

岩石圈动力学

Lithosphere Dynamics

金煜 姜效典 著

Yu Jin & Xiaodian Jiang



科学出版社

www.sciencep.com

岩石圈动力学

Lithosphere Dynamics

金 煜 姜效典 著
Yu Jin & Xiaodian Jiang

科学出版社

2002

内 容 简 介

本书是作者在美国麻省理工学院研究期间的主要成果,是以岩石圈的实质组构特征为出发点,从弹性力学、流体力学及热力学等各方面全面、系统地阐述岩石圈动力学的研究方法、存在问题及今后研究方向。内容包括:岩石圈及其组构特征、岩石圈动力学特征、弹性力学特征、流体力学特征及岩石圈的各向异性,最后对岩石圈动力学今后的研究进行了展望。本书的出版对寻找油气资源和认识地震灾害有参考价值。

本书可供地质、地球物理、石油勘探、矿产调查等部门的科研工作者,地球物理专业本科生和研究生参考使用。

图书在版编目(CIP)数据

岩石圈动力学/金煜,姜效典著. —北京:科学出版社,2002

ISBN 7-03-010004-2

I. 岩… II. ①金… ②姜… III. 岩石圈-动力学 IV. P583

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2002)第 000550 号

科 学 出 版 社 出 版

北京东黄城根北街16号

邮政编码:100717

<http://www.sciencep.com>

新 华 印 刷 厂 印 刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2002年9月第 一 版 开本:787×1092 1/16

2002年9月第一次印刷 印张:15 插页:1

印数:1—800 字数:342 000

定价:40.00 元

(如有印装质量问题,我社负责调换〈环伟〉)

目 录

第一章 绪言	(1)
第二章 岩石圈及其组构特征	(3)
§ 2.1 应力与应变	(4)
§ 2.2 岩石圈的弹性组构定律	(7)
§ 2.3 岩石圈的塑性组构定律	(10)
§ 2.4 摩擦组构定律	(11)
§ 2.5 屈服应力场	(18)
第三章 岩石圈的热力学特征	(27)
§ 3.1 岩石圈基本热力学方程	(27)
§ 3.2 非稳定岩石圈温度场	(36)
§ 3.3 岩石圈的均匀拉张热力学问题	(41)
§ 3.4 岩石圈的非均匀拉张热力学问题:两层拉张模型	(48)
§ 3.5 岩石圈屈服应力场的定量描述	(52)
第四章 岩石圈的弹性力学特征:岩石圈的挠曲形变	(59)
§ 4.1 弹性板理论基本方程	(59)
§ 4.2 弹性板理论二维问题的应用	(75)
§ 4.3 弹性板理论在三维频率域的应用	(96)
§ 4.4 弹性板理论在三维空间域的应用	(113)
§ 4.5 非弹性组构下的挠曲问题	(129)
第五章 岩石圈的流体力学特征	(134)
§ 5.1 地壳的小尺度褶皱	(134)
§ 5.2 完整岩石圈的塑变问题	(153)
§ 5.3 岩石圈塑变问题的有限元解法及实例	(167)
第六章 岩石圈的各向异性	(182)
§ 6.1 地震波速度与各向异性的关系	(184)
§ 6.2 用广义矩阵元正演全各向异性地震波	(195)
第七章 岩石圈动力学的展望	(217)
参考文献	(222)
图 目	(225)
彩 图	

CONTENTS

Chapter 1	Introduction	(1)
Chapter 2	Lithosphere and Its Constitutive Laws	(3)
§ 2.1	Stress and Strain	(4)
§ 2.2	Elastic Property of Lithosphere	(7)
§ 2.3	Viscous Property of Lithosphere	(10)
§ 2.4	Friction Law of Rocks	(11)
§ 2.5	Yield Stress Envelope of Lithosphere	(18)
Chapter 3	Thermal Dynamics of Lithosphere	(27)
§ 3.1	First Law of Thermal Dynamics	(27)
§ 3.2	Temperature Field of Non-steady State within Lithosphere	(36)
§ 3.3	Uniform Extension Model of Lithosphere	(41)
§ 3.4	Non-uniform Extension Model of Lithosphere: Two Layer Stretching Model	(48)
§ 3.5	Quantitative Description of Yield Stress Envelope for Lithosphere	(52)
Chapter 4	Elastic Dynamics of Lithosphere: Flexure of Lithosphere	(59)
§ 4.1	Governing Equation of Elasticity of Lithosphere	(59)
§ 4.2	2D Flexural Theory and its Application	(75)
§ 4.3	3D Flexural Application in Spectral Domain	(96)
§ 4.4	Facing the Real World: 3D Inhomogeneous Lithosphere Derived from Space Domain	(113)
§ 4.5	Tackling Non-elastic Problems of Lithospheric Flexure	(129)
Chapter 5	Characterizing the Lithosphere with Fluid Mechanics	(134)
§ 5.1	Small Scale Folding within Crust	(134)
§ 5.2	Full Consideration of a Viscous Lithosphere	(153)
§ 5.3	Finite Element Solution for Lithosphere	(167)
Chapter 6	Anisotropic Property of Lithosphere	(182)
§ 6.1	Eigenvalue Solution of Seismic Velocities in Anisotropic Lithosphere	(184)
§ 6.2	Seismic Waves of Full Anisotropy Derived from Generalized Matrix Element: an Application of Seismic Wave Propagation in an Ani-	

isotropic Lithosphere	(195)
Chapter 7 Speculating the Future of Lithospheric Dynamics	(217)
References	(222)
List of Figures	(225)
Color Plates	

