高等学校教学用書

微分几何

С. П. 芬尼可夫著

高等教育出版社

高等学校教学用書

微分几何

С. П. 芬尼可夫著
高　徵　譯

高等教育出版社

本書是根据1955年苏俄教育部教科書出版社（РСФСР）出版的芬尼可夫（С. П. Фиников）著的“微分几何”譯出的，原書經苏俄教育部审定为师范学院教学参考書。

微 分 几 何

С. П. 芬尼可夫 著

高 徹 譯

高等教育出版社出版 北京琉璃廠170号

（北京市書刊出版業營業許可証出字第054号）

京华印書局印刷　新华書店总經售

統一書号15010·382　開本 850×1168 1/32　印張 6 15/16　字數 179,000　印數 0001—4,500

1957年12月第1版　1957年12月北京第1次印刷　定價（8）¥0.80

序

这本給师范学院数学-物理系用的微分几何教科書，試圖适应对未来教师提出的，关于中学綜合技术教育的新要求。

选擇材料时广泛地利用了各师范学院几何教研室的意見，这些意見是俄罗斯苏維埃联邦社会主义共和国教育部中等及高等师范教育司数学学科委員会所搜集的。

为了使微分几何更接近于实用，几乎到处都用了运动学的叙述方法。

我并不認为这本書的全部材料都可以在課堂上講授；特别是，关于特殊平面曲綫类，特殊空間曲綫类与特殊曲面类的第二，五，九章。这些材料的一部分可以用来当作習題。并且，有几节可以作为学生討論会上的报告材料，也可作为学程作業的材料。凡是超出現行教学大綱范圍以外的材料都用小号字印出。

欢迎对本書的缺点作任何的批評。

作者

目　次

序

第一章　平面曲綫

第二章　特殊平面曲綫类

第三章　曲綫的一般理論

第四章　伴随三面形的运动

第五章　特殊曲綫类

第六章　曲面論

第七章　具有兩个自由度的三面形的运动

第八章　曲面的內蘊几何学

第九章　特殊曲面类

第一章　平面曲綫

§1. 簡單曲綫弧

所謂**簡單曲綫弧**就是坐标 x, y 滿足方程

$$y=f(x) \tag{1}$$

的点的軌迹，但这里横标 x 的值取自区間

$$a \leqslant x \leqslant b,$$

并且函数 $f(x)$ 在这个区間上是連續可微分的。

由这个定义就知道，当横标 x 由 $x=a$ 增到 $x=b$ 时，点 $M(x,y)$ 順着一个方向从点 $A(a, f(a))$ 开始画出曲綫 (1) 的弧 AB 而达到点 $B(b, f(b))$。

弧 (1) 上的点 $M(x, y)$ 与横标軸上的区間 $[a, b]$ 的点成一一对应。特别是簡單弧自己不相交。

§2. 切綫

考慮通过曲綫(1)的弧 AB 某内点 $M_0(x_0, y_0)$ 的直綫(圖 1)。

$$Y-y_0=k(X-x_0), \tag{a}$$

弧上的点 $M(x,y)$ 到直綫(a)的距离是定义为过点 M 所作直綫(a)的垂綫綫段 MP，这个距离按絕对值来說等于在直綫(a)的法式等号左方以点 $M(x, y)$ 的坐标 $x, f(x)$ 代替流动坐标而得到的值:

$$MP=\frac{f(x)-f(x_0)-k(x-x_0)}{\sqrt{1+k^2}}. \tag{b}$$

由于导函数 $f'(x)$ 的連續性，我們可以用中值定理:

$$f(x)-f(x_0)=f'(x_0)\cdot(x-x_0)+\varphi(x, x_0)\cdot(x-x_0),$$

这里当 $x \to x_0$ 时，$\varphi(x, x_0) \to 0$。

把这个式子代入等式(b)，我們得到:

$$MP=(x-x_0)\frac{f'(x_0)-k}{\sqrt{1+k^2}}+(x-x_0)\cdot\varphi(x,x_0)\cdot\frac{1}{\sqrt{1+k^2}}.$$

