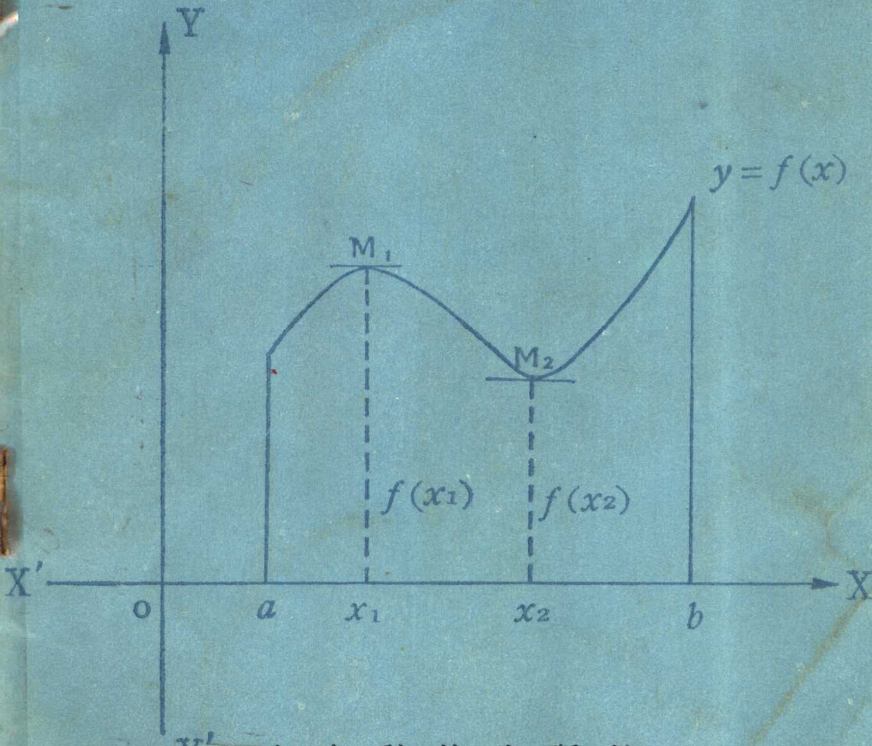
中学生读物

最大值和最小值

陈耀中



广东科技出版社

中学生读物

最大值和最小值

陈耀中 编

广 东 科 技 出 版 社

内容简介

本书是为中学生编写的课外读物.

书中汇集了中学的代数、平面几何、立体几何、平面三角教材中的最大值、最小值的有关内容，略为扩充，加以系统化，重点介绍解决这些问题的初等数学方法，同时简要介绍高等数学的方法. 适合高中学生和知识青年阅读，也可供中学数学教师教学时参考.

最大值和最小值

陈耀中 编

*

广 东 科 技 出 版 社 出 版

广 东 省 新 华 书 店 发 行

广 东 新 华 印 刷 厂 印 刷

787×1092 毫米 32开本　3.125 印张 67,000字

1980 年 6 月第 1 版　1980 年 6 月第 1 次印刷

印数 1—33,500册

书号 13182·37　定价 0.25 元

目　录

引　言

当你走进商店去选购物品的时候，往往会想到，我身上所带的钱，最多只能买某种商品多少件，或者最少要买某种商品多少件．这个问题是我们日常生活中经常碰到的简单的最大值或最小值问题．

在生产斗争和科学实验实践中，我们将会遇到更多较为复杂的最大值、最小值的问题．比如：

（1）把一根长为l的钢筋，折成一个矩形，问矩形的长和宽各是多少时面积最大？

（2）体积为V的圆柱形罐头，它的底面半径和高各是多少时表面积最小？

（3）用半径为R的圆木做一矩形梁，当矩形的宽和高是多少时梁的强度最大？

…………

这类问题，可以用数学方法求解．这本小册子就是将中学教材中有关这方面的数学内容集中起来，略为扩充，进行比较系统的论述．主要介绍用初等数学方法解简单的最大值、最小值问题，同时也简要地介绍用高等数学解此类问题的方法．

全书共分五节．第一至第三节和第五节是初等数学部分，这部分是本书的重点，内容比较详细，着重介绍利用二次函数极值的性质、函数定义域和值域、算术平均数与几何平均数的关系、不等量定理等，求得函数最大值、最小值的

方法.