第一章 绪 言

宇宙天体在形成过程中由于万有引力的作用,物质按轻重分选,重物质易于被万有引力捕捉而趋近于核部,而轻物质则易于向外逃逸,构成天体的外层。人类所赖以生存的地球也不例外。它按物质轻重分选从外向内分为气圈、水圈、地壳、地幔和地核。而岩石圈就是由全部地壳和地幔最外表一部分坚硬的岩石组成。关于岩石圈更确切的定义,我们将在下一章详述。如果把鸡蛋比作地球,则鸡蛋壳对应的是岩石圈。但大自然在塑造地球的时候,并没像母鸡下蛋时,将蛋壳的薄厚、连续性和化学成分分选得如此一致。否则我们这本书要介绍的岩石圈动力学及与其相关的自然现象,如火山活动、地震等等也就不会发生了。

岩石圈充其量可比作一个破碎的鸡蛋壳,而其破碎的块体之间还在相对运动。早在1620年,英国哲学家弗朗西斯·贝肯爵士(Sir Francis Bacon, 1561~1626)就注意到非洲西海岸与南美洲东海岸的相似(彩图1)。这种早期的“大陆漂移”思想又进一步在佛朗克·泰勒(Frank Taylor, 1910)的文章中加以说明。详细阐述大陆漂移理论的著作应归于阿尔佛莱德·威格纳(Alfred Wegener)1912年的“大陆与海洋的起源”(The Origin of Continents and Oceans)。作为一个气象学家,威格纳注意到冰川地貌居然出现在赤道,而热带条件下形成的化石竟出现在高纬地区。他推论,世界各大陆是由一个超古陆(Super Continent)盘吉亚(Pangaea)分裂而成。他认为超古陆的分裂与分裂后各块体的漂移是由潮汐力或地球自转加速度的变化引起的力所造成。后者正是李四光先生地质力学的动力源。本书要讲的岩石圈动力学是从岩石圈自身的性质出发,来阐述大陆漂移及后来在此基础上发展起来的板块构造理论(Plate Tectonics)的动力学机制。

1937年亚利桑大·杜·图特(Alexandre du Toit)在他的著作“我们漫游的大陆”中进一步提出古大陆曾经分为南北两陆。北边的叫劳瑞沙(Laurasia),南边的叫冈瓦纳(Gondwanaland),中间由特提斯海(Tethys ocean)分隔。

20世纪50年代,大量的海底地形勘探发现海底存在很多山脉,后称为洋中脊。1961年,Harry Hess推论洋壳是由洋中脊生成并向两边扩张(seafloor spreading)。他的理论解释了大西洋两岸的相似性从何而来,原来是大西洋中脊向外扩张,将非洲和美洲大陆分开(彩图1)。

20世纪60年代,大量的海底详测发现海底的磁异常成条带状,正负相间,并与洋中脊平行(图1.1)。进一步研究还发现产生这些异常的洋壳的年龄离洋中脊越远则越老,从而可以算出洋壳由洋中脊产生后向两侧运动的轨迹及速度。至此,一个完整的大陆漂移理论,由假说逐渐变成了有科学根据的事实,板块构造学(plate tectonics)应运而生。但早期的板块理论只是假设板块是刚性的,其内部不发生形变。这种理论漂亮地描述了板块间的相互运动,也即描述了板块构造的运动学(Kinematics)特征,对板块理论的奠定与发展起到了极大的推进作用。但从20世纪60年代至今的30多年来随着对全球各大板块的深入研究,人们发现板块并非刚性,而且陆壳与洋壳有实质性的区别。为此近年来人

们的目光开始由板块运动学转向板块动力学也即本书要讨论的岩石圈动力学。人类已经积累了很多板块间运动的知识。但板块的物理化学性质是什么？由此而引起的各种形变机制是什么？产生地球表层丰富多彩的地质现象的源动力又是什么？则成为地球科学家希望进一步探讨的问题。