由这里就可推出，对于所有的值$k\neq f'(x_0)$，点M到直綫(a)的距离MP与点M到M_0之間横标差$x-x_0$是同一阶的無穷小，也就是說，与这兩点間的距离MM_0的無穷小阶数相同，仅仅对于滿足

$$k=f'(x_0) \tag{2}$$

的直綫，距离MP的無穷小阶数高于$x-x_0$的阶数，因为在这里当$x\to x_0$时，比值

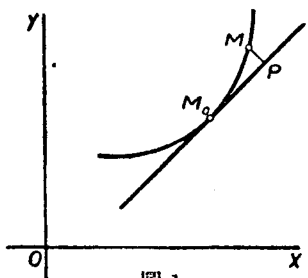

圖 1.

$$\frac{MP}{x-x_0}=\frac{\varphi(x,x_0)}{\sqrt{1+k^2}}$$

趋于零。

定理 通过簡單曲綫弧的每个内点$M_0(x_0,y_0)$可以引唯一的一条直綫

$$Y-y_0=f'(x_0)\cdot(X-x_0), \tag{2'}$$

使得从曲綫上的点M到这条直綫$(2')$的距离的無穷小阶数高于点M到点M_0之間距离的無穷小阶数。

这样的直綫$(2')$叫作曲綫(1)在点M_0的切綫，M_0叫切点。

在分析教程里，直綫$(2')$是当作曲綫的割綫当兩个割点趋于重合时的極限位置。

我們看到，在簡單曲綫弧的每一个内点可以引一条切綫，当切点移动时，切綫也随着連續地轉动。

§ 3. 曲綫与它切綫的相切阶

現在假設方程(1)里的函数$f(x)$是n次可微分的。

于是我們可以引用泰劳定理:

$$f(x)-f(x_0)=\frac{x-x_0}{1}f'(x_0)+\cdots+$$
$$+\frac{(x-x_0)^{n-1}}{1\times 2\times\cdots\times(n-1)}f^{(n-1)}(x_0)+\frac{(x-x_0)^n}{1\times 2\times\cdots\times n}\varphi_n(x, x_0), \quad (3)$$

这里,在点 $x=x_0$ 的鄰近,函数 $\varphi_n(x, x_0)$ 是連續的,并且

$$\lim_{x\to x_0}\varphi_n(x, x_0)=f^{(n)}(x_0). \quad (3')$$

考虑曲綫(1)的切綫(2′),用展开式(3)代入 § 2 的等式(b),但取 $k=f'(x_0)$。于是,曲綫(1)上点 $M(x, y)$ 到切綫(2)的距离 MP 可以表示为:

$$MP=\frac{1}{\sqrt{1+f'^2(x_0)}}\left\{\frac{(x-x_0)^2}{1\times 2}f''(x_0)+\cdots+\right.$$
$$\left.+\frac{(x-x_0)^{n-1}}{1\times 2\times\cdots\times(n-1)}f^{(n-1)}(x_0)+\frac{(x-x_0)^n}{1\times 2\times\cdots\times n}\varphi_n(x, x_0)\right\}.$$

如果 $\qquad f''(x_0)=0, \cdots, f^{(n-1)}(x_0)=0$ 而 $f^{(n)}(x_0)\neq 0, \qquad (4)$

則
$$MP=\frac{(x-x_0)^n}{1\times 2\cdots\times n}\frac{\varphi_n(x, x_0)}{\sqrt{1+f'^2(x_0)}}, \quad (5)$$

并且,由于(3′),

$$\lim_{x\to x_0}\frac{MP}{(x-x_0)^n}=\lim_{x\to x_0}\frac{\varphi_n(x, x_0)}{n!\sqrt{1+f'^2(x_0)}}=$$
$$=\frac{1}{1\times 2\cdots\times n}\frac{f^{(n)}(x_0)}{\sqrt{1+f'^2(x_0)}}\neq 0.$$

因此,如果把点 M 与 M_0 的横标差 $x-x_0$,或这兩点間距离

$$\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}$$

作为一阶無穷小,則在条件(4)之下,曲綫上鄰近于点 M_0 的点 M 到切綫(2′)的距离是阶数为 $n\geqslant 2$ 的無穷小。

对于 $k\neq f'(x_0)$ 的割綫(a)来説,距离 MP 的無穷小阶数等于一。距离 MP 的無穷小阶数 n 愈高,則当点 M 趋于 M_0 时,这个距离縮短得愈快,而曲綫也就更接近于它的切綫。

