JIANGLIAN KETANG

讲出生动 关注讲练课堂

练出精彩 重温课本细节

总主编 蒋念祖 丁翌平

主 编 钱军先 戴翰林

讲练课堂

高二数学

东北师范大学出版社

JIANGLIAN KETANG

总主编 蒋念祖
丁翌平

讲练课堂

高二数学

主　编　钱军先
戴翰林
副主编　周德春

东北师范大学出版社・长春

图书在版编目(CIP)数据

讲练课堂．高二数学/蒋念祖，丁翌平主编．—长春：东北师范大学出版社，2003.5

ISBN 7-5602-3373-2

Ⅰ．讲…　Ⅱ．①蒋…②丁…　Ⅲ．数学课—高中—教学参考资料　Ⅳ．G634

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2003)第 024928 号

□责任编辑：崔俊英　□封面设计：魏国强

□责任校对：张小磊　□责任印制：栾喜湖

东北师范大学出版社出版发行

长春市人民大街 5268 号(130024)

销售热线：0431—5687213

传真：0431—5691969

网址：http://www.nnup.com

电子函件：sdcbs@mail.jl.cn

东北师范大学出版社激光照排中心制版

省吉新月历公司印刷厂印装

吉长公路南线 1 公里处　邮政编码：130031

2003 年 5 月第 1 版　2003 年 5 月第 1 次印刷

幅面尺寸：148mm×210mm　印张：9.25　字数：348 千

印数：0 001 — 6 000 册

定价：11.50 元

出版说明

《讲练课堂》是一套面向广大中学生的同步类教辅丛书。整套丛书经过精心策划和专家反复论证，由全国知名中学的优秀特高级教师主持编写。其显著特点在于：

1. 立足于教材而又高于教材。

本书以人教版最新教材为蓝本，紧扣教学大纲，力图对各项知识要点进行有效的梳理，以打牢学生的知识基础。同时加强课内资源与课外资源的整合，以提高学生的解题技巧和综合能力。

2. 题型设计新颖，并具有很强的针对性。

在习题的编选上尽量不选陈题、旧题，使原创题、创新题保持较大比例，力求体现近年来教学和考试的新成果，给人以境界一新的感觉。同时根据教学大纲，就各个知识点、能力要求有针对性地设置习题，做到有的放矢。

如今名目繁多的练习册令人眼花缭乱，如何能"风景这边独好"？

如果非要找一个答案，那么我们可以十分自信地告诉您，《讲练课堂》做到了：在学生心求通而未得，口欲言而未能之时，用易学、易变通的方式，用妥帖的语言，深入浅出，使学生在思维中顿悟，在理解中提升，在运用上熟练。

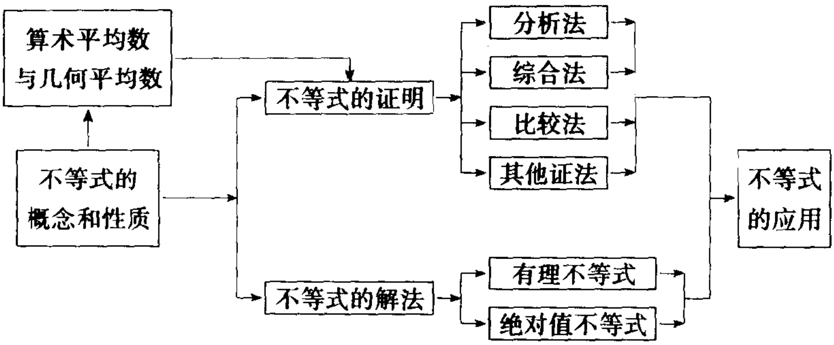
尽管我们对本丛书的出版工作高度重视，作风严谨，态度认真，但疏漏之处在所难免，恳请读者不吝赐教。

《讲练课堂》编辑组

2003年5月

目录 CONTENTS

第六章 [不 等 式]



第一节 不等式的性质

整 体 感 知

1. 不等式的意义

设 $a,b\in\mathbf{R}$,则 $a-b>0\Leftrightarrow a>b$;$a-b=0\Leftrightarrow a=b$;$a-b<0\Leftrightarrow a<b$.

这是我们认识不等式的起点,既是证明不等式的基本方法——比较法的理论依据,也是证明不等式的基本性质的基础.