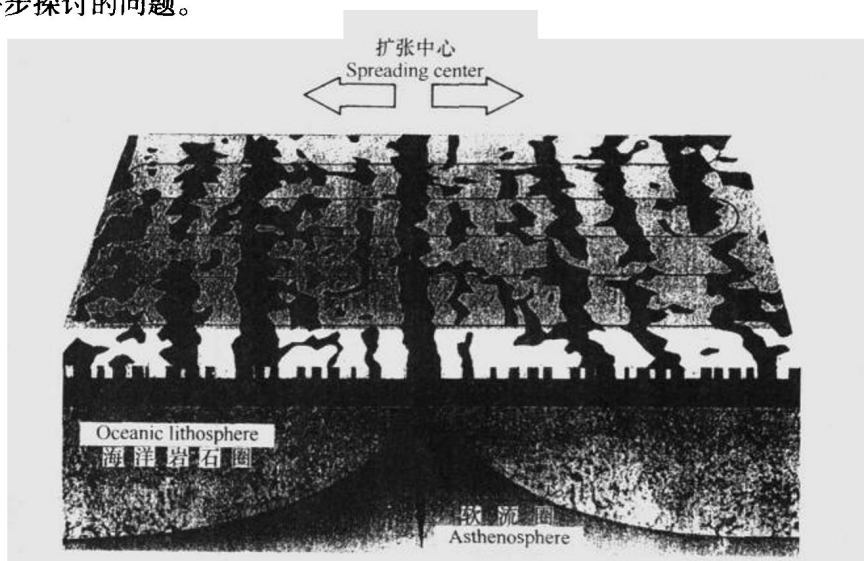


图 1.1 海底磁条带

Figure 1.1 Magnetic stripes on the ocean floor

岩石圈动力学是近年来随着板块构造学的发展逐渐兴起的一门学科。国际上早有大量的科学文章发表。对岩石圈研究涉猎的学科极其广泛,包括构造地质学、构造地球物理学、地震学、沉积学、弹性力学、流体力学、断裂力学、大地测量学、岩石学和放射地质学等等,几乎囊括了地球科学的全部学科。因此岩石圈动力学可称为一门杂学。但国内这方面的文章还很有限,被国际上广为引用的更是屈指可数。虽然目前国际上在岩石圈动力学方面文章很多,但还没有一本系统阐述这门新兴科学的著作。因此我们认为有必要写一本岩石圈动力学的著作,将金煜博士在美国近十年所学及姜效典教授在国内对岩石圈动力学的研究综合一体,完整地将此献给祖国。

第二章 岩石圈及其组构特征

正如鸡蛋壳的厚度似乎对整个鸡蛋来讲微乎其微,岩石圈的厚度对地球来讲似乎也如此。地球的平均半径是 6371km,其中地核占 3471km,地幔占近 2900km,而岩石圈只是近地表的 120km 左右,约占地球半径的 2%,而且存在极大的横向不均匀性(图 2.1)。由图中可见,由于巨厚的陆壳及非常薄的洋中脊使大陆岩石圈与大洋岩石圈之间产生显著差别。在大洋中脊附近(彩图 1,图 2.1),岩石圈几乎没有厚度,而在古老的大陆区,如加拿大和西伯利亚地盾(shield),有人估算有 400km 厚,这种巨厚的岩石圈被称为构造圈(Tectosphere Jordan, 1975)。

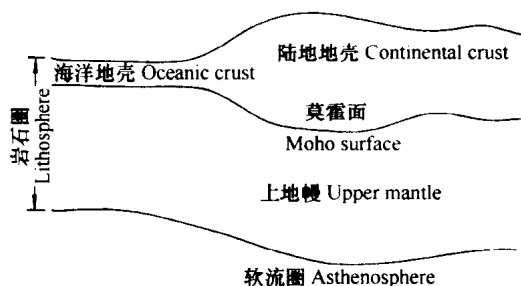


图 2.1 岩石圈结构剖面图

Figure 2.1 Cross section of the lithosphere

与整个地球相比,岩石圈似乎微不足道,但它却与人类息息相关,地震、火山、造山活动等很多自然现象都发生在岩石圈上,似乎地球的喜怒哀乐都通过岩石圈表现出来。因而岩石圈是人类认识地球的窗口。它也可能是造成地幔对流的原因,而不是结果。

给岩石圈准确的下定义很难。如前所述,它由一些漂浮在地幔上的大船(即板块)组成。但这些大船是由什么驱动的,到现在还是个争论不休的问题。目前主导理论还是地幔对流(mantle convection)。

岩石圈动力学是通过研究岩石圈的物理化学特征来认识板块和板内运动及其变形规律的。地球表面不像鸡蛋壳那样,前者横向极不均匀,而后者横向均匀一致。岩石圈的横向不均匀性主要表现在陆壳与洋壳的差别。陆壳以花岗岩为主,矿物构成多为石英、长石,质量较轻,体积大,易于漂浮在地幔上;而洋壳则为大洋中脊生成的玄武岩,以橄榄石为主,较重,不易浮在地幔上。大洋岩石圈由洋中脊生成最后消失在海沟,而大陆岩石圈由于较轻,长期“漂浮”在地幔之上。大陆和大洋岩石圈的基本组构见图 2.2。