定义 若曲綫上鄰近于点 M_0 的点 M 到 M_0 的距离取作一阶無穷小，則小于由点 M 到点 M_0 处切綫距离的無穷小阶数的最大整数叫作曲綫与这条切綫的相切阶。

在一般情形 $f''(x_0)\neq 0$，由公式(4)知道 $n=2$；因此，曲綫与它的切綫的相切阶等于 1。

曲綫上滿足关系 $f''(x_0)=0$ 的点，也就是說，曲綫与切綫的相切阶增高的点，叫作具有稳定切綫的点。

§4. 拐点

在切点鄰近曲綫关于切綫的位置分布依賴于相切阶是奇或偶而有所差异。

当我們以 §2 的公式(b)来决定点 M 到直綫(a)的距离时，我們只考慮了这个距离的絕对值。但是，当把点 $M(x, y)$ 的坐标代替直綫法綫式方程左方的流动坐标时，所得到的值帶有一定的正負号，这个正負号依賴于点 M 与坐标原点关于直綫的位置分布。因此，对于一切鄰近于 M_0，横标 x 滿足

$$|x-x_0|<\varepsilon \tag{6}$$

的点 M，如果距离 MP 的正負号总是相同的，則这些点 M 都位于 M 的一側。如果当横标差 $x-x_0$ 通过零值时距离 MP 的正負号改变，則点 M 当沿着曲綫而运行时，由切綫的一側跑到了另一側。

1. 奇数相切阶 在这种情形之下無穷小阶数 n 是偶数。公式(5)右方第一个因子 $(x-x_0)^n$ 总是正的，因为它的次数是偶数；第二个因子 $\varphi_n(x, x_0)$ 因为是变数 x 的連續函数，所以在点 x_0 的适当小鄰域(6)内与它按公式(3′)而求出的極限值 $f^{(n)}(x_0)$ 有相同的正負号。因此，距离 MP 的正負号保持不变；点 M 在点 M_0 的鄰域(6)内沿着曲綫而运行时，永远位于切綫的一側(圖 2)。

2. 偶数相切阶 这时無穷小阶数 n 是奇数。在公式(5)右方的第二个因子 $\varphi_n(x, x_0)$ 在鄰域(6)中永远保持它的正負号不变，

但奇数次的因子 $(x-x_0)^n$ 随着 $x-x_0$ 而变更正負号。这时，当点 M 沿着曲綫而运行时將穿过切綫(圖 3)。曲綫分布在它的切綫的兩側。曲綫与切綫的相切阶是奇数的这种切点，叫做曲綫的拐点。

条件(4)当 $n=2p+1$ 时决定一个拐点。

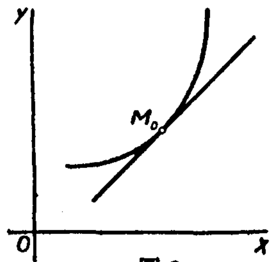

圖 2.

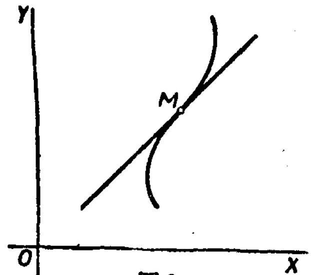

圖 3.

§5. 弧長

当求定直綫段 AB 的長度时，从点 A 出發，在这个綫段上逐次地截出以單位長度 a (米)的 $\frac{1}{m}$ 为一份的綫段，使得經过若干次这样的截取以后，点 B 或者重合于所截出第 n 份綫段的終点，或者落在第 $(n+1)$ 一份的內部。在第一种情形 $AB=\frac{n}{m}a$；在第二种情形 $\frac{n}{m}a<AB<\frac{n+1}{m}a$。使 $\frac{a}{m}$ 取得很小，可以求綫段 AB 的長度到任意的精确度。

