数学小丛书

14

單位分數

柯召　孙琦

科学出版社
www.sciencep.com

数学小丛书

14

单位分数

柯召 孙琦

科学出版社

数学小丛书 14

单位分数

柯召 孙琦

科学出版社

2002

内 容 简 介

单位分数是分子为 1、分母为自然数的分数.用单位分数表示分数,具有许多有趣的性质,由此产生一些有趣的问题,其中有的是至今尚未解决的数论问题和猜想.本书从有关单位分数的一个古老的问题谈起,讨论了单位分数的一些重要的性质和应用,最后介绍了一种有趣的无穷级数及其求和的方法.

图书在版编目(CIP)数据

单位分数/柯召,孙琦. —北京:科学出版社,2002
(数学小丛书)
ISBN 7-03-009423-9

Ⅰ.单… Ⅱ.①柯…②孙… Ⅲ.分数-普及读物 Ⅳ.O121.1-49

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2002)第 010120 号

科学出版社 出版
北京东黄城根北街16号
邮政编码:100717
http://www.sciencep.com
中国科学院印刷厂 印刷
科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2002 年 5 月第 一 版 开本:787×960 1/32
2002 年 5 月第一次印刷 印张:2 3/8 插页:1
印数:1—5 000 字数:32 000

全套书定价: 99.00 元(共 18 册)

出版说明

1956 年,为了向青少年传播数学知识,科学出版社配合我国首次举办的高中数学竞赛,出版了老一辈数学家华罗庚教授的《从杨辉三角谈起》和段学复教授的《对称》.在 20 世纪 60 年代初,这两本书连同其他一些著名数学家撰写的科普著作,被北京市数学会编成小丛书,相继由不同的出版社出版,并多次重印.

由数学大师和著名数学家亲自执笔撰写的这套数学小丛书是我国数学普及读物中的精品,曾激发一代青少年学习数学的兴趣.书中蕴涵的深刻而富有启发性的思想,促进了无数中学生在求学的道路上健康成长.当年这套小丛书的许多读者,现在已经成为学有所成的科学技术工作者,国家建设的栋梁之才.当年由老一辈数学家所倡导的我国的数学竞赛活动,现在已经得到蓬勃的发展.我国自 1986 年正式参加国际数学奥林匹克竞赛以来,历届都取得总分

第一或第二的好成绩. 近年来,我国的数学普及读物无论是品种还是数量都在增加,但是这套数学小丛书仍然无愧是其中别具特色的瑰宝,理应成为传世之作. 因此,我社取得作者或其继承人的同意,并在可能的条件下,请作者本人或相关学者对重新编辑的书稿进行了审订,重新刊行这套数学小丛书,以飨广大青少年读者.

数学是几千年人类智慧的结晶,是一门古老而又常新的科学. 借此丛书再版之机,我们特别增加两本新书:虞言林教授等的《祖冲之算 π 之谜》和冯克勤教授的《费马猜想》. 前者介绍中国古代数学的一项重大成就,后者阐述数学史上的一个著名猜想——费马定理历经 300 多年终于在 20 世纪末被证明的故事,我们相信读者从中将会受到启迪.

本套丛书以新貌重新出版,得到了国家自然科学基金委员会数学天元基金的资助,谨表示衷心感谢.

前　　言

1964 年,北京数学会约我们写一本小册子,作为中学生课外阅读的《数学小丛书》中的一本,为此,我们编写了《单位分数》一书.后来,这套小丛书停出了,这本小册子也就未能出版.由于原稿失落,现在这本小册子是重写的.

本书的内容,仅仅用到初等数论中整除、同余式、算术基本定理等简单概念和结果.中学生阅读时,不会有多少困难.实际上,书中绝大多数内容可以说是属于算术的范围,我们认为,这是些较为有趣的问题,对于扩大读者的数学知识,以及提高解决问题的技巧和能力,都会有一定的好处.

如有不妥之处,请读者批评指正!

作　者

1980 年 3 月于成都

目　　录

1　什么是单位分数 ………………………… (1)
2　一个古老的传说 ………………………… (3)
3　镶地板和铺路 …………………………… (10)
4　把真分数表成单位分数的和…………… (18)
5　将分数表示为两个单位分数之和的
　　问题 ……………………………………… (27)
6　将分数表示为三个单位分数之和的一些
　　猜想 ……………………………………… (32)
7　从完全数谈起 …………………………… (40)
8　关于单位分数表示 1 …………………… (43)
9　不表示整数的某些单位分数的和 …… (52)
10　一个有趣的级数 ……………………… (55)
11　莱布尼茨单位分数三角形 …………… (59)

1 什么是单位分数

我们把分子是1、分母是自然数的分数叫做**单位分数**，记成$\frac{1}{n}$.