2. 不等式的性质

(1)对称性 $a>b\Leftrightarrow b<a$;

(2)传递性 $a>b,b>c\Rightarrow a>c$;

(3)可加性 $a>b\Leftrightarrow a+c>b+c$;

(4)可积性 $c>0$ 时,$a>b\Leftrightarrow ac>bc$;$c<0$ 时,$a>b\Leftrightarrow ac<bc$;

(5)加法法则 $a>b,c>d\Rightarrow a+c>b+d$;

(6)乘法法则 $a>b>0,c>d>0\Rightarrow ac>bd$;

(7)乘方法则 $a>b>0\Rightarrow a^n>b^n(n\in\mathbf{N}$,且 $n>1)$;

(8)开方法则 $a>b>0\Rightarrow\sqrt[n]{a}>\sqrt[n]{b}(n\in\mathbf{N}$,且 $n>1)$.

对于这些性质,关键是要能正确理解和灵活运用,要弄清每一条性质的条件和结论,注意条件的放宽与加强,条件与结论之间的相互联系,因为它们是不等式的证明、解

法和应用的理论基础.

典 型 例 析

【基础题】

1. 设 $0<x<1$,且 $a>0,a\neq 1$,试比较 $|\log_a(1-x)|$ 与 $|\log_a(1+x)|$ 的大小.

思路剖析 为了比较两个实数 a 与 b 的大小,根据实数的运算性质与大小之间的顺序关系,只要考察 a 与 b 的差 $a-b$ 的符号即可.若 $a-b>0$,则 $a>b$;若 $a-b=0$,则 $a=b$;若 $a-b<0$,则 $a<b$.

基本步骤是:① 作差;② 变形;③ 判断差的符号.

解答示范 $\because 0<x<1,\therefore 0<1-x<1,1<1+x<2$.

(1)当 $a>1$ 时,$|\log_a(1-x)|-|\log_a(1+x)|=$

$-\log(1-x)-\log_a(1+x)=-\log_a(1-x^2)>0$.

$\because 0<x<1,\therefore 0<x^2<1$,得 $0<1-x^2<1$.

$\therefore \log_a(1-x^2)<0$,即 $-\log_a(1-x^2)>0$.

$\therefore |\log_a(1-x)|>|\log_a(1+x)|$.

(2)当 $0<a<1$ 时,$|\log_a(1-x)|-|\log_a(1+x)|=$

$\log_a(1-x)+\log_a(1+x)=\log_a(1-x^2)$.

同(1)可得 $\log_a(1-x^2)>0$.

$\therefore |\log_a(1-x)|>|\log_a(1+x)|$.

综合(1)(2)知,当 $0<x<1,a>0,a\neq 1$ 时,总有 $|\log_a(1-x)|>|\log_a(1+x)|$.

特别提示 (1)差比法是比较两个实数大小关系的最常用方法,其运用的难点是变形.变形的目的是判断差的符号,为了便于判断符号,常常运用合并同类项、因式分解和配方等技巧,当差式具备含有某个变量的二次三项式结构式特征时,也可以结合判别式求解.

(2)比较两个实数的大小还可以运用商比法.若 $B>0$,则 $\frac{A}{B}>1\Leftrightarrow A>B$;若 $\frac{A}{B}=1\Leftrightarrow A=B$;若 $\frac{A}{B}<1\Leftrightarrow A<B$.

基本步骤是:① 作商;② 变形;③ 判断商与 1 的大小.在对两个正数进行比较大小时,商比法往往更易奏效.

本题中,由 $0<x<1$ 得 $1<1+x<2$,故 $|\log_a(1+x)|>0$,运用商比法可避免分类讨论,能收到化繁为简的功效.

2. 设函数 $f(x)=\log_{\frac{1}{2}}(x+1)$,试比较 $3f(x)$ 与 $f(3x)$ 的大小.

思路剖析 通过作差,利用对数运算法则将差式变为 $\log_a f(x)$ 形式,再根据对数函数

的性质,讨论 $f(x)$ 的取值情况,得出结论.

解答示范 $3f(x)-f(3x)=3\log_{\frac{1}{2}}(x+1)-\log_{\frac{1}{2}}(3x+1)=\log_{\frac{1}{2}}\frac{(x+1)^3}{3x+1}$,

而 $(x^3+3x^2+3x+1)-(3x+1)=x^2(x+3)$.

$\because x+1>0$ 且 $3x+1>0$, $\therefore x>-\frac{1}{3}$.

$\therefore x^2(x+3)\geqslant 0$,得 $\frac{(x+1)^3}{3x+1}\geqslant 1$.

