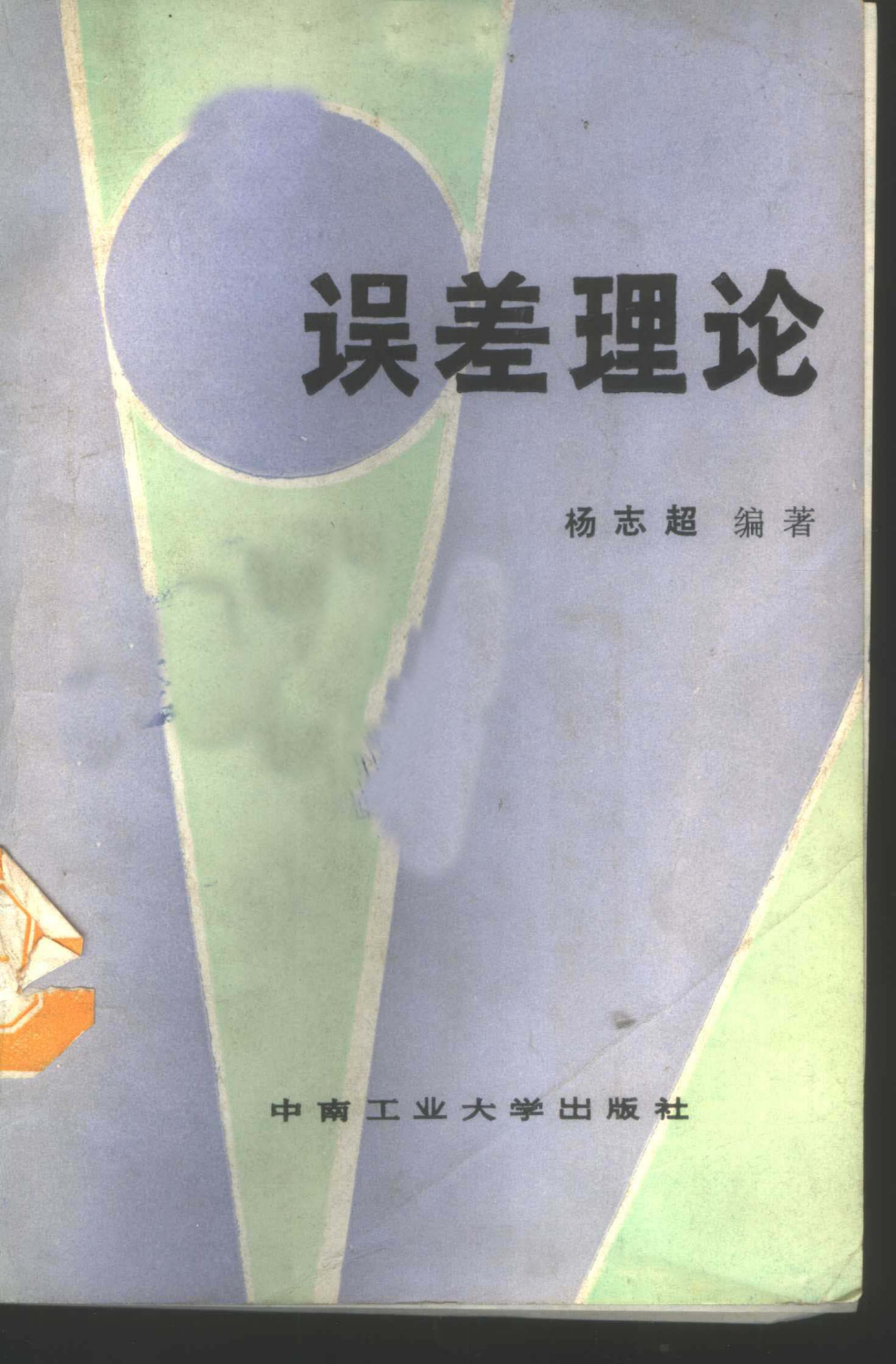




误差理论

杨志超 编著

中南工业大学出版社

误差理论

杨志超 编著

中南工业大学出版社

内 容 简 介

本书系统地介绍了随机误差的评价；系统误差的发现和消除；粗差的判别；数字的处理等内容，叙述力求简要，使读者易于掌握基本概念和应用。为便于缺乏数理统计知识的读者阅读，还介绍了本书内容涉及的数理统计知识。