岩石圈的物理性质与温度关系很大。在地表处,温度较低,因此岩石圈在受力后(力源多来自板块间相互作用),首先是表现为弹性(elastic),受力到一定程度岩石无法承受外界的作用,开始脆裂(brittle failure),发生地震将弹性能释放出来。当温度升高到一定程度岩石内矿物的分子动能增加,随受力后发生缓慢蠕动(ductile creep),而不是断裂。因为地壳中地温随深度增加较快(约为 $30^{\circ}\text{C}/\text{km}$),因此地震震源一般都不深。如美国西海

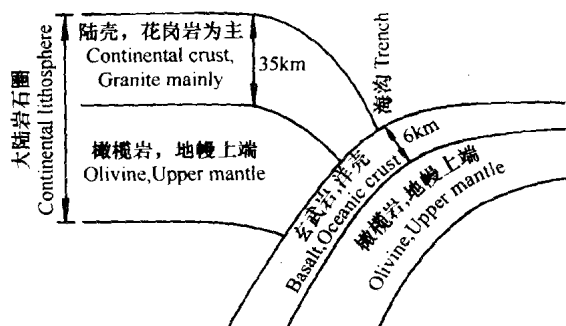


图 2.2 大陆岩石圈与大洋岩石圈的化学结构

Figure 2.2 Major rock components of the continental and oceanic lithospheres

岸的 San Andreas 右滑断层产生的地震震中一般要小于 15km。中国东部(如华北平原)的地震震中也不深。

岩石圈在受到外力作用后,由于本身化学成分及温度的不同,产生的形变也不同,如有时形变表现为弹性,有时为脆性、有时为塑性。这些岩石圈受力与形变的关系及其形变间的相互转换是岩石圈动力学的核心。受力与形变的关系称为组构定律(constitutive law),我们下面将一一描述。由于地球近于连续介质,我们用应力(stress)与应变(strain)建立其组构关系。在以下各小节中,我们先介绍应力与应变,然后分别介绍各类组构关系,包括弹性组构定律、塑性组构定律、脆裂组构定律,最后用屈服应力场将三种组构定律加以概括,使我们可以很自然地用屈服应力场定义岩石圈。

应力、应变及组构定律的引入牵涉到一些张量分析的知识,作者尽量将所需要的张量知识,详加介绍,使读者不致于还没有接触到岩石圈动力学的精华,就被张量所困扰而止步不前。如果读者对此感到困难,可直接跳到屈服应力场一节,先记住结论。

§ 2.1 应力与应变

由于地球是连续介质,我们需要对地球内部物质的受力情况用应力来描述,而不是像中学物理或大学中的理论力学那样用力来描述物体受力。应力是物体单位面积上所受的力。由于面积也有方向,因此应力不是矢量而是张量,有九个分量(图 2.3),应力用矩阵形式可表示为

$$\underline{\underline{\tau}} \equiv \begin{bmatrix} \tau_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \tau_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \tau_{zz} \end{bmatrix} \quad (2.1)$$

应力的第一个角标一般定义为作用面,而第二个为作用力的方向,如 τ_{xz} 表示作用在面 x 沿 z 方向的应力。

在张量分析中人们常用 (x_1, x_2, x_3) 来表示 (x, y, z) 。此时应力场表示为

$$\underline{\underline{\tau}} \equiv \begin{bmatrix} \tau_{11} & \tau_{12} & \tau_{13} \\ \tau_{21} & \tau_{22} & \tau_{23} \\ \tau_{31} & \tau_{32} & \tau_{33} \end{bmatrix} \quad (2.2)$$

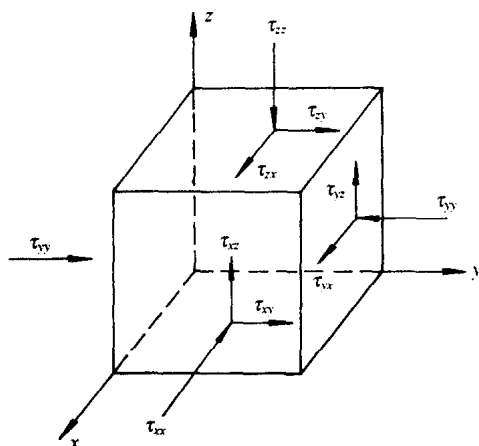


图 2.3 应力场坐标

Figure 2.3 Stress field coordinates

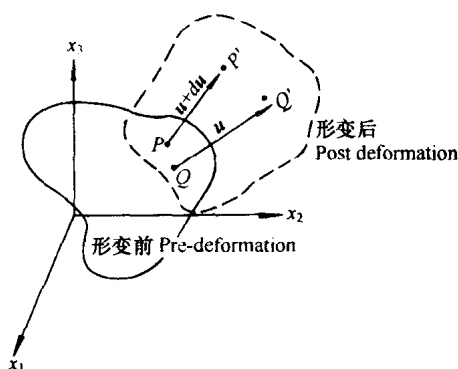


图 2.4 物体形变图示

实线表示为物体形变前,虚线表示为形变后

Figure 2.4 Schematics of deformation

当物体受到外力作用时将产生形变(deformation)、整体位移及旋转。图 2.4 所示物体受力产生形变前后的状态。

物体位移前的两个点 P 、 Q 受力后位移到 $P'(u + du)$ 、 $Q'(u)$ 。我们所研究的是物体的形变 du 而不是整体位移 u , 也即关心的是 PQ 与 $P'Q'$ 的差异。不难看出 du 是 (x_1, x_2, x_3) 的函数, 且由全微分得到。

