 上的点所组成的集合.

课堂综合运用

例 1 下列所给的对象能否构成集合?

A. 一个平面内的所有的点　　B. 所有小于零的正数

C. 某校高一(2)班的高个子学生　　D. 某一天到某商场买过货的顾客

【解析】由集合的概念可知,组成集合的元素必须是明确的,而不能模棱两可.在 A 中对于任何一个点要么在这个平面内,要么不在这个平面内,因而它可以组成一个集合.在 B 中由于小于零的正数不存在,因此 B 也能组成一个集合,即空集.C 中由于"高个子"没有一个确定的标准,因而不能判定一个学生到底是不是高个子,故它不能组成集合.而 D 中对于任何一个顾客在这一天是否到过某商场,以及是否买过货是确定的,因此它也能组成一个集合.

【答案】A、B、D 可以组成集合;C 不能组成集合.

【点悟】一组对象能不能构成一个集合,关键是看这组对象是否是确定的,即对于任何一个对象要么在这一组中,要么不在,再没有其他的情况.

例 2 需要添加什么条件,才能使 $\{0,x,x^2-x\}$ 表示一个数集?

【解析】$\{0,x,x^2-x\}$ 能否表示一个数集,关键在于它是否具备集合的性质,在这里就只要看它是否满足互异性即可.故有 $x\neq0$ 且 $x^2-x\neq0$ 且 $x^2-x\neq x$,即 $x\neq0$ 且 $x\neq1$ 且 $x\neq2$.

【答案】$x\neq0$ 且 $x\neq1$ 且 $x\neq2$.

【点悟】(1)解集合问题时要有意识地利用集合的元素性质(特别是互异性与无序性)来解题.

(2)你能否求出实数 d 和 q,使两个集合 $\{a,a+d,a+2d\}$ 与 $\{a,aq,aq^2\}$ 的元素完全相同?

例3 用适当的方法表示下列集合：

(1)方程组$\begin{cases}2x-3y=14,\\3x+2y=8\end{cases}$的解集；

(2)1000以内被3除余2的正整数所组成的集合；

(3)直角坐标平面上在第二象限内的点所组成的集合；

(4)所有正方形；

(5)直角坐标平面上在直线$x=1$和$x=-1$的两侧的点所组成的集合.

【解析】所谓适当的表示方法，就是较简单、较明了的表示方法. 由于方程组$\begin{cases}2x-3y=14,\\3x+2y=8\end{cases}$的解为$\begin{cases}x=4,\\y=-2,\end{cases}$故(1)宜用列举法；(2)中尽管是有限集，但由于它的元素个数较多，所以用列举法表示是不明智的，故用描述法；(3)和(5)也宜用描述法；而(4)则宜用列举法为好.

【答案】(1)$\{(4,2)\}$；(2)$\{x|x=3k+2,k\in\mathbf{N}$且$x<1000\}$；(3)$\{(x,y)|x<0$且$y>0\}$；(4){正方形}；(5)$\{(x,y)|x<-1$或$x>1\}$.

【点悟】用描述法表示集合时，若需要多层次描述属性时，可选用逻辑连结词“且”与“或”等连结(如(3)和(5))；若描述部分出现元素记号以外的字母时，要对新字母说明其含义或指出其取值范围(如(2)).

拓展延伸探究

例1 下列命题：

(1)方程$\sqrt{2x-1}+|3y+3|=0$的解集是$\{\frac{1}{2},-1\}$；

(2)方程$x^2+x-6=0$的解集为$\{(-3,2)\}$；

(3)集合$M=\{y|y=x^2+1,x\in\mathbf{R}\}$与集合$P=\{(x,y)|y=x^2+1,x\in\mathbf{R}\}$表示同一个集合；

(4)方程组$\begin{cases}2x+y=0,\\x-y+3=0\end{cases}$的解集是$\{(x,y)|x=-1$或$y=2\}$；

(5)由所有的平行四边形组成的集合为{所有的平行四边形}.