对于曲綫弧 AB，这个方法就不能用了，因为直綫的任何一段都不能放在曲綫上去。

但是，每个人从日常生活的經驗，对于任意一条小徑的長度是有一个直观的概念的。曲綫弧長任何严格的定义都不应当与这个概念相違背。

沿用 §1 的記号，对于曲綫(1)来說，对于弧長概念的要求可以分兩点来說：

1. 弧 AB 的每一点对应了單調遞增連續函数

$$s=\Phi(x)$$

的一个函数值，这个值决定从点 A 到点 $M(x, f(x))$ 的弧長，并且当 $x=a$ 时，取零值。弧 MM_1 的長度等于差数

$$AM_1-AM=\Phi(x_1)-\Phi(x),$$

这里 x_1 是点 M_1 的横标。

2. 弧 MM_1 的長度与弦 MM_1 長度的比，当 $M_1 \to M$ 时，其極限等于 1:

$$\lim_{M_1 \to M} \frac{\smile MM_1}{MM_1}=1. \tag{7}$$

实質上，第二个要求可以化为一个熟知的事实：对于具有連續轉动的切綫的弧，微小弧的長度与它所張开的弦的長度，二者之間的差别很小。

用 x 与 $x+\Delta x$ 表示点 M 与 M_1 的横标，我們得到：

$$\smile MM_1=\Phi(x+\Delta x)-\Phi(x);$$

$$MM_1=\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2},$$

于是条件(7)取下面的形狀:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\dfrac{\Phi(x+\Delta x)-\Phi(x)}{\Delta x}}{\sqrt{1+\left(\dfrac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2}}=1.$$

因为函数 $y=f(x)$ 可微分:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}=f'(x),$$

分母的極限存在；因此，分子的極限 $\Phi'(x)$ 也存在，并且我們得到:

$$\Phi'(x)=\sqrt{1+f'^2(x)}.$$

由这里就知道弧 AM 的長度可以用积分求定:

$$s = \smile AM = \int_a^x \sqrt{1+f'^2(x)}\,dx, \tag{8}$$

而弧長微分是

$$ds = \sqrt{1+f'^2(x)}dx. \tag{8'}$$

滿足这兩个要求，因而可以給予弧長概念的曲綫，叫作可求長曲綫。

由这里就得到定理。簡單曲綫弧是可求長的。

在积分学教程里，叫作曲綫弧 AM 長度的是一切內接折綫 $AM_1M_2\cdots M_{n-1}M$（圖 4），当折綫边数無限增多，而差数 $x_{i+1}-x_i$ 趋于零时周長的共同極限，这里 $M_1, M_2, \cdots, M_{n-1}$ 是弧 AM 上的点，相应的横标分别是 $a<x_1<x_2<\cdots<x_{n-1}<x$。

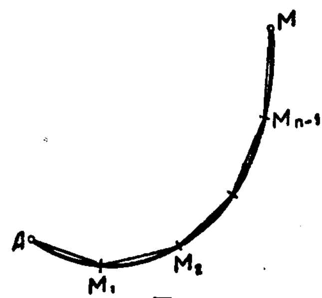

圖 4.

这时，对于連續可微分函数 $f(x)$ 就可証明周長的共同極限存在，并且等于积分(8)。

系　弧長微分由下列公式決定：

$$ds^2 = dx^2 + dy^2. \tag{9}$$

§6. 曲綫的曲率

我們假設方程(1)里的函数 $f(x)$ 兩次連續可微分。

直綫在每一点的方向都是一致的。

曲綫在每一点的方向由它的切綫决定。切綫的正方向是取作相应于横标 x 增加的方向。

曲綫的方向随着它上面的点而变动。从弧 M_0M_1 的端点 M_0 到 M_1，切綫所轉动的角度依賴于曲綫弯曲的程度，这个角度叫作

弧 M_0M_1 的全曲率。全曲率与弧長的比是弧的平均曲率，而当 $M_1 \to M_0$ 时，弧 M_0M_1 的平均曲率的極限叫作曲綫在点 M_0 的曲率。

从坐标原点出發引点 M_0 与 M_1 的切綫單位矢量 $\vec{\tau}_0, \vec{\tau}_1$(圖5)。用 α_i 来記矢量 $\vec{\tau}_i$ 与横标軸的傾角。則在 M_0M_1 那一部分上，切綫旋轉的角度按数值与方向(正負号)由下列差数决定：

$$\Delta\alpha = \alpha_1 - \alpha_0.$$

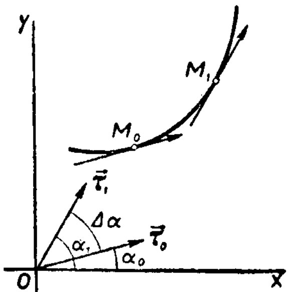

圖 5.