$$\begin{aligned} du(x_1, x_2, x_3) &= du_1(x_1, x_2, x_3)\mathbf{i} + du_2(x_1, x_2, x_3)\mathbf{j} + du_3(x_1, x_2, x_3)\mathbf{k} \\ &= \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial u_1}{\partial x_2} dx_2 + \frac{\partial u_1}{\partial x_3} dx_3 \right) \mathbf{i} + \left(\frac{\partial u_2}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} dx_2 + \frac{\partial u_2}{\partial x_3} dx_3 \right) \mathbf{j} + \\ &\quad \left(\frac{\partial u_3}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial u_3}{\partial x_2} dx_2 + \frac{\partial u_3}{\partial x_3} dx_3 \right) \mathbf{k} \end{aligned}$$

用矩阵形式表示有

$$du = \begin{bmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial x_1} & \frac{\partial u_1}{\partial x_2} & \frac{\partial u_1}{\partial x_3} \\ \frac{\partial u_2}{\partial x_1} & \frac{\partial u_2}{\partial x_2} & \frac{\partial u_2}{\partial x_3} \\ \frac{\partial u_3}{\partial x_1} & \frac{\partial u_3}{\partial x_2} & \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} dx_1 \\ dx_2 \\ dx_3 \end{bmatrix} \quad (2.3)$$

其中矩阵的任一项可表示为

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_j} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)$$

上式第一项描述的是物体的形变,我们定义为应变,而第二项描述的是物体的刚体转动。由此定义应变张量为

$$\epsilon_{ij} \equiv \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \quad (2.4)$$

转动张量为

$$\omega_{ij} \equiv \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \quad (2.5)$$

下面我们证明 ω_{ij} 描述的只是物体的转动。

由图 2.5 得(假设 $\alpha \rightarrow 0$)

$$\alpha \approx \tan \alpha = \frac{\partial u_1}{\partial x_2} = -\frac{\partial u_2}{\partial x_1}$$

所以

$$\alpha = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2} - \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \right) = \omega_{12}$$

其他转动张量 ω_{ij} 以此类推。

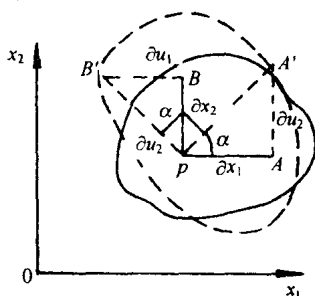


图 2.5 物体转动张量图示

Figure 2.5 Schematics of rotation tensor

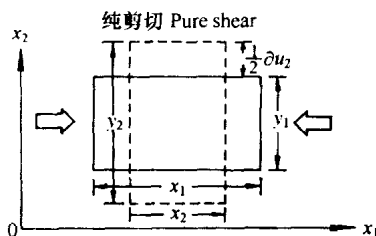


图 2.6 纯剪切形变图示

Figure 2.6 Graphic representation
pure shear deformation

岩石圈动力学研究的是板块受力后产生的形变以及形变与应力间的关系,因此物体的刚体转动与平移不是我们研究的主要对象,而应变(2.4)式是本书的重点讨论对象。下面介绍一些应变的实例。

1. 纯剪切(pure shear)

$$\frac{y_2 - y_1}{y_1} = \frac{dy}{y_1} = \frac{\partial u_2}{\partial x_2}$$

令 $y_1 \rightarrow 0$, 则 $y_1 = \partial x_2$

所以

$$\frac{\partial u_2}{\partial x_2} = \frac{\partial u_2}{\partial x_2}$$

由(2.4)式,我们有纯剪切与应变的关系

$$\epsilon_{22} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} \right) = \frac{\partial u_2}{\partial x_2}$$

2. 简单剪切 (simple shear)

图 2.7 所示为物体受剪切力作用后产生的形变,可用角度 φ 量度。

在小角度下

$$\operatorname{tg} \varphi_{12} \approx \varphi_{12} = \frac{du_1}{dx_2}$$

同理可有

$$\operatorname{tg} \varphi_{21} = \frac{du_2}{dx_1}$$

由(2.4)式可得简单剪切与应变的关系

$$\epsilon_{12} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \right)$$

有了以上应力与应变的概念,下面我们可以介绍岩石圈在受力后常见的三种应变特征,即弹性(elastic)特征、塑性(viscous)特征和脆裂(brittle)特征。本书所描述的塑性主要是指物质的黏滞性(viscous)。