其中属真命题的命题个数为 (　　)

A. 0　　B. 2　　C. 3　　D. 4

【解析】(1)中方程组的解为 $x=\frac{1}{2}, y=-1$,其解集应为有序实数对,而$\{\frac{1}{2},-1\}$的元素为$\frac{1}{2}$和-1,不是有序实数对,故(1)是假命题;(2)中一元二次方程的解集为实数,而不是有序实数对,故(2)也是假命题;(3)的 M 中的元素形式是实数,而 P 中的元素却是有序实数对,故(3)是假命题;(4)中元素(x,y)所具有的属性应该是 $x=-1$ 且 $y=2$,故(4)是假命题;而在(5)中,由于集合就是表示符合某种属性的全体,因此由所有的平行四边形组成的集合应表示成{平行四边形},即(5)是假命题.

【答案】A.

【点悟】本题将集合的符号语言转化为文字语言,或者将集合语言转化为自然语言,经过转化有助于对集合语言的理解,有助于弄清集合中到底含有哪些元素.因此要善于对这些语言进行相互转化.

例2 集合 $A=\{x\in \mathbf{R}|x=a+b\sqrt{2},a\in \mathbf{Z},b\in \mathbf{Z}\}$,判断下列元素 x 与集合 A 间的关系:(1)$x=0$;(2)$x=\frac{1}{\sqrt{2}-1}$;(3)$x=\frac{1}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$;(4)$x=x_1+x_2$(其中 $x_1\in A$, $x_2\in A$);(5)$x=x_1x_2$(其中 $x_1\in A,x_2\in A$).

【解析】先把 x 写成$a+b\sqrt{2}$的形式,再观察 a,b 是否为整数,便可判定 x 是否为 A 中的元素. (1)中,$\because x=0+0\sqrt{2}$,$\therefore x\in A$. (2)中,$\because x=\frac{1}{\sqrt{2}-1}=\sqrt{2}+1=1+1\sqrt{2}$,$\therefore x\in A$. (3)中,$x=\frac{1}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}=\sqrt{3}+\sqrt{2}$,而$\sqrt{3}\notin \mathbf{Z}$,$\therefore x\notin A$. (4)中,$\because x_1\in A,x_2\in A$,可设 $x_1=a_1+b_1\sqrt{2}$,$x_2=a_2+b_2\sqrt{2}$(a_1、b_1、a_2、b_2 均为整数),则 $x=x_1+x_2=(a_1+a_2)+(b_1+b_2)\sqrt{2}$,而 $a_1+a_2\in \mathbf{Z}$,$b_1+b_2\in \mathbf{Z}$,$\therefore x\in A$. (5)同(4)所设,则 $x=x_1x_2=(a_1+b_1\sqrt{2})(a_2+b_2\sqrt{2})=(a_1a_2+2b_1b_2)+(a_1b_2+a_2b_1)\sqrt{2}$,而 $a_1a_2+2b_1b_2\in \mathbf{Z}$,$a_1b_2+a_2b_1\in \mathbf{Z}$,$\therefore x\in A$.

【答案】(1)$x\in A$;(2)$x\in A$;(3)$x\notin A$;(4)$x\in A$;(5)$x\in A$.

【点悟】本题解题的关键在于对所描述的属性"$a+b\sqrt{2}$"的本质的理解.

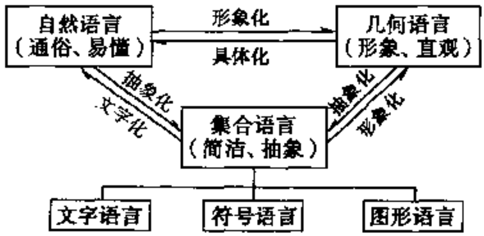
解题的易错点是从表面上来判定 x 是否具有属性"$a+b\sqrt{2}$",如(4)(5)如果不进行逻辑运算,就会得出错误的结论.

下面的问题你能解答吗?请试一试:已知集合 $M=\{m|m=a+b\sqrt{2},a、b\in \mathbf{Q}\}$,则下列元素属于集合 M 的元素个数是(　　).

①$m=1+\sqrt{2}\pi$;②$m=\sqrt{7+2\sqrt{12}}$;③$m=\frac{1}{2+\sqrt{2}}$;④$m=\sqrt{2-\sqrt{3}}+\sqrt{2+\sqrt{3}}$.