第四节是高等数学部分. 这部分的内容比较简单，不作严格的证明或推算，仅借助求导数的方法来求函数的最大值、最小值，因此，中学生学起来也是不难的. 书中有些例题既采用初等数学的解法，又采用高等数学的解法，便于读者进行比较，有利于提高分析问题和解决问题的能力.

书中编写有六十多道例题和一些习题，并附有习题答案，供读者研究和练习.

本书可作为高中学生课外读物，也适合知识青年阅读，还可供中学数学教师教学时参考.

一、函数的极值与最大值、最小值

1．函数和它的定义域、区间、值域

自然界中的客观事物是不断发展和变化的．很多事物的发展变化的规律可以通过数量之间的关系反映出来．我们先来看看下面的例子．

例 1　火车用每小时60公里的速度开出，则火车开动的时间 t 小时与路程 S 公里之间的关系式是

$$S=60t \qquad (1)$$

例 2　用一条 1 米长的铁丝折成一个矩形，则矩形的面积 y 与矩形的长 x 米之间的关系式是

$$y=x\cdot(0.5-x) \qquad (2)$$

从上面两例可以看到，在研究的过程中，有些量是不改变的，而有些量是可以变化的，因此，产生如下两个概念．

常量：在研究的过程中，保持一定数值的量．

变量：在研究的过程中，可以取不同数值的量．

显而易见，在例 1 和例 2 中，60、0.5 是常量；而 S、t、y、x这些量就是变量．

另外，变量之间是有联系的．比如在例 1 中，当 $t=1$

时，$S=60$；如果我们给 t 以另一个值，如 $t=2$，那末 $S=120$。一般地，我们给量 t 以一个确定的数值的时候，S 就有一个确定的数值与之对应，或者说这个数值是由（1）式所决定的。根据变量的这些特点，就可得到函数的概念。

函数：如在某一变化过程中，有两个变量，其中数值可以在某一范围内任意选择的变量，叫做自变量；如果对于自变量的每一个确定的值，另一个变量有确定的值与它对应，那末这个变量叫做因变量，也叫做自变量的函数。

比如 y 是 x 的函数，可用记号

$$y=f(x) \quad \text{或者} \quad y=F(x)$$

表示。在例 1 中，t 是自变量，S 是 t 的函数。在例 2 中，x 是自变量，y 是 x 的函数。

在函数关系里，若自变量的最高次数是一次的，我们就把这个函数叫做一次函数。例如上述（1）式中，S 叫做 t 的一次函数。若自变量的最高次数是二次的，我们就把这个函数叫做二次函数。在（2）式中，y 叫做 x 的二次函数。一般地，二次函数用下面的式子来表示

$$y=ax^2+bx+c \quad (a\neq 0,\ a,\ b,\ c \text{ 是常数})$$

前面我们讲过，变量在问题的研究过程中，可以取不同数值，但是自变量 x 的取值并不完全是任意的，它所能取的值，往往决定于问题的具体性质。如在例 1 中，t 的变化范围是：$0\leqslant t\leqslant t_1$，$t_1$ 是火车停站前开动的时间；在例 2 中，x 的变化范围是 $0<x<1$。

在函数关系中，自变量的取值范围叫做函数的定义域。因此，例 1 中函数 S 的定义域是 $0\leqslant t\leqslant t_1$，例 2 中函数 y 的定义域是 $0<x<1$。

自变量的取值范围常常是某一范围里的全体实数，所以

可用数轴表示。例如，x可以取a和b之间的所有值，即 $a<x<b$，这个取值范围叫做开区间，记为(a, b)；在数轴上，a、b两点画为空心，如图 1-1 a。

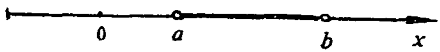


图 1-1 a

如果 x 的取值范围包括端点a和b，即 $a\leqslant x\leqslant b$，这个范围叫做闭区间，记为$[a, b]$；在数轴上，a、b 两点画为实心，如图1-1b。

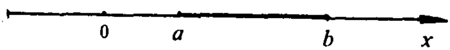


图 1-1 b

如果 x 的取值范围只包括一个端点，就叫做半开区间。如$a<x\leqslant b$，记为$(a, b]$；$a\leqslant x<b$，则记为$[a, b)$。