当且仅当 $x=0$ 时取"="号.

$\therefore$ 当 $x=0$ 时, $3f(x)=f(3x)$,

当 $x>-\frac{1}{3}$ 且 $x\neq 0$ 时, $3f(x)<f(3x)$.

特别提示 比较两个实数或两个函数值大小常用的方法是差比法或商比法,有时联合运用将更易奏效.本题的关键是在变形后须要根据对数运算法则作出商,通过对商与1的大小关系的比较,结合对数函数的性质来解答问题.

3. 设 $20<a<34$, $24<b<60$,求 $a+b$, $a-b$ 及 $\frac{a}{b}$ 的取值范围.

思路剖析 只要求出 $-b$ 与 $\frac{1}{b}$ 的取值范围,再利用同向不等式的可加性及两边都是正数的同向不等式的可乘性,问题即可解答.

解答示范 $\because 20<a<34$, $24<b<60$,

$\therefore 44<a+b<94$;

又 $\because 24<b<60$, $\quad\therefore -60<-b<-24$,

$\therefore -40<a-b<10$;

$\because 24<b<60\Rightarrow\frac{1}{60}<\frac{1}{b}<\frac{1}{24}$,

$\therefore\frac{20}{60}<\frac{a}{b}<\frac{34}{24}$,即 $\frac{1}{3}<\frac{a}{b}<\frac{17}{12}$.

特别提示 已知变量 a,b 的取值范围,要求关于 a,b 的代数表达式的取值范围,关键在于正确运用不等式的基本性质.

注　意:

(1)求 $a-b$ 的范围时,必须变换为 $a+(-b)$,再运用同向不等式相加的性质;

(2)求 $\frac{a}{b}$ 的变换为 $a\cdot\frac{1}{b}$,再运用两边都是正数的同向不等式的可乘性.这样能防止解题错误.

【提高题】

4. 已知 $f(x)=ax^2+bx$, $1\leqslant f(-1)\leqslant 2$, $2\leqslant f(1)\leqslant 4$,求 $f(-2)$ 的取值范围.

思路剖析 先看以下求解过程:

由 $1\leqslant f(-1)\leqslant 2$, $2\leqslant f(1)\leqslant 4$,得 $1\leqslant a-b\leqslant 2$, $2\leqslant a+b\leqslant 4$,

两式相加并同除以 2,得$\frac{3}{2}\leqslant a\leqslant 3$.

再由$-1\geqslant -a+b\geqslant -2$与$2\leqslant a+b\leqslant 4$相加并同除以 2 得$0\leqslant b\leqslant\frac{3}{2}$,

从而有$6\leqslant 4a\leqslant 12$及$-3\leqslant -2b\leqslant 0$,

$\therefore 3\leqslant 4a-2b\leqslant 12$,即$3\leqslant f(-2)\leqslant 12$.

这里$f(-2)$的取值范围是否正确呢?从以上求解过程来看似乎没有错,推出a,b的范围分别是$\left[\frac{3}{2},3\right]$和$\left[0,\frac{3}{2}\right]$也是对的.但是,由于$a,b$之间有依赖关系,不能在两个区间内独立取值(如当$a=2$时,$b$就只能在$[0,1]$内取值),因此,$4a-2b$的最大值不是 12,最小值也不是 3,$f(-2)$的范围求错了.

本题中,可以独立选取的变量是$f(-1)$及$f(1)$,设法将$f(-2)$用$f(-1)$和$f(1)$表示出来,得出正确结论,就不难了.

解答示范 令$f(-2)=k_1f(1)+k_2f(-1)$ (k_1,k_2是等定常数).

$4a-2b=k_1(a+b)+k_2(a-b)=(k_1+k_2)a+(k_1-k_2)b$,

比较对应项系数得$\begin{cases}k_1+k_2=4,\\k_1-k_2=-2,\end{cases}$解得$\begin{cases}k_1=1,\\k_2=3,\end{cases}$

故$f(-2)=f(1)+3f(-1)$.

$\because 2\leqslant f(1)\leqslant 4,3\leqslant 3f(-1)\leqslant 6$,

$\therefore 5\leqslant f(1)+3f(-1)\leqslant 10$,即$5\leqslant f(-2)\leqslant 10$.

特别提示 (1)在一个数学问题中往往有许多变量,有些变量是可以独立取值的,有些变量是相互之间有依赖关系,相互制约的,这时可将可独立取值的变量作为基本量,用这些基本量表示其他量,从而使问题得以解决.