A. 0　　B. 1　　C. 2　　D. 3

优生学法总结



随堂能力测试

1. 在下列对象中能组成集合的是 ( )

①难解的题目;②方程 $x^2+1=0$ 的实数解;③直角坐标平面内第四象限的一些点;④很多多项式.

A. ② B. ①③ C. ②④ D. ①②④

2. 下列集合中表示同一个集合的是 ( )

A. $M=\{(3,2)\}, N=\{(2,3)\}$

B. $M=\{3,2\}, N=\{2,3\}$

C. $M=\{(x,y)|x+y=1\}, N=\{y|x+y=1\}$

D. $M=\{1,2\}, N=\{(1,2)\}$

3. 方程组 $\begin{cases}x+y=3,\\ xy=2\end{cases}$ 的解集表示为:①$\{1,2\}$;②$(1,2)$;③$\{(1,2)\}$;④$\{(1,2),(2,1)\}$.

其中正确的表示方法是 ( )

A. ①和② B. ①和③ C. ③和④ D. 仅④

4. 由实数 $x,-x,|x|,\sqrt{x^2},-\sqrt[3]{x^3}$ 所组成的集合,最多含 ( )

A. 2 个元素 B. 3 个元素

C. 4 个元素 D. 5 个元素

5. 集合 $A=\{x|x=2k_1,k_1\in\mathbf{Z}\}$,$B=\{x|x=2k_2+1,k_2\in\mathbf{Z}\}$,$C=\{x|x=4k_3+1,k_3\in\mathbf{Z}\}$,又 $a\in A,b\in B$,则一定有 ( )

A. $a+b\in A$ B. $a+b\in B$

C. $a+b\in C$　　　　D. $a+b$ 不属于 A、B、C 中任何一个

6. 用适当的符号填空：
(1)钙______{金属}；(2)锌______{金属}；(3)碳______{金属}；(4)中秋节______{二十四节气}；(5)ϕ______$\{\phi\}$

7. 关于 x 的方程 $ax+b=0$，当 a，b 满足条件______时，解集是有限集；当 a，b 满足条件______时，解集是无限集.

8. 设 x，y 都是实数，则 $\frac{x}{|x|}+\frac{|y|}{y}-\frac{xy}{|xy|}$ 的取值集合是______.

9. 用描述法表示集合 $\{0,\pm\frac{1}{2},\pm\frac{2}{5},\pm\frac{3}{10},\pm\frac{4}{17},\cdots\}$ 为______.

10. 用符号描述法分别写出正整数集合、奇数集合、能被 3 整除的整数集合.

11. 已知集合 $\{x|x=\frac{m}{n},m\in\mathbf{Z},|m|<3,n\in\mathbf{N},n\leqslant 3\}$，试用列举法表示出来.

12. 已知 $S=\{x|x=m+n\sqrt{2},m,n\in\mathbf{Z}\}$
(1)若 $a\in\mathbf{Z}$，则 a 是否是集合 S 的元素？
(2)对于给定的整数 n，试求满足 $0<m+\sqrt{2}n<1$ 的 S 中的元素的个数.

13. 已知集合 $A=\{x|ax^2+2x+1=1,a\in\mathbf{R}\}$，(1)若 A 只有一个元素，试求 a 的值；(2)若 A 是空集，求 a 的取值范围.

14. 含有三个实数的集合可表示为 $\{a,\frac{b}{a},1\}$ 也可以表示为 $\{a^2,a+b,0\}$，求 $a^{2003}+b^{2004}$ 的值.

15. 设 A 是数集，满足 $a\in A\Rightarrow\frac{1}{1-a}\in A$，且 $1\notin A$. (1)若 $2\in A$，求满足条件的 A 中的元素个数最少者；(2)若 $a\in A$，则 $1-\frac{1}{a}$ 是否在 A 中？并说明理由.

16. 用文字语言、符号语言分别表示空集.