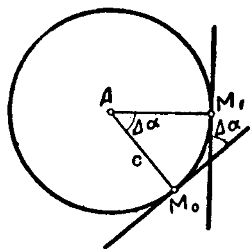

圖 6.

这就是曲綫弧 M_0M_1 的全曲率。如果用 Δs 表示弧 M_0M_1 的長度，則平均曲率等于 $\frac{\Delta\alpha}{\Delta s}$，而在点 M_0 的曲率

$$K = \lim_{\Delta s \to 0} \frac{\Delta\alpha}{\Delta s} = \frac{d\alpha}{ds}. \qquad (10)$$

例如，对于半徑为 a，中心在点 A 的圓(圖 6)，在点 M_0 与 M_1 的切綫垂直于半徑 AM_0 与 AM_1。因此，弧 M_0M_1 的全曲率等于 $\Delta\alpha = \angle M_0AM_1$。圓弧長 $\Delta s = \smile M_0M_1$ 可以由圓心角乘以半徑而得到，$\Delta s = a \cdot \Delta\alpha$。因此，平均曲率等于半徑的倒数

$$\frac{\Delta\alpha}{\Delta s} = \frac{1}{a}.$$

它与 s 或 Δs 無关，也就是說与点 M_0, M_1 的选取無关。因此，曲綫在每点的曲率重合于平均曲率，并在圓周上的每一点保持为常数值：

$$K=\frac{1}{a}.$$

圓周的曲率等于它半徑的倒数。为这个原故，曲綫在点 M_0 的曲率的倒数叫作曲綫在这一点的曲率半徑：

$$K=\frac{1}{R}.$$

曲率半徑的正負号与曲率的一致。

按公式(2′),切綫关于横标軸傾斜角的正切，作为切綫的角系数，等于导函数：

$$\operatorname{tg}\alpha=f'(x);\quad \alpha=\operatorname{arc\,tg} f'(x). \tag{a}$$

由这里，对方程(8)与(a)施行微分，我們得到：

$$ds=\sqrt{1+f'^2(x)}\,dx;\quad d\alpha=\frac{f''(x)dx}{1+f'^2(x)},$$

于是曲率(10)

$$\frac{1}{R}=\frac{d\alpha}{ds}=\frac{f''(x)}{[1+f'^2(x)]^{\frac{3}{2}}}. \tag{11}$$

§7. 密切圓

曲綫与圓的相切阶的定义类似于曲綫与它的切綫的相切阶。設曲綫与圓有公共点 M_0，考虑曲綫上的任意点 M。如果把距离 MM_0 取作一阶無穷小，則当使点 M 沿曲綫趋于点 M_0 时，小于点 M 到圓周最短距离那个無穷小阶数的最大整数就等于曲綫与圓在它們公共点 M_0 的相切阶。

在某一点与曲綫具有最高相切阶的圓叫作曲綫在这一点的密切圓。

1. 圓与曲綫相切阶的求定

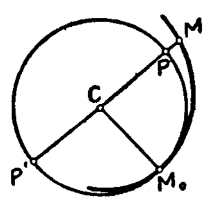

圖 7.