(2)本题中求k_1,k_2的这种方法叫待定系数法,这是一种重要的方法,在数学解题中应用很广泛.

能 力 测 试

一、选择题

1. 若$a>b$,则下列不等式中成立的是(　　).

A. $\frac{b}{a}<1$　　B. $\frac{1}{a}<\frac{1}{b}$　　C. $2^{-a}<2^{-b}$　　D. $\lg(a-b)>0$

2. $x>3$是$\frac{3}{x}<1$的(　　).

A. 充分不必要条件　　B. 必要不充分条件

C. 充要条件　　D. 既不充分也不必要的条件

3. 若$a>0>b,0>c>d$,则以下不等式中不成立的是(　　).

A. $ac<bd$　　B. $\frac{a}{d}>\frac{b}{c}$　　C. $a+c>b+d$　　D. $a-d>b-c$

4. 若 $a+b>0, b<0$，那么 $a, b, -a, -b$ 的大小关系为(　　).

A. $a>b>-b>-a$　　B. $a>-b>-a>b$

C. $a>-b>b>-a$　　D. $a>b>-a>-b$

5. 不等式 $(2a+7)x>a+3$ 与 $x>-\frac{a+3}{2a+7}$ 同解，则(　　).

A. $a<-\frac{7}{2}$　　B. $-\frac{7}{2}<a<3$　　C. $a=-3$　　D. $a>-3$

二、填空题.

6. 若 $a<0, -1<b<0$，则 a, ab, ab^2 之间的大小关系是________.

7. 正数 a, b, c, d 满足 $a+d=b+c$，$|a-d|<|b-c|$，则 ad 与 bc 之间的大小关系是________.

8. 若 $-\frac{\pi}{2}<\alpha<0<\beta<\frac{\pi}{2}$，则 $2\alpha-\beta$ 的范围是________.

9. 若 $x^2+x<0$，则 $x^2, x, -x^2, -x$ 从小到大排列的顺序是________.

三、解答题.

10. 已知 $a^2<x<a$，比较 $\log_a x^2$，$\log_a(\log_a x)$ 和 $(\log_a x)^2$ 的大小.

11. 已知 $a\geqslant 1$，试比较 $M=\sqrt{a+1}-\sqrt{a}$ 和 $N=\sqrt{a}-\sqrt{a-1}$ 的大小.

12. 已知 $-\frac{1}{2}<a<0$，$A=1+a^2$，$B=1-a^2$，$C=\frac{1}{1+a}$，$D=\frac{1}{1-a}$. 试将 A, B, C, D 按从小到大的顺序排列起来.

13. 已知 $f(x)=1+\log_x 3$，$g(x)=2\log_x 2$　$(x>0, x\neq 1)$.

(1) 比较 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的大小；

(2) 若 $|f(x)-g(x)|+f(x)+g(x)=4$，求 x.

14. 已知函数 $f(x)=\frac{x^n-x^{-n}}{x^n+x^{-n}}$，$x$ 是正实数，n 为非零有理数.

(1) 判断 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上是增函数还是减函数，并证明你的结论；

(2) 当 $n\in\mathbf{N}$ 时，试比较 $f(\sqrt{2})$ 与 $\frac{n^2-1}{n^2+1}$ 的大小.

15. 判断 $(a-1)(b-1)>0$ 是 $\begin{cases}a>1\\ b>1\end{cases}$ 成立的什么条件(指充分非必要条件、必要非充分条件、充要条件或既不充分也不必要条件).

16. 已知 $1\leqslant a+b\leqslant 4$，$-1\leqslant a-b\leqslant 2$，求 $4a-3b$ 的取值范围.

参考答案

一、选择题.

1. C　2. A　3. B　4. C　5. C

二、填空题.

6. $ab>ab^2>a$　**7**. $bc<ad$　**8**. $\left(-\frac{3\pi}{2},0\right)$　**9**. $x<-x^2<x^2<-x$

三、解答题.

10. $a^2<a\Rightarrow 0<a<1$,从而 $0<a^2<x<a<1$.

$\log_a x^2=2\log_a x>2,\log_a x>1\Rightarrow\log_a(\log_a x)<0,1<\log_a x<\log_a a^2=2$,

$\therefore \log_a x^2-(\log_a x)^2=2\log_a x-(\log_a x)^2=\log_a x(2-\log_a x)>0$,

$\therefore \log_a(\log_a x)<(\log_a x)^2<\log_a x^2$.