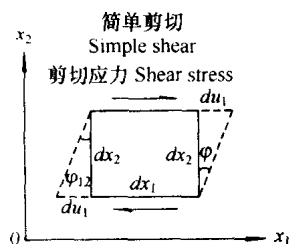


图 2.7 简单剪切形变图示
Figure 2.7 Graphic representation of simple shear deformation
实线为剪切前,虚线为剪切后

§ 2.2 岩石圈的弹性组构定律

如前所述,岩石圈在不同条件下表现出不同的物理特征。例如,地表温度较低,岩石圈在受力后多表现为弹性性质,当受力大到一定程度,近地表处发生脆裂产生地震,将弹性能释放,并由地震波将弹性能通过地球传到世界各地。因岩石圈可近似成连续介质,本节将着重介绍连续介质的弹性组构定律,以便为后面介绍岩石圈的弹性动力学做准备。

人类对物质的弹性性质并不陌生。我们在中学就学过,一根弹簧受力后形变,其形变与力成正比。表示为

$$F = k \Delta x$$

其中 F 为弹力, Δx 为弹簧的长度变化,而 k 是一个比例系数,称为胡克(Hooke)系数。上式就是最简单的弹性组构定律(Elastic Constitutive Law),称为胡克定律。

但对于连续介质,物体本身的弹性组构性质要复杂得多,要用前面(2.2)式应力及(2.4)式应变间的关系来量度,即

$$\tau_{ij} = C_{ijkl} \epsilon_{kl} \quad i, j, k, l = 1, 2, 3 \quad (2.6)$$

该式称为广义胡克定律(Generalized Hooke's Law)。系数 C_{ijkl} 称为广义胡克系数,或称为弹性模量(elastic modulus)。(2.6)式中引进了爱因斯坦和(Einstein Summation)。即

$$\tau_{ij} = C_{ijkl} \epsilon_{kl} = \sum_{k=1}^3 \sum_{l=1}^3 C_{ijkl} \epsilon_{kl} \quad (2.7)$$

在张量运算中常将求和(“ $\sum$ ”)省去以方便运算。因为等式左端只有角标 ij ,而等式右端有 $ijkl$,因此如果使等式在左右的角标一致,则 kl 必须用求和消掉。因此写求和号 $\sum$ 与不写,不会产生误会。刚开始看爱因斯坦和可能觉得不习惯。随着本书的展开读者会发现,掌握了爱因斯坦和的运算方式,会大大简化繁长的运算。

弹性模量 C_{ijkl} 是个四阶张量, 有 81 个分量。这么多分量会给演绎分析带来许多麻烦。我们下面用应力与应变的对称性及能量关系证明, C_{ijkl} 只有 21 个分量是独立的。

公式(2.1)给出了应力场的表达式, 其中主对角线上是正应力, 它们与作用面垂直(图 2.3), 而非主对角线元素是切应力, 它们与作用面相切。切应力的作用是使体积元(图 2.3)旋转且产生简单剪切应变。对于连续介质, 其内部受到切应力作用后并不发生连续转动, 因此在连续介质内部角动量是守恒的, 从而可给出应力场的对称性, 以图 2.3 为例, 对于 z 轴的旋转我们有角动量守恒

$$dx \otimes \tau_{xy} dy dz + dy \otimes \tau_{yx} dx dz = 0$$

其中 $\otimes$ 表示叉乘(cross product), 因为叉乘角为 90° , 故有

$$\tau_{xy} dx dy dz - \tau_{yx} dy dx dz = 0$$

因此有

$$\tau_{xy} = \tau_{yx}$$

同理:

$$\tau_{xz} = \tau_{zx} \quad \text{且} \quad \tau_{yz} = \tau_{zy}$$

一般形式为

$$\tau_{ij} = \tau_{ji} \quad (2.8)$$

由(2.4)式不难看出

$$\epsilon_{ij} = \epsilon_{ji} \quad (2.9)$$

由应力与应变的对称性得知, 做为九分量的二阶张量应力与应变实际分别只有六个独立的分量。因此 81 个分量的广义胡克系数 C_{ijkl} 可写成如下 36 个分量的形式。

由(2.7), (2.8), (2.9)式得

$$\begin{bmatrix} \tau_{11} \\ \tau_{22} \\ \tau_{33} \\ \tau_{12} \\ \tau_{13} \\ \tau_{23} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{1111} & C_{1122} & C_{1133} & C_{1112} & C_{1113} & C_{1123} \\ C_{2211} & C_{2222} & C_{2233} & C_{2212} & C_{2213} & C_{2223} \\ C_{3311} & C_{3322} & C_{3333} & C_{3312} & C_{3313} & C_{3323} \\ C_{1211} & C_{1222} & C_{1233} & C_{1212} & C_{1213} & C_{1223} \\ C_{1311} & C_{1322} & C_{1333} & C_{1312} & C_{1313} & C_{1323} \\ C_{2311} & C_{2322} & C_{2333} & C_{2312} & C_{2313} & C_{2323} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \epsilon_{11} \\ \epsilon_{22} \\ \epsilon_{33} \\ 2\epsilon_{12} \\ 2\epsilon_{13} \\ 2\epsilon_{23} \end{bmatrix} \quad (2.10)$$