本书可供工科高校本科生作学习用书，也可供从事机械、实验测试工作的技术人员参考。

误 差 理 论

杨志超 编著

责任编辑：肖梓高

*

中南工业大学出版社出版发行
中南工业大学出版社印刷厂印装
湖南省新华书店经销

*

开本：787×1092 1/32 印张：6.25 字数：145.8千字

1987年9月第1版 1987年9月第1次印刷

印数：0001—3000

*

ISBN 7-81020-076-3/O·013

统一书号：13442·029 定价：1.05元

编写说明

近几年为机制专业开设了《误差理论》选修课程，根据编写的讲稿修改整理成这份教材，讲授约24—28学时，目的是使本科学生对误差理论及其应用有一个基本概念。因为学时所限，只着重介绍了随机误差的评价、系统误差的判断和消除、粗差的判别以及误差的合成等方面的内容，还有更多的内容打算另作处理。编者水平有限，时间也仓卒，错误难免，敬请读者指正。

编 者

1986年 11月

目 录

第一章	误差的基本概念.....	(1)
§ 1.	误差研究的意义.....	(1)
§ 2.	误差的概念.....	(2)
	一、误差概念.....	(2)
	二、误差来源.....	(2)
	三、误差的表示方法.....	(3)
	四、误差分类.....	(4)
§ 3.	精度概念.....	(5)
	一、正确度.....	(5)
	二、精密度.....	(5)
	三、准确度.....	(5)
第二章	概率及数理统计基本知识.....	(7)
§ 1.	随机变量及其分布.....	(7)
	一、离散随机变量.....	(7)
	二、连续随机变量.....	(8)
	三、随机变量函数的分布.....	(9)
	四、多维分布.....	(10)
§ 2.	随机变量的数字特征.....	(14)
	一、数学期望.....	(14)
	二、矩.....	(16)
	三、方差.....	(17)
	四、多维分布矩、协方差.....	(18)
	五、数学期望及方差的运算.....	(19)
§ 3.	正态分布.....	(21)

一、一维正态分布	(21)
二、多维正态分布	(25)
§ 4. 大数定律及中心极限定理	(31)
一、大数定律	(31)
二、中心极限定理	(34)
§ 5. 参数估计	(37)
一、矩估计法	(38)
二、最大似然估计法	(39)
三、估计量的无偏性及一致性	(41)
§ 6. 几种分布	(43)
一、 χ^2 分布	(43)
二、学生氏 t 分布	(44)
三、 F 分布	(46)
第三章 随机误差	(48)
§ 1. 随机误差及其性质	(48)
一、随机误差产生的原因	(48)
二、随机误差的性质	(49)
§ 2. 随机误差的评价	(51)
一、算术平均值	(51)
二、等精度测量数据精度的评价	(55)
三、测量结果的精度	(62)
四、测量列误差的误差	(65)
§ 3. 均方根差的计算方法	(66)
一、等精度单观测均方根差的计算	(66)
二、等精度双观测均方根差的计算	(81)
§ 4. 测量限差	(84)
一、正态随机误差的极限误差	(84)
二、最大误差的极限误差	(85)
三、最大残差的极限误差	(86)
四、极差的极限误差	(86)

§ 5. 不等精度测量	(87)
一、权的概念	(88)
二、权的确定	(89)
三、加权算术平均及其均方根差	(90)
§ 6. 间接测量中误差的计算	(96)
一、随机误差传递的一般公式	(96)
二、间接测量中误差的分配问题	(103)
第四章 系统误差	(109)
§ 1. 系统误差及其产生原因	(109)
一、测量仪器设备方面	(109)
二、测量方法方面	(109)
三、测量环境方面	(109)
四、测量人员方面	(110)
§ 2. 系统误差种类	(110)
一、定值系统误差	(110)
二、变值系统误差	(110)
§ 3. 系统误差对测量结果的影响	(112)
一、定值系统误差的影响	(112)
二、变值系统误差的影响	(113)
§ 4. 系统误差的发现	(113)
一、由残差判别系统误差	(114)
二、由误差直接判别系统误差	(118)
三、由测得值判别系统误差	(123)
四、用分布检验判别系统误差	(124)
§ 5. 系统误差消除	(134)
一、采用修正值	(135)
二、在测量过程中避免系统误差带入测量值中	(136)
第五章 误差合成	(141)
§ 1. 误差合成的基本概念	(141)