11. 若直接求差可得 $M-N=\sqrt{a+1}+\sqrt{a-1}-2\sqrt{a}$,其正负不易判断,若先将 M,N 通过分子有理化(或分母有理化),然后再作差,就容易多了.答案是 $M<N$.

12. 由 $-\frac{1}{2}<a<0$,不妨取 $a=-\frac{1}{4}$,则 $A=\frac{17}{16},B=\frac{15}{16},C=\frac{4}{3},D=\frac{4}{5}$,由此可猜想出 $D<B<A<C$,下面只要证明 $C-A>0,A-B>0,B-D>0$ 即可.

13. (1)考察差式 $f(x)-g(x)=\log_x\frac{3x}{4}$,分 $0<x<1,1<x<\frac{4}{3},x=\frac{4}{3}$ 和 $x>\frac{4}{3}$ 四种情况讨论,可得:

当 $0<x<1$ 或 $x>\frac{4}{3}$ 时,$f(x)>g(x)$;

当 $x=\frac{4}{3}$ 时,$f(x)=g(x)$;

当 $1<x<\frac{4}{3}$ 时,$f(x)<g(x)$.

(2)根据(1)的结果,分 $0<x<1$ 或 $x>\frac{4}{3}$ 和 $1<x\leqslant\frac{4}{3}$ 两种情况化简所给方程,可得 $x=3$.

14. (1)要判断 $f(x)$的单调性,应根据幂函数的单调性以及比较法比较 $f(x_1)$与 $f(x_2)$ 的大小.要比较 $f(\sqrt{2})$与$\frac{n^2-1}{n^2+1}$的大小,可将 $f(\sqrt{2})$写成 $1-\frac{2}{2^n+1}$,$\frac{n^2-1}{n^2+1}$写成 $1-\frac{2}{n^2+1}$,化为比较 2^n 与 n^2 的大小,借助于指数函数 $y=2^x$ 与二次函数 $y=x^2$ 的图像,可知:

当 $n=0,1$ 或 $n\geqslant 5$ 时,$f(\sqrt{2})>\frac{n^2-1}{n^2+1}$;

当 $n=2$ 或 4 时,$f(\sqrt{2})=\frac{n^2-1}{n^2+1}$;

当 $n=3$ 时,$f(\sqrt{2})<\frac{n^2-1}{n^2+1}$.

15. 由$(a-1)(b-1)>0$,可得$\begin{cases}a-1>0\\b-1>0\end{cases}$或$\begin{cases}a-1<0\\b-1<0\end{cases}$,若$\begin{cases}a>1\\b>1\end{cases}$或$\begin{cases}a<1\\b<1\end{cases}$,

即$(a-1)(b-1)>0$成立，不一定有$\begin{cases}a>1\\b>1\end{cases}$成立，条件不充分；

反过来，若$\begin{cases}a>1,\\b>1,\end{cases}$则必有$(a-1)(b-1)>0$，即条件是必要的.

故$(a-1)(b-1)>0$是$\begin{cases}a>1\\b>1\end{cases}$的必要非充分条件.

16. 设$4a-3b=k_1(a+b)+k_2(a-b)\Rightarrow 4a-3b=(k_1+k_2)a+(k_1-k_2)b$.

$$\begin{cases}k_1+k_2=4\\k_1-k_2=-3\end{cases}\quad\begin{cases}k_1=\dfrac{1}{2}\\k_2=\dfrac{7}{2}\end{cases}$$

$4a-3b=\frac{1}{2}(a+b)+\frac{7}{2}(a-b)\Rightarrow -3\leqslant 4a-3b\leqslant 9$.

知识链接

水电站的选址问题探讨

著名数学教育家波利亚强调，在学习数学知识时更要注意对常识的学习.所谓常识是指生活、生产实践中带有规律性的东西，数学问题的解决最终结果要用实践来检验.反过来，我们还要用所学数学知识来指导社会实践.

下面的一类问题，在许多资料中都有出现，但至今尚未获得彻底的解决.

小河同侧有A,B两个村，计划在河上共建一个水电站.已知A,B两村到河边的垂直距离分别为y_1和y_2 $(0<y_1\leqslant y_2)$，两村之间的距离为c，水电站建于何处，使到两村架线的用料最省？

类似的还有在河边建自来水厂或水库，向两村送水的管道或渠道的距离之和最小，或在河边建码头，到两村道路的距离之和最小等等.人们在解决这一类问题时，大都不去研究问题的实际情况，统将其归成在直线上求一点，使它到直线同侧两点间的距离之和最短的数学模型，即以河边所在直线为x轴，以过点A且垂直于河道的直线为y轴建立直角坐标系，则各村的坐标为$A(0,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，其中$x_2=\sqrt{c^2-(y_2-y_1)^2}$.如图1所示.