1.2　子集、全集、补集

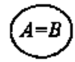
点燃思维火花

由某班的学生组成集合 A，其中参加数学课外活动小组的学生组成集合 B，未参加数学课外活动小组的学生组成集合 C，则 A、B、C 的关系如何？

重点难点解读

重点讲解

1. 子集与补集

知识点	记号	文 字 语 言	符号语言	图形语言
子集	$\subseteq$	若集合 A 的每一个元素都是集合 B 的元素,则称 A 是 B 的子集.	若 $x\in A\Rightarrow x\in B$,则 $A\subseteq B$.	
真子集	$\subsetneqq$	若集合 A 是集合 B 的子集,且 B 中至少有一个元素不在集合 A 中,则称 A 是 B 的真子集.	若 $A\subseteq B$ 且 $A\neq B$,则 $A\subsetneqq B$.	
相等	$=$	若集合 A 是集合 B 的子集,且 B 也是 A 的子集,则称 A 与 B 相等.	若 $A\subseteq B$ 且 $B\subseteq A$,则 $A=B$.	
全集	U	如果集合 U 含有我们所要研究的各个集合的全部元素,则称 U 为全集	若 $A\subseteq U$,$B\subseteq U$,$C\subseteq U$,…,则 U 为全集.	
补集	$\complement_U$	若集合 A 是集合 U 的一个子集,则称 U 中所有不属于集合 A 的元素所组成的集合为 A 的补集	$\complement_U A=\{x\mid x\in U$,且 $x\notin A\}$.	

2. 理解子集概念应注意如下几点:

(1)子集包含真子集和相等两种情形.如上述问题中,若至少有一同学未参加数学课外活动小组,则 $B\subsetneqq A$;若全班都参加数学课外活动小组,则 $B=A$.

(2)空集就像一个无处不在、经常设置陷阱的幽灵,要处处设防,提高警惕,才不至于掉进陷阱:①空集是任何集合的子集;②空集是任何非空集合的真子集.

(3)特殊的子集:空集和本身.

3. 对全集与补集的理解

(1)全集的相对性:全集是相对于研究问题而言的一个相对概念,也就是在研究某个问题时的全集,对于另一个问题,它不一定是全集.例如:在上述问题中 A 可看作全集,因为在这个问题中,所有集合都是 A 的子集.但是,当问题扩展到这个班所在的

学校，即由全校的学生组成集合 D. 则这时 $A\subseteq D$，因而 A 不能作为全集.

(2)关于补集的几个性质：$\complement_U U=\varnothing$，$\complement_U\varnothing=U$，$\complement_U(\complement_U A)=A$.

难点突破

对符号语言的理解：

1. 子集与真子集的符号：具有方向性. 如 $A\subseteq B$ 与 $B\supseteq A$ 的意义相同，而 $A\subseteq B$ 与 $A\supseteq B$ 的意义不相同.

2. 注意区分易混淆的符号.

(1)$\in$ 与 $\subseteq$ 的区别：前者表示元素与集合之间的关系，如 $0\in \mathbf{N}$，而后者则是表示集合与集合之间的关系，如 $\mathbf{N}\subseteq \mathbf{Z}$.

(2)a 与 $\{a\}$ 的区别：a 表示一个元素，而 $\{a\}$ 表示只有一个元素的集合，因此有 $0\in\{0\}$，$\{1\}\subseteq\{1,2,3\}$ 等，而不能写成 $0=\{0\}$，$\{1\}\in\{1,2,3\}$，$1\subsetneqq\{1,2,3\}$.

(3)$\{0\}$ 与 $\varnothing$ 的区别：$\{0\}$ 是含有一个元素的集合，$\varnothing$ 是不含任何元素的集合. 因此有 $\varnothing\subsetneqq\{0\}$，而不能写成 $\varnothing=\{0\}$，$\varnothing\in\{0\}$.

课堂综合运用

例 1 写出集合 $\{1,2,3\}$ 的所有子集.

【解析】按子集的元素个数的多少分别写出所有子集，这样才能达到不重复、无遗漏，同时还要注意两个特殊子集：$\varnothing$ 和本身.

【答案】$\varnothing$，$\{1\}$，$\{2\}$，$\{3\}$，$\{1,2\}$，$\{1,3\}$，$\{2,3\}$，$\{1,2,3\}$.

【点悟】(1)以子集的元素个数的多少作为分类标准，分别写出其子集，能达到不重复，无遗漏.

(2)由本例可知，由 3 个元素组成的集合的子集有 8 个，那么由 2 个元素组成的子集有几个？(4 个)，4 个元素呢？(16 个)，…，推广到一般呢？(由 n 个元素组成的集合的子集有 2^n 个).