一、单项误差的性质	(141)
二、随机误差的分布规律	(142)
三、综合误差的表示形式	(142)
§ 2. 各种误差合成	(143)
一、随机误差合成	(143)
二、已定系统误差合成	(153)
三、随机性系统误差合成	(154)
四、不定常差合成	(154)
§ 3. 综合误差合成	(156)
第六章 实验数据处理	(160)
§ 1. 粗大误差	(160)
一、粗大误差产生的原因	(160)
二、粗大误差判别准则	(161)
§ 2. 数据处理	(170)
一、有效值	(170)
二、数字的舍入	(171)
三、有效数的运算	(173)
四、算术平均值的校核	(175)
五、数据的处理步骤	(179)
附表一 $\phi(Z)$ 数值表	(187)
附表二 t 分布表	(188)
附表三 χ^2 分布表	(189)
附表四 F 分布表	(190)
参考文献	(191)

第一章 误差的基本概念

§ 1 误差研究的意义

科学实验及观测是人们认识客观世界及其变化规律的基本途径。一些理论分析的结果和论断，也需要通过科学实验或实践加以证实。人们期望实验的结果能比较真实地反映客观现象，比较真实地反映有关事物之间的量变关系，从而得出合乎客观规律的结论，用以正确地指导实践。

然而，在任何科学实验中，由于主观和客观上种种因素的限制和影响，不可能不存在误差，这为一切从事科学实验的人们所公认，同时也不可能消除一切误差，即使在今后科学技术有了很大发展，各种测试手段十分完善的情况下，还是不可能做到这一点。因此误差的存在是普遍的，绝对的，而科学实验反映客观现象的真实程度则是相对的。

由于科学实验的结果存在误差，必然使其反映客观现象的真实性受到影响，在严重的情况下，可能导致作出错误的结论，这是我们所不希望的。为了力图使实验结果按要求的程度接近所研究客观现象的本来面目，这就要对误差进行研究，研究误差产生的原因；误差的种类和性质；误差正确的评定方法和数据处理；误差的传递和相互作用规律；各种不同性质误差的合成方法；以及在不同实验条件下，减小误差、提高测量精

度，获得经济而可靠的实验结果的途径。

§ 2 误差的概念

一、误差概念

误差定义为测量对象的测得值 x_i 相对于其真值 a 的差异程度，即

$$\text{误差} = \text{测得值} - \text{真值}$$

$$\text{或} \quad \Delta_i = x_i - a \quad (1-1)$$

这里需要进一步讨论的是真值，在三种情况下真值可以预先知道。

1. 理论真值 理论上肯定其存在，例如，三角形三内角之和恒为 180° 。

2. 约定真值 国际上通过会议确定作为一些几何量和物理量的最高基准的量值。例如，米的长度等于氮86原子的 $2p_{10}$ 和 $5d_5$ 能级之间在真空中跃迁的辐射波长的 1650763.73 倍。又如，时间单位秒是铯133原子基态超细能级之间跃迁的辐射周期的 9192631.770 倍。质量单位千克是铂铱合金的国际千克原器的质量等等。

3. 相对真值 认定精度高一个数量级的仪器的测定值作为低精度仪器的真值，这种真值是相对比较而言的。

除以上几种真值外，一般情况下真值是不知道的，只能通过测得值对真值作出估计，则是真值的估计值。

二、误差来源

测量过程中必然存在误差，究其产生原因不来自三个方

面。

1. 仪器误差 仪器在设计、制造和装配、安装和校准过程中产生的误差。例如，设计时采用近似原理，仪器零件制造和装配不准确，仪器没有校准，安装不正确等。

2. 条件误差 由于测量时环境条件变化而造成的误差。例如，测量时气温高低、湿度大小、气流扰动、光照强弱、磁场波动等变化都可能使测量产生误差。

3. 人差 由于观测者感官生理条件不同、精神状态变化、操作习惯等主观因素影响而造成的误差。所以这种误差又称主观误差。目前一些测量仪器采取数显装置，电子计算机输出打印结果，光电瞄准等客观读数装置，以减少或消除主观误差。