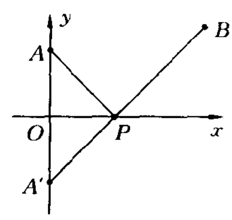


图 1

点A关于x轴的对称点$A'(0,-y_1)$，连$A'B$，到它与x轴的交点P就是要求的点，最短距离之和为$|AP|+|BP|$.

这种做法对完全修建新的设施是适用的，但对有些问题，我们还可另加研究.例如，A村到河边已有设施，且完全可以利用，则我们至少还可以选择O点，得到另一条线路$|AO|+|AB|$，通过比较来判断两者的优劣，以决定取舍.

对此,除了可以通过对具体数据的直接计算外,还可以通过下面的一个条件来判断:

设 $s_1=|AP|+|BP|=|A'B|=\sqrt{x_2^2+(y_2+y_1)^2}$,

$s_2=|AO|+|AB|=y_1+\sqrt{x_2^2+(y_2-y_1)^2}$.

由 $s_2^2-s_1^2=y_1\left[y_1+2\sqrt{x_2^2+(y_2-y_1)^2}-4y_2\right]$知,

若要 $s_2\geqslant s_1$,须 $y_1+2\sqrt{x_2^2+(y_2-y_1)^2}-4y_2\geqslant 0$,

即 $2\sqrt{x_2^2+(y_2-y_1)^2}\geqslant 4y_2-y_1>0\Rightarrow 3y_1^2\geqslant 12y_2-4x_2^2$.

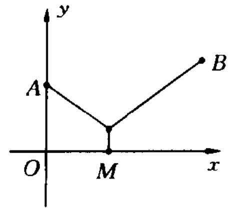


图 2

所以我们得到以下结论:

当 $3y_1^2>12y_2-4x_2^2$ 时,选择点 P 好;

当 $3y_1=12y_2-4x_2^2$ 时,选择点 O 与点 P 都行;

当 $3y_1^2<12y_2-4x_2^2$ 时,选择点 O 好.

另外,对这两种不同线路而言,显然不会再有比这两点更好的选择了.

但是,问题并未到此为止,因为还有如图 2 所示的选择方法,即是否存在点 M,使它到点 A,B 和 x 轴的距离之和比上述两种距离之和更小,这是一个尚待解决的问题,有兴趣的读者不妨一试.

第二节　算术平均数与几何平均数

整体感知

算术平均值与几何平均值关系定理

定理 1　若 $a,b\in\mathbf{R}$,则 $a^2+b^2\geqslant 2ab$(当且仅当 $a=b$ 时取"="号);

定理 2　若 a,b 均为正实数,则 $\dfrac{a+b}{2}\geqslant\sqrt{ab}$(当且仅当 $a=b$ 时取"="号).

典型例析

【基础题】

1. 已知 a,b,c 是互不相等的正数,求证:$a(b^2+c^2)+b(a^2+c^2)+c(a^2+b^2)>6abc$.

思路剖析　若运用比较法,作差后变形的方向不明,思维受阻.由正数的条件以及左端是和右端是积这一特征,我们可联想到基本不等式,从而得到证明本题的方法——综合法.

解答示范　$\because b^2+c^2\geqslant 2bc$ 且 $b\neq c$,

$\therefore b^2+c^2>2bc$,又 $a>0$,

$\therefore a(b^2+c^2)>2abc$.

同理可得 $b(c^2+a^2)>2abc, c(a^2+b^2)>2abc$,

三个同向不等式相加,得

$a(b^2+c^2)+b(a^2+c^2)+c(a^2+b^2)>6abc$.

特别提示 (1)利用某些已经证明过的不等式和不等式的性质,直接推导出所要证明的不等式成立,这种证明方法叫做综合法.

其逻辑关系是 $A\Rightarrow B_1\Rightarrow B_2\Rightarrow B_3\Rightarrow\cdots\Rightarrow B_{n-1}\Rightarrow B_n\Rightarrow B$

(已知)$\xrightarrow{\text{逐步探求不等式成立的必要条件}}$(未知)

其思路是"由因导果",即从"已知",推向已知的"性质",从而逐步推向"未知".