(3)若将问题换成：若 $\{1,2\}\subseteq M\subsetneqq\{1,2,3,4,5\}$，则这样的集合 M 有多少个？(有 8 个).

例 2 已知集合 $M=\{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$，集合 P 满足：$P\subseteq M$，且若 $a\in P$，则 $10-a\in P$. 这样的集合 P 有多少个？

【解析】注意到若 $1\in P$,则 $9\in P$;反过来,若 $9\in P$,则 $1\in P$. 因此 1 和 9 要么都在 P 中,要么都不在 P 中. 同理 2 和 8、3 和 7、4 和 6 都是要么同在 P 中,要么同不在 P 中. 在各组数中各取一个数作代表组成集合(如$\{1,2,3,4,5\}$),于是问题等价于求此集合的子集个数.

【答案】共有 $2^5=32$ 个这样的集合 P.

【点悟】(1)特例入手、发现规律、归纳一般,是解决比较陌生问题常用的方法. 如本例中以 1 和 9 作为突破口,找到解决问题的方法.

(2)在各组数中各取一个作代表组成新集合(如$\{1,2,3,4,5\}$),把问题转化为求该集合的子集个数问题,这既是化归与转化思想的体现,也蕴含着现代数学的基本思想.

例3 已知集合 $M=\{x|x=2k+1,k\in\mathbf{Z}\}$、集合 $N=\{x|x=4k\pm1,k\in\mathbf{Z}\}$,判断集合 M 与 N 的关系.

【解析】如果从两个集合的代表元的逻辑关系入手分析,则关系不易理清,而把它具体化,即用列举法分别表示两个集合,则关系一目了然.

【解答】$\because M=\{\cdots,-3,-1,1,3,5,7,\cdots\}$, $N=\{\cdots,-5,-3,-1,1,3,5,7,9,\cdots\}$, $\therefore M=N$.

【点悟】用列举法来表示集合可使集合的元素一目了然,集合之间的关系也就明朗了. 因此我们要善于运用这样方法来表示集合,同样文氏图法以及数形结合法也能使集合变得形象、直观起来,有利于判断集合之间的关系.

例4 已知集合 $A=\{x|-1\leqslant x\leqslant a,a>-1$ 且 $a\in\mathbf{R}\}$, $B=\{y|y=2x-1,x\in A\}$, $C=\{z|z=x^2,x\in A\}$. 是否存在 a 的值,使 $C\subseteq B$? 若存在,求出 a 的取值范围;若不存在,则说明理由.

【解析】集合 B 的代表元是什么?(y),而 y 必须满足是什么性质? $y=2x-1$ 且 $x\in A$(即 $-1\leqslant x\leqslant a$),所以 $-3\leqslant y\leqslant 2a-1$,因此集合 B 是由大于等于 -3 且小于等于 $2a-1(a\in\mathbf{R})$ 的实数所组成的集合. 类似地可确定 C.

【解答】假设存在这样的 a 的值. 由于 $y=2x-1$ 且 $x\in A$,即 $-1\leqslant x\leqslant a$, $\therefore -3\leqslant y\leqslant 2a-1$.

而 $z=x^2$ 且 $x\in A$. $\therefore$ 当 $-1\leqslant a\leqslant 0$ 时, $a^2\leqslant z\leqslant 1$;当 $0<a\leqslant 1$ 时 $0\leqslant z\leqslant 1$;当 $a>1$ 时, $0\leqslant x^2\leqslant a^2$.

若 $-1<a\leqslant 0$,要使 $C\subseteq B$,则 $2a-1\geqslant 1$,即 $a\geqslant 1$,矛盾. 同理当 $0<a\leqslant 1$ 时,也不存在 a 的值;而 $a\geqslant 1$ 时,要使 $C\subseteq B$,则有 $a^2\leqslant 2a-1$,即 $(a-1)^2\leqslant 0$, $\therefore a=1$.

故存在 $a=1$,使得 $C\subseteq B$.

【点悟】(1)对于存在型开放题,一般宜用假设法求解. 即先假设存在,以此作为条

件，进行逻辑推理.若推出矛盾，则否定假设；若推出正确结论，则肯定存在性并给出存在值.