人类对分数的认识就是从单位分数开始的.大约在公元前2000年，古代埃及人就是把分子大于1的正分数表示成单位分数的和，例如$\frac{5}{6}$写成了$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}$的形式.所谓林特(Rhind)①抄本，就记载了当时埃及人把一些分数写成单位分数的和，其中包括所有$\frac{2}{b}$(b取5到101之间的所有奇数)被表示成不同的单位分数和的表，每一个和中的单位分数都按它们的大小递减排列.

用单位分数表示分数，有许多有趣的性质，

---

① Rhind是19世纪苏格兰的一位古物收集家，1855年，他买到了这种抄本，后来，人们就叫林特抄本.

由此产生出一些有趣的问题.

尽管单位分数的概念以及把分数表示成不同的单位分数之和的问题,在古代已经提出了,但是直到今天,有关单位分数的问题,仍然引起人们的兴趣,因为它所产生的问题,有的已成为至今尚未解决的一些数论问题和猜想.这些问题和猜想,看来并不简单,它们难住了当代许多数学家.

2 一个古老的传说

流传着一个阿拉伯古老的传说：

一个老人有 11 匹马，他打算把$\frac{1}{2}$分给大儿子，$\frac{1}{4}$分给二儿子，$\frac{1}{6}$分给小儿子，应该怎样分呢？

11 是一个素数，它不能被 2、4 或 6 整除，总不能把一匹马切开来分吧！一个聪明人提出这样的解决办法，“借用”一匹马，共有 12 匹，而 12 能被 2、4 或 6 整除，于是大儿子分得 6 匹，二儿子分得 3 匹，小儿子分得 2 匹，而 $6+3+2=11$，“借到”的一匹马即可“还去”，问题得到解决．当然，这只是一个数学游戏，不能从严格的数学意义去理解它．

我们可以把它理解为一个带有条件的把分数表示成为不同的单位分数和的问题，解决办法可从下面的关系式得出：

$$\frac{11}{12}=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6},\quad 2\mid 12,\ 4\mid 12,\ 6\mid 12,$$

这里,记号 $b|a$ 表示整数 $b\neq 0$ 整除整数 a.

现在,我们把这个传说略为改动一下:

一个老人有若干匹马,记为 n,他把马分给三个儿子,大儿子得 x 匹,二儿子得 y 匹,小儿子得 z 匹,并且满足 $x|n+1$, $y|n+1$, $z|n+1$, $x>y>z$,问老人的马的匹数,即 n,有多少种可能?

这容易化成一个单位分数的问题,设

$$n+1=xa,\ n+1=yb,\ n+1=zc,$$

这里 a, b, c 表示整数(本书常用字母 a, b, c, …, 表示整数). 故由 $x+y+z=n$ 得

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=\frac{n}{n+1},\ a\mid n+1,\ b\mid n+1,$$

$$c\mid n+1,\ a<b<c. \tag{1}$$

现在,就来给出(1)式中的 n 能够取多少个自然数值.

很明显,因为$\frac{n}{n+1}<1$,故 $a\geqslant 2$. 我们来证明不可能有 $a>2$. 在证明之前,先介绍初等数论中一个重要定理,即算术基本定理:

证正整数 $n>1$,如果不计素因数的次序,则只有一种方法把 n 分解成素因数的连乘积.

由此定理可知,如果 $n>1$,把 n 的相同的素因数合并成幂数形状,则 n 只能分解成一种形式:

$$n = p_1^{a_1} p_2^{a_2} \cdots p_s^{a_s}, \quad s \geqslant 1,$$

这里 $p_1, \cdots, p_s$ 是不同的素数, $p_1 < \cdots < p_s$, $a_1, \cdots, a_s$ 都是正整数,我们把 $n = p_1^{a_1} \cdots p_s^{a_s}$ 叫作 n 的标准分解式.例如 1650 的标准分解式为

$$1650 = 2 \times 3 \times 5^2 \times 11.$$

如果(1)式中 $a>2$,设 $M=abc$, 分三种情形来讨论:

1) 如果 $M = P_1^{a_1} \cdots P_s^{a_s}$ 是 M 的标准分解式, $p_1, \cdots, p_s$ 是奇素数, 当 $s \geqslant 2$ 时, 则由 $p_1 p_2 \mid M = abc$, $a \mid n+1$, $b \mid n+1$, $c \mid n+1$, 总有 $p_1 p_2 \mid n+1$, 而 $p_1 \geqslant 3$, $p_2 \geqslant 5$, 故 $n+1 \geqslant p_1 p_2 \geqslant 15$; 当 $s=1$ 时,可设 $a = p_1^{e_1}$, $b = p_1^{e_2}$, $c = p_1^{e_3}$, 由 $2<a<b<c$, 故 $e_3 > e_2 > e_1 \geqslant 1$ 是正整数, $e_3 \geqslant 3$,故 $p_1^3 \mid c$, 而 $c \mid n+1$, 于是 $n+1 \geqslant p_1^3 \geqslant 27$.