三、误差的表示方法

1. 绝对误差 用被测量本身的误差直接表示的误差称为绝对误差。

2. 相对误差 绝对误差不包含被测量值大小的概念，因此其值不能反映测量精度高低，而相对误差是以绝对误差与被测量的真值或测得值之比来表示，即

$$\text{相对误差} = \frac{\Delta_i}{a} \approx \frac{\Delta_i}{x_i} \quad (1-2)$$

显然，绝对误差是有量纲的数值，而相对误差是无量纲的真分数。

3. 分贝误差 在无线电、声学中，常用分贝来表示误差，实际上是相对误差的另一种表达方式。若电压 U_1 与 U_2 的比值为 α ，则比值的分贝表达式为

$$A = 20 \log \alpha \quad (\text{dB}) \quad (1-3)$$

若比值 α 产生一个误差 δ_α ，则分贝数 A 亦相应地有一误差 δ_A ，故

$$A + \delta_A = 20 \log(\alpha + \delta_\alpha) \quad (\text{dB})$$

$$\delta_A = 20 \log(1 + \delta_\alpha/\alpha) \quad (\text{dB})$$

因为 $\log(1 + \delta_\alpha/\alpha) = 0.4343 \ln(1 + \delta_\alpha/\alpha)$

且 $\ln(1 + \delta_\alpha/\alpha) \approx \frac{\delta_\alpha}{\alpha} \quad (\text{当 } \frac{\delta_\alpha}{\alpha} \ll 1 \text{ 时})$

所以 $\delta_A \approx 8.69 \left(\frac{\delta_\alpha}{\alpha} \right) \quad (\text{dB}) \quad (1-4)$

上式即分贝误差的表达式。

四、误差分类

分类的目的是便于研究误差，从不同的角度看待误差有不同的分类，常见的是按误差的性质分类，可将误差分为：

1. 随机误差 随机误差就其单个误差而言，它是否出现，出现的符号及量值大小如何，都没有规律性，但就所有可能出现的误差总体而言，却服从于一定的统计规律。随机误差是由实验过程中许多具有随机性质的因素综合影响的结果，通过对一批测得值的统计处理，能对误差大小作出概率的估计，但不能对其进行修正。

2. 系统误差 在实验过程中误差符号及其量值不变，或按一定规律变化的误差，称为系统误差。一般来说，系统误差可以由实验或理论计算确定，依据系统误差量值大小可对测量结果进行修正，消除它对测量结果的影响。

3. 粗差 它是由于测量者操作不当或粗心大意所造成的误差。例如，操作者测错、量错、读错、记错等造成的误差。

具有粗差的测得值称为坏值或异常值，可以按一定的方法对其作出判别而后剔除之，使其不影响测量结果。

除按照误差的性质来分类之外，还可按被测量在测量过程中是否随时间变化，分为静态误差和动态误差，按误差之间是否有关分为独立误差和相关误差等等。

§ 3 精度概念

精度是误差的反义词，即误差大，精度低，误差小，精度高。为使精度的概念更加确切，应按不同性质的误差定义精度。

一、正确度

指系统误差大小程度的反义词。

二、精密度

指随机误差大小程度的反义词。

三、准确度

指系统误差和随机误差合成大小程度的反义词。

以射击为例说明上述定义，如图 1-1，靶心相当于真值，弹孔相对靶心的位置距离则是测得值。图 1-1 (a) 表示系统误差大，正确度低，即弹孔普遍距靶心较远，但随机误差小，精密度高，即弹孔与弹孔之间比较密集。图 1-1 (b) 表示系统误差小，正确度高，而随机误差大，精密度低。图 1-1 (c) 表示系统误差和随机误差都小，准确度高。

此外，在测量中还使用了重复性和复现性这两个名词，它们的涵义也属于精度范畴，前者指在相同测量条件下短期内多次测量测得结果的一致性，后者指在不同测量条件下长期间隔内多次测量结果的一致性。一致性好，则称重复性或复现性好，反之，则说重复性或复现性差，需要分析原因。

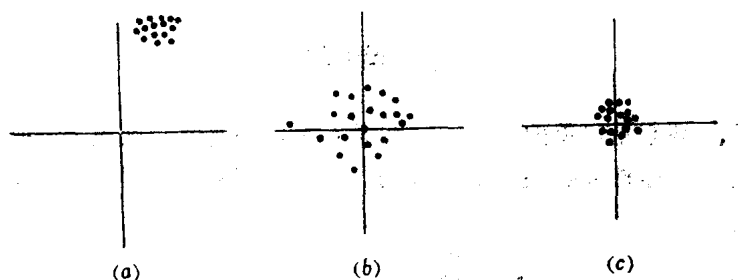


图 1-1

第二章 概率及数理统计的基本知识

本章简要叙述课程涉及的一些概率及数理统计基本知识，对已学过这方面知识的学生，本章可以不学习。

§ 1 随机变量及其分布

随机变量是以一定概率取值的变量。例如，测量某零件直径时，由于种种原因测得值存在误差，事先无法知道误差将取什么数值，然而根据过去的资料，可以知道误差取值某个区间的概率多大。所以零件直径的误差就是一个随机变量。又如，浇铸一批铸件，无法预知将出现几个废品，但是根据过去相同条件下浇铸的资料，可以知道废品取某个数值的概率多大，所以铸件废品数也是一个随机变量。