联結曲綫上的点 M 与圓心 C（圖7），并且用 P 与 P' 表示直綫 MC 与圓周的交点。令 (P) 表示圓周上距点 M 最近的那一点，另外的那一个

(P') 是最远的。如果以 R 表示圆半徑，則有

$$PM=CM-R;\ P'M=CM+R$$

以及

$$PM=\frac{\overline{CM}^2-R^2}{CM+R}.$$

这样，当点 $M(x,y)$ 沿着曲綫趋近于公共点 $M_0(x_0,y_0)$ 时，由于

$$\lim_{x\to x_0} CM=CM_0=R;\quad \lim_{x\to x_0}(CM+R)=2R,$$

最短距离 PM 的無穷小阶数將等于下面这个輔助量：

$$\delta=\overline{CM}^2-R^2$$

的無穷小阶数，用 $C(a,b)$ 表圆心，則

$$\delta=(x-a)^2+(y-b)^2-R^2,$$

这里函数 $y=f(x)$ 是假設为两次連續可微分的。

按泰劳公式我們得到：

$$\delta=\delta_0+(x-x_0)\delta_0'+\frac{(x-x_0)^2}{1\times 2}\varphi_2(x,x_0),\tag{12}$$

这里 $\delta_0,\delta_0',\delta_0''$ 表示 $\delta,\frac{d\delta}{dx},\frac{d^2\delta}{dx^2}$ 在点 $M_0(x_0,y_0)$ 的值，且

$$\lim_{x\to x_0}\varphi_2(x,x_0)=\delta_0''.\tag{12'}$$

2. 1-阶相切

既然圆通过点 $M_0(x_0,y_0)$，δ_0 显然等于零：

$$\delta_0=(x_0-a)^2+(y_0-b)^2-R^2=\overline{CM}_0^2-R^2=0.\tag{13a}$$

因此，当 $x-x_0\to 0$ 时，由方程(12)决定的变量 δ 是無穷小；它的阶数当 $\delta_0'\neq 0$ 时等于 $x-x_0$ 的無穷小阶数，而 $x-x_0$ 是被取作一阶無穷小的。由这里就推知曲綫与圆的相切阶等于零；曲綫与圆周相交。这一点可以直接説明。圆半徑 CM_0 的以及圆周的与半徑垂直的切綫的角系数等于：

$$\operatorname{tg}\beta_0=\frac{y_0-b}{x_0-a},\ \operatorname{tg}\alpha_0^*=-\frac{x_0-a}{y_0-b};$$

但是，曲綫在点 M_0 处切綫的角系数等于:

$$\operatorname{tg}\alpha_0=y'_0.$$

因为

$$\delta'=2(x-a)+2y'(y-b),$$

$$\delta'_0=2\{(x_0-a)+y'_0(y_0-b)\},\qquad(13\beta)$$

所以，如果曲綫与圓的切綫重合，$\alpha_0^*=\alpha_0$，則將导致 δ'_0 变为零，反过来也成立。当 $\delta'_0=0$ 时，方程(12)取形狀:

$$\delta=\frac{(x-x_0)^2}{1\times2}\varphi_2(x,x_0),\qquad(14)$$

由于(12′):

$$\lim_{x\to x_0}\frac{\delta}{(x-x_0)^2}=\frac{1}{2}\lim_{x\to x_0}\varphi_2(x,x_0)=\frac{1}{2}\delta''_0.$$

如果 $\delta''_0\neq0$，則变量 δ 以及最短距离 PM 將是 2-阶無穷小，曲綫与圓周是 1-阶相切的。

3. 2-阶相切

如果 $\delta''_0=0$，則 δ 与 PM 的無穷小阶数高于 2-阶，曲綫与圓的相切不低于 2-阶。与曲綫具有公共点 M_0 而又在这一点与曲綫相切不低于 2-阶的圓，当 $y''_0\neq0$ 时，是完全决定了的。

事实上，对等式(13β)施行微分，我們得到:

$$\left.\begin{aligned}\delta''&=2\{1+y'^2+y''(y-b)\},\\ \delta''_0&=2\{1+y_0'^2+y''_0(y_0-b)\}.\end{aligned}\right\}\qquad(13\gamma)$$

如果 $y''_0\neq0$，則三个方程: $\delta_0=0,\ \delta'_0=0,\ \delta''_0=0$ 完全决定 a, b 与 R:

$$y_0-b=-\frac{1+y_0'^2}{y''_0},$$

$$x_0-a=y'_0\frac{1+y_0'^2}{y''_0},$$

$$R^2=(x_0-a)^2+(y_0-b)^2=\frac{(1+y_0'^2)^3}{y_0''^2}.\qquad(15)$$

圓(15)就是密切圓。