由前所述, 我们要证明 C_{ijkl} 只有 21 个独立分量, 因此只有 τ_{ij} 与 ϵ_{ij} 的对称性还不够, 我们要用到应变能, 从而证明: $C_{ijkl} = C_{klij}$ 。

在中学我们就学过外力所做的功等于力乘以距离, 即 $F\Delta x$ 。其中 F 为力, Δx 为 F 作用的距离。对于弹簧来讲, 机械力做功将转化为其势能。

$$F\Delta x = (k\Delta x)\Delta x \quad \Delta x \rightarrow 0$$

对于连续介质, 相应的应变势能为

$$W = \tau_{ij}\epsilon_{ij} = C_{ijkl}\epsilon_{kl}\epsilon_{ij} \quad (2.11)$$

在这里我们继续用到了爱因斯坦和, 也即

$$W = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \tau_{ij}\epsilon_{ij} = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \sum_{k=1}^3 \sum_{l=1}^3 C_{ijkl}\epsilon_{kl}\epsilon_{ij}$$

由于 W 无角标, 因此 W 是个标量, 它描述的是连续介质的机械势能。需要再一次强调

的是,本书将贯穿爱因斯坦和。

即然 W 是个标量。(2.11)式还可表示为

$$W = \tau_{kl} \epsilon_{kl} = C_{kl ij} \epsilon_{ij} \epsilon_{kl}$$

因为:

$$\frac{\partial^2 W}{\partial \epsilon_{ij} \partial \epsilon_{kl}} = \frac{\partial^2 W}{\partial \epsilon_{kl} \partial \epsilon_{ij}}$$

因此有

$$C_{ijkl} \equiv C_{klij} \quad (2.12)$$

由此(2.10)式的系数矩阵,只有 21 个独立分量,也即

$$\begin{bmatrix} \tau_{11} \\ \tau_{22} \\ \tau_{33} \\ \tau_{12} \\ \tau_{13} \\ \tau_{23} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{1111} & C_{1122} & C_{1133} & C_{1112} & C_{1113} & C_{1123} \\ C_{1122} & C_{2222} & C_{2233} & C_{2212} & C_{2213} & C_{2223} \\ C_{1133} & C_{2233} & C_{3333} & C_{3312} & C_{3313} & C_{3323} \\ C_{1112} & C_{2212} & C_{3312} & C_{1212} & C_{1213} & C_{1223} \\ C_{1113} & C_{2213} & C_{3313} & C_{1213} & C_{1313} & C_{1323} \\ C_{1123} & C_{2223} & C_{3323} & C_{1223} & C_{1323} & C_{2323} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \epsilon_{11} \\ \epsilon_{22} \\ \epsilon_{33} \\ 2\epsilon_{12} \\ 2\epsilon_{13} \\ 2\epsilon_{23} \end{bmatrix} \quad (2.13)$$

系数矩阵 C_{ijkl} 描述岩石的基本弹性性质,21 个模量包括了岩石的全部各向异性(anisotropy)。但对于岩石圈弹性性质的研究我们主要假设岩石圈是各向同性的(isotropic)。在这种情况下,只有两个弹性模量是独立的。从而 C_{ijkl} 可表示为

$$C_{ijkl} \equiv \lambda \delta_{ij} \delta_{kl} + \mu (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}) \quad (2.14)$$

其中 λ 和 μ 称为拉梅系数(lamé parameters), δ_{ij} 称为狄拉克(dirac)函数,具有特性:

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases} \quad (2.15)$$

将(2.14)式代入(2.7)得

$$\begin{aligned} \tau_{ij} &= C_{ijkl} \epsilon_{kl} = [\lambda \delta_{ij} \delta_{kl} + \mu (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk})] \epsilon_{kl} \\ &= \lambda \delta_{ij} \epsilon_{kk} + \mu (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}) \epsilon_{kl} \\ &= \lambda \delta_{ij} \epsilon_{kk} + \mu (\epsilon_{ij} + \epsilon_{ij}) \\ &= \lambda \epsilon_{kk} \delta_{ij} + 2\mu \epsilon_{ij} \end{aligned}$$

也即,在各向同性下有

$$\tau_{ij} = \lambda \epsilon_{kk} \delta_{ij} + 2\mu \epsilon_{ij} \quad (2.16)$$