自变量取值范围有时也要考虑无穷区间。这时，用数 $-\infty$，$+\infty$（读作负无穷大，正无穷大）作为它的一端或两端。例如：当$x>a$时，记为$(a, +\infty)$；当 $x\leqslant b$时，可记为$(-\infty, b]$。

由于自变量的取值是有范围的，所以对应的函数值也是有范围的。在函数关系中，函数的取值范围叫做**函数的值域**。

2. 函数是否一定有最大值或最小值

一个函数是否一定有最大的值呢？我们先来看一些函数的情况。

例如，对于函数

$$y=\frac{1}{10}x$$

当自变量取如下数值的时候，

$x_1=10$，$x_2=100$，$x_3=1000$，$x_4=10000$，…

函数 y 的对应值是

$y_1=1$，$y_2=10$，$y_3=100$，$y_4=1000$，…

由此可见，函数 y 不存在最大的值。

那末，在一个函数里，是否一定有最小的值呢？

仍然看上面的例子。当 x 取如下数值的时候，

$x_1=-10$，$x_2=-100$，$x_3=-1000$，$x_4=-10000$，…

函数 y 的对应值是

$y_1=-1$，$y_2=-10$，$y_3=-100$，$y_4=-1000$，…

由此可见，函数 y 也不存在最小的值。

但当式子表示一定的实际意义的时候，就必须作具体分析了。例如：交售100斤甘蔗给糖厂可买回10斤糖，那末交售的甘蔗量 x 与所能买回的糖量 y 就有 $y=\frac{1}{10}x$ 的函数关系。若某生产队试验田生产了一万斤甘蔗，那末，该队交售甘蔗量最多是一万斤，最少是零斤，而买回的糖量最多是一千斤，最少是零斤。这时，这个函数关系就存在着最大值和最小值的问题了。

在数学中，可以证明：对于闭区间上的连续函数，在该区间上至少取得它的最大值和最小值各一次。这是一个定理，这个定理叫做**最大值和最小值定理**。

我们在使用上面的定理时，必须注意两方面情况：

（1）必须注意函数的值域是不是闭区间。若不是闭区间而是开区间，定理的结论就有可能是不正确的。例如函数$y=x$，在开区间（a，b）内，它的最大值和最小值恰好在区间的端点，而端点是不属于这区间的。所以，它既不取得最大值，也不取得最小值。

（2）必须注意函数在闭区间是不是连续的。若函数在闭区间上具有间断点，即不是连续的，定理的结论也可能会不正确。例如函数

$$y=f(x)=\begin{cases}-x+1 & 0\leqslant x<1\\ 1 & x=1\\ -x+3 & 1<x\leqslant 2\end{cases}$$

在闭区间〔0，2〕上有间断点$x=1$，它便不取得最大值，也不取得最小值。读者自己可画出这个函数的图象，看看它在图象上有没有存在着最高点和最低点。

另外，对于一些有一定规律的函数，比如二次函数

$$S=15+\frac{1}{4}t^2$$

当自变量取如下值的时候，

$t_1=1$，$t_2=10$，$t_3=100$，…

对应的函数S是

$$S_1=15\frac{1}{4}，S_2=40，S_3=2515，\cdots$$

很明显，函数S不存在最大值。

我们再来考察函数S的情况，它是15与$\frac{1}{4}t^2$的和，第一项是常数15，与t的变化无关，第二项是$\frac{1}{4}t^2$，显然无论t取任何数值（指实数，此后若无特别说明，我们都是在实数范围内进行研究的），t^2总是不会小于零，$\frac{1}{4}t^2$也就不会小于零．只有当$t=0$时，$\frac{1}{4}t^2$才等于零；这时15与$\frac{1}{4}t^2$的和有最小值15．这个最小值也叫做极小值，写成

$$S_{极小}=15$$

这样，我们便找出了函数的最小值．所以，对于具体问题，应进行具体分析，从中总结出规律性的东西来，以指导我们的实践．

3．函数的极大值、极小值与最大值、最小值

上面应用了两种概念：极大值、极小值与最大值、最小值．到底这两种概念是否一样呢？

我们说，这两种概念是不相同的，它们之间既有联系，也有区别．

在函数中，极大值、极小值的意思是：当自变量$x=m$时，若函数$f(x)$的值比x稍大于m和稍小于m的时候都大，我们就说函数$f(x)$在$x=m$时有极大值；当$x=m$时，若函数$f(x)$的值比x稍大于m和稍小于m时都小，我们就说函数$f(x)$在$x=m$时有极小值．极大值和极小值通常称为极值．