(2)对代表元所具有的性质的准确理解以及分类讨论是解本题的关键.

(3)如果将 B 改为 $\{y|y=2x+1,x\in A\}$，情形如何？将 C 改为 $\{z|z=x^2+1,x\in A\}$，情形又怎样？

例5 已知 $x\in\mathbf{R},y\in\mathbf{R}^+$，集合 $A=\{x^2+x+1,-x,-x-1\}$，$B=\{-y,-\frac{y}{2},y+1\}$. 若 $A=B$，求 x^2+y^2 的值.

【解析】由 $\{x^2+x+1,-x,-x-1\}=\{-y,-\frac{y}{2},y+1\}$，要求出 x、y 的两个值，一个很自然的想法是建立关于 x、y 的方程组，求 x、y 的值.但由无序性得到六个方程组，这显然是不可取的.本题的突破口在何处？请注意两点：一是由 $y\in\mathbf{R}^+$，得 $-y<0,-\frac{y}{2}<0,y+1>0$，且 $-y<-\frac{y}{2}$；二是隐含条件 $x^2+x+1>0$，且 $-x>-x-1$.由此可得到如下解法：

【解答】$\because x\in\mathbf{R},y\in\mathbf{R}^+$，$\therefore x^2+x+1=(x+\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}>0,-x>-x-1,-y<-\frac{y}{2}<0<y+1$，且 $x^2+x+1-(-x)=(x+1)^2\geqslant 0$，即 $x^2+x+1\geqslant -x$.

于是有 $\begin{cases}x^2+x+1=y+1,\\-x=-\frac{y}{2},\\-x-1=-y,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}x=1,\\y=2.\end{cases}$

这时 $A=\{3,-1,-2\}$，$B=\{-2,-1,3\}$ 满足 $A=B$.故 $x^2+y^2=1^2+2^2=5$.

【点悟】善于观察、分析，也就善于找到解题捷径.

例6 已知全集 $U=\{2,3,a^2+2a-3\}$，$A=\{|2a-1|,2\}$，$\complement_U A=\{5\}$，求实数 a 的值.

【解析】$\complement_U A=\{5\}$ 说明了什么意思？它有两层含义，即 $5\in U$ 且 $5\notin A$.于是解题方法就在眼前.

【解答】$\because \complement_U A=\{5\}$，$\therefore 5\in U$ 且 $5\notin A$.

$\therefore a^2+2a-3=5$，即 $a=2$ 或 $a=-4$.

当 $a=2$ 时，$|2a-1|=3\neq 5$；当 $a=-4$ 时，$|2a-1|=9$，但 $9\notin U$.故所求的值为 $a=2$.

【点悟】(1)解本题易错点是：求出 $a=2$ 或 $a=-4$ 之后，而没有检验.

(2)深刻理解$\complement_U A$的含义既是解本题的突破口，也是解题的关键.因此集合是一种数学语言，我们必须从这种语言中破译出它的全部涵义，这是学习"集合"的基本要求.

(3)下面问题你能解答吗？已知$S=\{$至少有一组对边平行的四边形$\}$，$A=\{$平行四边形$\}$，求$\complement_S A$.

例1 已知集合$A=\{x|x^2+4x=0, x\in \mathbf{R}\}$，$B=\{x|x^2+2(a+1)x+a^2-1=0, a\in \mathbf{R}, x\in \mathbf{R}\}$.若$B\subseteq A$，求实数$a$的值.

【解析】$B\subseteq A$可分为$B=A$和$B\subsetneqq A$两种情况，所以解此题需要结合一元二次方程的根的情况加以分类讨论.

【答案】$\because A=\{0,-4\}$，$B\subseteq A$.

(1)当$A=B$时，得$B=\{0,-4\}$.所以0和-4是方程$x^2+2(a+1)x+a^2-1=0$的两根，$\therefore \begin{cases}0+(-4)=-2(a+1),\\ 0\times(-4)=a^2-1\end{cases}$，解得$a=1$.