(2)运用综合法证明不等式的关键在于由已知条件和待证不等式的结构特征,去联想一些已经证过的重要不等式.

常用的已证过的不等式有:

①$a^2\geqslant 0\ (a\in\mathbf{R})$;

②$|a|\geqslant 0\ (a\in\mathbf{R})$;

③$a^2+b^2\geqslant 2ab\ (a,b\in\mathbf{R})$,其主要变形有

1°. $a^2+b^2\geqslant 2|ab|\geqslant\pm 2ab$, 2°. $2(a^2+b^2)\geqslant(a+b)^2$,

3°. $(a+b)^2\geqslant 4ab$, 4°. $\frac{a^2+b^2}{2}\geqslant\left(\frac{a+b}{2}\right)^2$,

5°. 当 $ab>0$ 时,$\frac{a-b}{b}\geqslant\frac{a-b}{a}$,当 $b>0$ 时,$\frac{a^2}{b}\geqslant 2a-b$;

④$\frac{a+b}{2}\geqslant\sqrt{ab}(a,b\in\mathbf{R}^+)$,其主要变形有

1°. $\frac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{\sqrt{b}}\geqslant\frac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{\sqrt{a}}$; 2°. $\frac{b}{a}+\frac{a}{b}\geqslant 2\ (ab>0)$, $\frac{b}{a}+\frac{a}{b}\leqslant -2\ (ab<0)$.

【提高题】

2. 已知 $a,b,c\in\mathbf{R}^+$ 且 $a+b+c=1$,求证:$\left(\frac{1}{a}-1\right)\left(\frac{1}{b}-1\right)\left(\frac{1}{c}-1\right)\geqslant 8$.

思路剖析 不等式右边的数字"8",使我们联想到可能是由左边三个因式分别使用基本不等式所得三个"2"连乘而来,而$\frac{1}{a}-1=\frac{1-a}{a}=\frac{b+c}{a}\geqslant\frac{2\sqrt{bc}}{a}$,出现了数字"2",证明的思路至此已十分清楚了.

解答示范 $\because\frac{1}{a}-1=\frac{1-a}{a}=\frac{b+c}{a}$,又 $a>0,b>0,c>0$.

$\therefore\frac{b+c}{a}\geqslant\frac{2\sqrt{bc}}{a}$,即$\frac{1}{a}-1\geqslant\frac{2\sqrt{bc}}{a}$.

同理可得$\frac{1}{b}-1\geqslant\frac{2\sqrt{ca}}{b}$,$\frac{1}{c}-1\geqslant\frac{2\sqrt{ab}}{c}$.由于上面三个不等式的右边都是正数,相

乘即得$\left(\frac{1}{a}-1\right)\left(\frac{1}{b}-1\right)\left(\frac{1}{c}-1\right)\geqslant 8$.

特别提示 (1)在正数的条件下,关于和式或积式结构的不等式的问题,常常可以运用综合法得到十分简捷的证明,作为一个可以遵循的带有一般性的规律,要熟练地掌握并灵活地进行运用.

(2)在遇到已知条件以相关字母的等式出现时,要设法将等式代入到待证的不等式中去,以便于运用基本不等式解决问题. 如何代入是一个值得思考并有待探索的问题,只有在解题的实践中加以揣摩和总结,才能逐步地形成规律.

3. 已知 $x, y\in \mathbf{R}^+$ 且 $2x+y=1$,求证:$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\geqslant 3+2\sqrt{2}$,并指出等号成立的条件.

思路剖析 待证不等式的左边可看成是关于 x, y 的负一次式,而右边是零次式,要想证明此式,必须将左、右两边在次数上首先"统一"起来. 如何"统一"呢? 我们将左式再乘以一个一次因式,即可达到目的.

解答示范 $\because x, y\in \mathbf{R}^+$,$\therefore \frac{1}{x}+\frac{1}{y}=1\cdot\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)=(2x+y)\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)=3+\left(\frac{y}{x}+\frac{2x}{y}\right)\geqslant 3+2\sqrt{2}$.

当且仅当$\begin{cases}\frac{y}{x}=\frac{2x}{y}\\ 2x+y=1\end{cases}$ 即 $x=1-\frac{\sqrt{2}}{2}$,$y=\sqrt{2}-1$ 时,等号成立.