函数的最大值或最小值，是指函数在某一个范围（或区间）里，函数值取最大或最小的数．

因此，可以这样认为，在某范围里，绝对的极大、极小是最大值、最小值．事实上它在这个区域内的数值是最大的，或最小的．而相对的极大、极小就是极大值、极小值．它只是在这点的邻域内相对而言的．所以有时候，有些极大值或极小值就是最大值或最小值．例如上面所说的 $S=15+\frac{1}{4}t^2$ 函数，它的极小值就是最小值．而有些函数，例如，

$$y=x^3-6x^2+9x-3$$

我们先用描点法画出它的图象图 1－2．由图中可见，函数 y 在 $x=1$ 处的值，比 x 稍大于 1（如 $x=1.2$）和稍小于 1（如 $x=0.8$）时都大，因此，我们说函数 y 在 $x=1$ 处有极大值，即 $y_{极大}=1$；同样，函数 y 在 $x=3$ 处的值，比 x 稍大于 3（如 3.2）和稍小于 3（如 2.8）时都小．因此，函数 y 在 $x=3$ 处有极小值，即 $y_{极小}=-3$．但是，$y=1$ 和 $y=-3$ 都不是函数 $y=x^3-6x^2+9x-3$ 的最大值和最小值．在 $x>3$ 时，函数 y 随着自变量 x 的无限增大而无限增大；在 $x<1$ 时，函数 y 随着 x 的无限减小而无限减小．因此，在区间 $(-\infty,\infty)$ 里，函数 y 没有最大值和最小值．

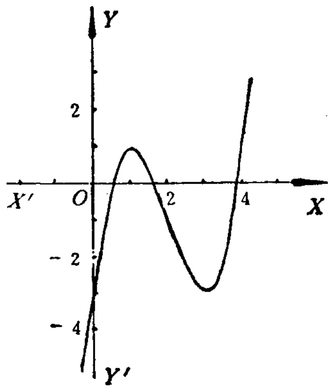


图 1－2

一般地，判断函数最大值或最小值的方法是：求出函数的所有极大值和极小值后，再把它们与区间端点的函数值比较一下，这些数中最大的就是这个函数的最大值，最小的就

是函数的最小值.

但也有两种特殊情况要加以注意. 如果函数在所讨论的区间内仅有一个极值, 则可断定这个极值就是最大值或最小值, 后面将要讨论的二次函数就是这种情况. 如果函数在讨论的区间内没有极值, 则可断定它的最大值和最小值必在区间的端点上. 比如, 一次函数 $y=-2x$ 在区间〔a, b〕内, 当 $x=a$ 时, 函数取最大值 $y=-2a$; 当 $x=b$ 时, 函数取最小值 $y=-2b$.

4. 二次函数与极值

前面已经讨论过, 二次函数 $S=15+\frac{1}{4}t^2$ 存在着极小值. 同样, 下面的二次函数

$$y=2x^2+4$$

$$y=5x^2-11$$

$$y=\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{2}$$

都有极小值, 而没有极大值. 当 $x=0$ 时, 这三个函数的极小值分别是

$$y_{极小}=4$$

$$y_{极小}=-11$$

$$y_{极小}=-\frac{1}{2}$$

显然, 这些函数都是较为简单的二次函数, 它们都是缺少一次项的. 对于比较复杂的二次函数, 可以通过配方进行研究. 例如, 对于函数

$$y=8x^2-12x+20$$

我们先把上式的右边变形，得

$$y=3(x^2-4x)+20$$

再把括号里的式子加上一个数，使式子配成完全平方，于是

$$\begin{aligned}y&=3(x^2-4x+4)+20-12\\&=3(x-2)^2+8\end{aligned}$$

这样，式子右边是$3(x-2)^2$与8两项的和。无论x是什么实数，$(x-2)^2$都不会小于零，$3(x-2)^2$也不会小于零，$3(x-2)^2+8$就不会小于8；只有当$x=2$时，函数y的值才等于8。因此，这个函数有极小值$y=8$。