(2)当$B\subsetneqq A$时，又有两种情形：

①$B\neq\varnothing$时，即$B=\{0\}$或$B=\{-4\}$，$\therefore$ 方程$x^2+2(a+1)x+a^2-1=0$有两个等根，$\therefore \Delta=4(a+1)^2-4(a^2-1)=0$，解得$a=-1$.此时$B=\{0\}$满足条件.

②$B=\varnothing$时，即方程$x^2+2(a+1)x+a^2-1=0$无实根，所以$\Delta=4(a+1)^2-4(a^2-1)<0$，解得$a<-1$.

综合上述可知，所求的实数a的值为$a\leqslant -1$或$a=1$.

【点悟】(1)在解决有关分类讨论问题时，首先要确定一个恰当的合理的分类标准，这样既能做到不重复、不遗漏，且能克服分类讨论过种中的主观性和盲目性.

(2)本题容易遗漏掉$B=\varnothing$这种情况，从而掉进空集这个陷阱之中.

(3)请解下面问题：①已知集合$A=\{x|x^2+x-6=0\}$，$B=\{x|mx-1=0\}$.若$B\subsetneqq A$，求实数m的值.②若集合$P=\{x|x^2-(m+2)x+m+5=0, x\in \mathbf{R}\}$，若$P\subsetneqq \mathbf{R}^+$，求实数m的取值范围.

例2 已知集合A=\{1,2,3\}，求集合A的所有子集的元素之和.

【解析】集合A的子集分别是$\varnothing$，\{1\}，\{2\}，\{3\}，\{1,2\}，\{1,3\}，\{2,3\}，\{1,2,3\}.

注意到A中的每个元素x出现在A的4个子集，即在其和中出现4次.故所求之

和为$(1+2+3)\times 4=24$.

【点悟】(1)A中每个数出现在A的4个子集之中,这是由写出A的子集后,再观察得出的结果.能否不写出A的子集也得出样结论呢?注意到A中的元素1,出现在A的子集($\{1\}$,$\{1,2\}$,$\{1,3\}$,$\{1,2,3\}$),如果把这些子集中排除这个数1,剩下来的元素依次组成的集合($\varnothing$,$\{2\}$,$\{3\}$,$\{2,3\}$)也就是A中除元素1组成集合($\{2,3\}$)的子集,即有4个.推广到一般,即"$A=\{1,2,3,\cdots,n\}$,则A的所有子集的元素之和为多少?"你能求出吗?更一般的,即A为n个数组成的集合$\{a_1,a_2,\cdots,a_n\}$,情形又如何?

(2)在本题中,是否能由A的子集作为元素组成一个新集合呢?即以$\varnothing$,$\{1\}$,$\{2\}$…作为元素组成一个集合$\{\varnothing,\{1\},\{2\},\cdots,\{1,2,3\}\}$.其实以集合为元素组成新的集合这样的例子在日常生活中有很多事例,例如由我们班的学生组成一个集合,在全校以各个班为元素又可以组成另一个集合.那么以A的子集为元素组成的一个集合$B=\{O,\{1\},\{2\},\{3\},\{1,2\}\{1,3\},\{2,3\},A\}$与A的关系又是如何呢?你还能由此联想到哪些结论?请展开你思维想像的翅膀,在广阔的想象天空中去驰骋吧!

例3 若不等式$|x|<1$成立时,不等式$[x-(a+1)][x-(a+4)]<0$也成立,求实数a的取值范围.

【解析】若从不等式的角度难以解释"也成立"的含义,而运用集合的语言,问题就清晰得多.

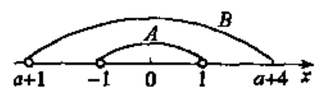


图 1-2-1

【解答】设不等式$|x|<1$的解集为A,不等式$[x-(a+1)][x-(a+4)]<0$的解集为B.即$A=\{x|-1<x<1\}$,$B=\{x|a+1<x<a+4\}$.依题意有$A\subseteq B$.在数轴上作出包含关系图形(如图1-2-1),由图可知,$\begin{cases}a+1\leqslant -1,\\ a+4\geqslant 1,\end{cases}$解得$-3\leqslant a\leqslant -2$.

故所求的a的取值范围是$-3\leqslant a\leqslant -2$.

【点悟】集合的语言使问题的变得清晰起来,问题解决变得简洁而明了.

1. 本节知识结构