一、离散随机变量

定义：如果 X 是在 x 轴上只取有限个或可数个数值的随机变量，那么 X 称为（一维的）离散随机变量。

如果 X 以概率 $f(x_1), f(x_2) \cdots f(x_n) \cdots$ 取值 $x_1, x_2 \cdots x_n \cdots$ 这里取值的个数是有限的，如果事件 A 是取值集合中的任意子集，则事件 A 的概率（ X 在 A 中的概率） $P(A)$ 定义为

$$P(A) = \sum_A f(x_i) \quad (2-1)$$

其中 $\sum$ 号是指 A 中的那些 x_i 点的概率 $f(x_i)$ 之和。 $f(x_i)$ 称为概率密度,它需满足

$$f(x_i) \geq 0 \quad (2-2)$$

$$\sum f(x_i) = 1 \quad \text{对全部取值集合} \quad (2-3)$$

常常需要计算 $P(x < x_0)$ 、 $P(x_0 \leq x \leq x_1)$ 这样一些类型的概率,定义一个称为分布函数(或累积分布函数)的函数是大有方便之处的。因此将事件 $X < x$ 的概率定义为分布函数,记为 $F(x)$, 即

$$F(x) = \sum_{x_i < x} f(x_i) \quad (2-4)$$

其中求和是对使得 $X < x$ 的这样一些 x_i 的概率密度 $f(x_i)$ 来进行的。

$$\text{显然有} \quad P(x_0 \leq X \leq x_1) = F(x_1) - F(x_0) \quad (2-5)$$

二、连续随机变量

定义: 如果存在一函数 $f(x)$, 使得在区间 $-\infty < x < \infty$ 中所有的 x 都有 $f(x) \geq 0$, 且对于任意事件 A 的概率有

$$P(A) = P(X \text{ 在 } A \text{ 中}) = \int_A f(x) dx \quad (2-6)$$

则称随机变量为(一维)连续随机变量, 密度 $f(x)$ 需满足

$$f(x) \geq 0 \quad (2-7)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 1 \quad (2-8)$$

对于连续随机变量 X , 只有把它的取值理解为 x 轴上无限个不重叠微小区间中的一个, 式(2-7)和(2-8)才能成立。

类似地把连续随机变量 X 小于或等于 x 的概率定义为分布

函数 $F(x)$ ，则

$$F(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt \quad (2-9)$$

连续随机变量的分布函数具有下述性质：

(1) $F(x)$ 是非减连续函数

(2) $F(-\infty) = 0$ ， $F(\infty) = 1$ (2-10)

$$\begin{aligned} (3) \quad P(x_a \leq X \leq x_b) &= \int_{x_a}^{x_b} f(t) dt \\ &= F(x_b) - F(x_a) \end{aligned} \quad (2-11)$$

如果 $F(x)$ 连续，且其导数存在，就能通过微分函数 $F(x)$ 求得密度函数，即

$$f(x) = \frac{dF(x)}{dx} \quad (2-12)$$

三、随机变量函数的分布

随机变量的函数仍是一随机变量，也存在它的分布。在一些问题中，常常需要由一个随机变量的分布导出该随机变量函数的分布。这里只考虑连续随机变量。

若随机变量 X 的分布密度为 $f(x)$ ，要求 X 的函数 $Y = \varphi(X)$ 的密度函数。假定函数 $y = \varphi(x)$ 连续可微，且是单调的，即有唯一解 $x = \Psi(y)$ 。

若函数 $\varphi(x)$ 是 x 的增函数，则 Y 的分布函数为

$$\begin{aligned} G(y) &= P(Y < y) = P(-\infty < X < x) \\ &= \int_{-\infty}^x f(t) dt = \int_{-\infty}^{\varphi(y)} f(t) dt \end{aligned} \quad (2-13)$$

则 Y 的密度函数 $g(y)$ 为

$$g(y) = G'(y) = f[\Psi(y)] \cdot \frac{d[\Psi(y)]}{dy}$$