2) 如果 $M=2^{\alpha}$,类似 1) 中 $s=1$ 的讨论知 $2^4 \mid c$,故有 $n+1 \geqslant 16$.

3) 如果 $M = 2^{\alpha} p_1^{a_1} \cdots p_s^{a_s}$ 是 M 的标准分解式,当 $s \geqslant 2$ 时,则由 $2 p_1 p_2 \mid M = abc$, $a \mid n+1$, $b \mid n+1$, $c \mid n+1$,总有 $2 p_1 p_2 \mid n+1$,而

$2p_1p_2 \geqslant 2\times 3\times 5=30$，于是 $n+1\geqslant 2p_1p_2\geqslant 30$；当 $s=1$ 时，由 $2<a<b<c$，$a\mid n+1$，$b\mid n+1$，$c\mid n+1$，总有 $2p_1^2\mid n+1$ 或 $2^2p_1\mid n+1$，故有 $n+1\geqslant 12$.

总之，归纳以上三种情形，我们得出 $n+1\geqslant 12$，由(1)式得

$$\frac{11}{12}\leqslant 1-\frac{1}{n+1}=\frac{n}{n+1}=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}$$

$$\leqslant \frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}=\frac{47}{60},$$

这是矛盾的.

因此，$a=2$，代入(1)式得

$$\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=\frac{1}{2}-\frac{1}{n+1},$$

$$b\mid n+1,\quad c\mid n+1,\quad 2<b<c. \tag{2}$$

如果 $b\geqslant 5$，当 $n+1\geqslant 8$ 时，由(2)式得

$$\frac{3}{8}=\frac{1}{2}-\frac{1}{8}\leqslant \frac{1}{2}-\frac{1}{n+1}$$

$$=\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\leqslant \frac{1}{5}+\frac{1}{6}=\frac{11}{30},$$

这是矛盾的. 故 $n+1<8$，由此和 $5\leqslant b<c\mid n+1$，得出

$$8 > n+1 \geqslant c \geqslant b+1 \geqslant 6,$$

故有 $n+1=6$，$b=5$，但 $5 \nmid n+1=6$(符号 $\nmid$ 表示不整除)或 $n+1=7$，$b=5$ 或 $n+1=7$，$b=6$,都与 $b \mid n+1$ 矛盾.故有 $b=3$ 或 $b=4$.

当 $b=3$ 时,由(2)式得

$$\frac{1}{c}=\frac{1}{6}-\frac{1}{n+1},\ c \mid n+1,\ c>3. \quad (3)$$

再由(3)式可得

$$\frac{1}{c}=\frac{1}{6}-\frac{1}{n+1} \geqslant \frac{1}{6}-\frac{1}{c}$$

和

$$\frac{1}{6}-\frac{1}{c}=\frac{1}{n+1}>0,$$

故

$$7 \leqslant c \leqslant 12.$$

$c=7$,代入(3)式得出

$$n=41,\ a=2,\ b=3,\ c=7;$$

$c=8$，代入(3)式得出

$$n=23,\ a=2,\ b=3,\ c=8;$$

$c=9$,代入(3)式得

$$n=17,\ a=2,\ b=3,\ c=9;$$

$c=10,11$,无满足条件的解;

$c=12$,代入(3)式得出

$$n=11,\ a=2,\ b=3,\ c=12.$$

当 $b=4$ 时,由(2)式得

$$\frac{1}{c}=\frac{1}{4}-\frac{1}{n+1},\ c \mid n+1,\ c>4; \quad (4)$$

再由(4)式得

$$\frac{1}{c}=\frac{1}{4}-\frac{1}{n+1} \geqslant \frac{1}{4}-\frac{1}{c};$$

故

$$5 \leqslant c \leqslant 8.$$

$c=5$, 代入(4)式得

$$n=19,\ a=2,\ b=4,\ c=5;$$

$c=6$,代入(4)式得

$$n=11,\ a=2,\ b=4,\ c=6;$$

$c=7$, 无解;

$c=8$,代入(4)式得

$$n=7,\ a=2,\ b=4,\ c=8.$$

总起来,我们证明了这个问题中马的匹数共有六种可能,而分法共有七种:

	n	a	b	c
1	7	2	4	8
2	11	2	4	6
3	11	2	3	12
4	17	2	3	9
5	19	2	4	5
6	23	2	3	8
7	41	2	3	7