特别提示 (1)证明不等式的本质就是要将不等式的两边在结构上"统一"起来. 利用常数代换,将不等式的两边化成相同的次数,正是这种"统一"思想的具体体现.

(2)证明本题的关键是如何使用条件"$2x+y=1$",直接将 $y=1-2x$ 代入,比较难以证出结论,而运用"1"的代换这一技巧,确是独辟蹊径,令人耳目一新,值得细加品味.

4. 已知 $a>0$,求证:$\sqrt{a^2+\frac{1}{a^2}}-\sqrt{2}\geqslant a+\frac{1}{a}-2$.

思路剖析 从已知条件中找不到任何可利用的关系,也列不出任何能够联系待证结论的式子,怎么办? 我们可以利用结论作等价变形来寻求突破,方法就是分析法. 因式子繁琐,故先化简,运用分析式能使我们逐步实现化简的目的.

解答示范 为了证明不等式成立,只须证明$\sqrt{a^2+\frac{1}{a^2}}+2\geqslant a+\frac{1}{a}+\sqrt{2}$. $\because a>0$,

$\therefore \sqrt{a^2+\frac{1}{a^2}}+2>0$,$a+\frac{1}{a}+\sqrt{2}>0$,

$\therefore$ 只须证明$\left[\sqrt{a^2+\frac{1}{a^2}}+2\right]^2\geqslant\left(a+\frac{1}{a}+\sqrt{2}\right)^2$,

即证 $a^2+\frac{1}{a^2}+4+4\sqrt{a^2+\frac{1}{a^2}}\geqslant a^2+\frac{1}{a^2}+2+2+2\sqrt{2}\left(a+\frac{1}{a}\right)$,

即证$\sqrt{a^2+\frac{1}{a^2}}\geqslant\frac{\sqrt{2}}{2}\left(a+\frac{1}{a}\right)$.

$\because\sqrt{a^2+\frac{1}{a^2}}>0,\frac{\sqrt{2}}{2}\left(a+\frac{1}{a}\right)>0,$

$\therefore$只须证明$\left(\sqrt{a^2+\frac{1}{a^2}}\right)^2\geqslant\left[\frac{\sqrt{2}}{2}\left(a+\frac{1}{a}\right)\right]^2,$

即证$a^2+\frac{1}{a^2}\geqslant\frac{1}{2}\left(a^2+\frac{1}{a^2}+2\right),a^2+\frac{1}{a^2}\geqslant2.$

根据基本不等式,$a^2+\frac{1}{a^2}\geqslant2$成立,故原不等式成立.

特别提示 (1)分析法与综合法是对立统一的两个方面,它们各有优点:综合法宜于表达,条理清晰,形式简洁;而分析法便于寻找解题思路,方向明确,易于掌握.故两者经常结合起来使用.在证明一些较为复杂的不等式,例如分式不等式、根式不等式和含有绝对值符号的不等式时,可以先用分析法去寻找证题思路,再用综合法有条理地把证题过程表述出来.

(2)本题也可以运用换元法来证明.

能 力 测 试

一、选择题.

1. 设$a,b\in\mathbf{R}^+$且$a\neq b$,则下列不等式中成立的是(　　).

A. $\frac{a+b}{2}<\sqrt{ab}<\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$　　B. $\sqrt{ab}<\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}<\frac{a+b}{2}$

C. $\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}<\sqrt{ab}<\frac{a+b}{2}$　　D. $\sqrt{ab}<\frac{a+b}{2}<\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$

2. 设$a,b,c,d\in\mathbf{R},a^2+b^2=1,c^2+d^2=1$,则$abcd$的最小值为(　　).

A. $\frac{1}{4}$　　B. $-\frac{1}{4}$　　C. $\frac{1}{2}$　　D. $-\frac{1}{2}$

二、填空题.

3. 设$m=a^2+b^2+5,n=2(2a-b)$,则m与n的大小关系为________.

4. 若$a>0,b>0$,且$a+b=1$,则$\sqrt{a+\frac{1}{2}}+\sqrt{b+\frac{1}{2}}$与2的大小关系为________.

三、解答题.

5. 已知x,y是正变数,a,b是正常数,且$\frac{a}{x}+\frac{b}{y}=1$,求证:$x+y$的最小值是$(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2$.

6. 若$a>b>0$,求证:$\frac{1}{8}\cdot\frac{(a-b)^2}{a}<\frac{a+b}{a}-\sqrt{ab}<\frac{1}{8}\cdot\frac{(a-b)^2}{b}$.