上面列举的都是有极小值的例子。那么，二次函数有没有极大值呢？为了系统严格地找出二次函数的极值，我们来研究二次函数的一般形式。

设二次函数

$$y=ax^2+bx+c$$

式中a，b，c为任意实数，其中$a\neq 0$

用配方可得

$$y=a\cdot\left(x^2+\frac{b}{a}x\right)+c$$

括号中配上一次项系数一半的平方

$$y=a\cdot\left[x^2+2\cdot x\cdot\frac{b}{2a}+\left(\frac{b}{2a}\right)^2\right]+c$$

写成完全平方式并去掉中括号

$$y=a\cdot\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+c-\frac{b^2}{4a}$$

整理得

$$y=a\cdot\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{4ac-b^2}{4a}$$

显而易见，式中右边第二项是由 a，b，c 这些常数运算组成的式子，当 a，b，c 确定了的时候，它是一个常数；第一项是含有自变量 x 的式子．我们按两种情况进行讨论：

（1）如果 $a>0$ 时，不论 x 取什么数，$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2$ 一定不会小于零，$a\cdot\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2$ 也一定不会小于零。

当 $x=-\frac{b}{2a}$ 时，$a\cdot\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2$ 等于零，函数有极小值

$$y_{极小}=\frac{4ac-b^2}{4a}$$

（2）如果 $a<0$ 时，不论 x 取什么数值，$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2$ 一定不会小于零，而 $a\cdot\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2$ 就一定不会大于零。

当 $x=-\frac{b}{2a}$ 时，$a\cdot\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2$ 等于零，这时函数有极大值

$$y_{极大}=\frac{4ac-b^2}{4a}$$

如果画出函数 $y=ax^2+bx+c$ 的图象，就会发现，它的图象是一条抛物线．当 $a>0$ 时，抛物线开口向上，在 $x=-\frac{b}{2a}$ 时，函数 $y=\frac{4ac-b^2}{4a}$ 是抛物线的最低点

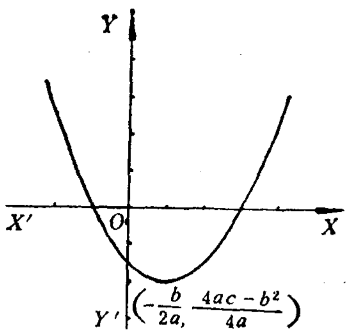


图 1－8 a

(图1-3a)，也就是说函数$y=\frac{4ac-b^2}{4a}$是抛物线的极小值，也是最小值；当$a<0$时，抛物线开口向下，在$x=-\frac{b}{2a}$时，$y=\frac{4ac-b^2}{4a}$是抛物线的最高点(图1-3b)，也就是说函数$y=\frac{4ac-b^2}{4a}$是抛物线的极大值，也就是最大值。

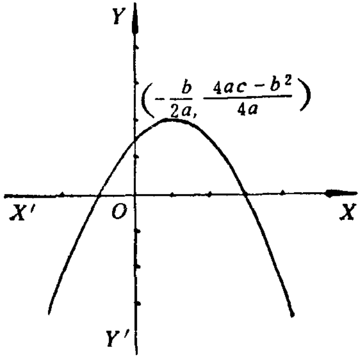


图1-3b

经过上面的分析，我们可得下面的结论。

定理：二次函数$y=ax^2+bx+c$ $(a\neq0)$，当$x=-\frac{b}{2a}$时，它具有极值。如果$a>0$，它就有极小值；如果$a<0$，它就有极大值。如果函数有极大值，就没有极小值；如果有极小值，就没有极大值。

求二次函数的极值时，我们不必死记$y=\frac{4ac-b^2}{4a}$这个式子，只需把$x=-\frac{b}{2a}$代入原式，即可求得对应的$y_{极大}$或$y_{极小}$；或者从图象中抛物线顶点坐标也可知道y的极大值或极小值。

综上所述，并根据前面判断函数最大值或最小值的方法可知，求二次函数的最大值、最小值问题，就是求二次函数的极值问题。根据二次函数极值定理求得的极大值、极小值，**也就是它的最大值、最小值。**