上式是我们研究岩石圈动力学弹性部分的基本组构表达式。

比较(2.13)式与(2.16)式,有

$$\begin{bmatrix} \tau_{11} \\ \tau_{22} \\ \tau_{33} \\ \tau_{12} \\ \tau_{13} \\ \tau_{23} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda + 2\mu & \lambda & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda + 2\mu & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda & \lambda + 2\mu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mu \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \epsilon_{11} \\ \epsilon_{22} \\ \epsilon_{33} \\ 2\epsilon_{12} \\ 2\epsilon_{13} \\ 2\epsilon_{23} \end{bmatrix} \quad (2.17)$$

因此

$$\begin{aligned}C_{1111} = C_{2222} = C_{3333} &= \lambda + 2\mu \\C_{1212} = C_{1313} = C_{2323} &= \mu \\C_{1122} = C_{2211} = C_{1133} = C_{3311} = C_{2233} = C_{3322} &= \lambda\end{aligned}$$

以上介绍的是岩石圈物质的弹性组构,下面我们来看岩石圈的塑性组构。

§ 2.3 岩石圈的塑性组构定律

与前节介绍的岩石圈的弹性性质相关的最好例子是地震。当地震发生时,岩石圈在瞬间将其内部聚集的弹性能释放出来。一般讲,地震是岩石圈在低温下产生的现象,此时组成岩石圈的物质结构比较紧密,物质间以分子间的势能胶结。我们知道,近地表温度较低,一般地温梯度是 $30^{\circ}\text{C}/\text{km}$,越往地下,温度就越高,从而组成岩石圈的物质分子动能增加,即温度增加(温度是物质分子平均动能的描述)。在这种情况下,岩石圈受力后表现为塑性,发生蠕变而不产生脆裂地震。各种实验表明,塑性岩石的基本组构定律,即应变与应力的关系为(Turcotte and Schubert, 1982)。

$$\dot{\epsilon}_2 = C\sigma^n e^{-\frac{E_a}{RT}} \quad (2.18)$$

其中 $\dot{\epsilon}_2$ 为应变率,即 $\frac{\partial \epsilon_2}{\partial t}$, ϵ_2 为应变的第二不变量(我们后面要讲到), C 为比例系数, σ 为屈服应力场,我们在本章最后一节介绍, E_a 为岩石中分子活性能(activation energy), R 为普适气体常数, T 为岩石温度。

我们知道温度是分子平均动能的宏观描述。物质温度升高,物质分子动能加大,物质倾向于宏观流动,这种流动对岩石来讲是极其缓慢的蠕变(ductile creep)。岩石圈的地幔部分(图 2.2)的主要矿物成分是橄榄石(olivine)。实验室实验表明,橄榄石在高温下(约 1000°C)的塑性组构定律是

$$\dot{\epsilon}_2 = C\sigma^n e^{-\frac{E_a}{RT}}$$

其中 $C = 4.2 \times 10^{-5} \text{MPa}^{-3}/\text{s}$, $E_a = 523 \text{kJ}(\text{千焦耳})/\text{mol}$, 而指数 $n = 3$ 。

对其他岩石矿物实验得到的塑性组构参数见表 2.1。

表 2.1

材 料	$C(\text{MPa}^{-n}\text{s}^{-1})$	n	$E_a(\text{kJmol}^{-1})$
冰(ice)	8.8×10^5	3	60.7
岩盐(halite)	9.5×10^{-1}	5.5	98.3
干石英岩(dry quartzite)	6.7×10^{-12}	6.5	268
湿石英岩(wet quartzite)	4.4×10^{-2}	2.6	230
石灰岩(limestone)	4.0×10^3	2.1	210
辉绿岩(diabase)	5.2×10^2	3	356

从上表应注意的是指数 n , 它实际上是一个分维维数(fractal dimension)。它可以是整数, 也可以是分数, 因此它是岩石圈物质非线性(non-linear)特征的标志。表 2.1 中石英岩和辉绿岩是组成上地壳及下地壳的主要成分, 因此我们计算地壳的蠕变性质时主要用以上两种岩石, 尤其是石英岩。

岩石在高温下的蠕变本质上也是流动, 因此这种蠕变也满足广义流体的组构性质, 即应力与应变之间存在关系

$$\tau_{ij} = -p\delta_{ij} + 2\mu\dot{\epsilon}_{ij} \quad (2.19)$$

其中 τ_{ij} 为应力, $\dot{\epsilon}_{ij}$ 为应变率, p 为压力, μ 为黏滞度(viscosity)。对于一般流体, 如水、油等, 其黏滞度与应力和应变无关, 这类流体称为线性流体, 或称为牛顿流体。但对于熔融的岩浆则不同, μ 与应力及应变相关。如果此时继续假设黏滞度是应力应变率之间的比例关系, 则由(2.18)式

$$\sigma^n = \frac{1}{C} e^{E_a/RT} \dot{\epsilon}_2$$

$$\sigma = \left(\frac{1}{C} e^{E_a/RT} \dot{\epsilon}_2 \right)^{\frac{1}{n}} = \left(\frac{1}{C} e^{\frac{E_a}{RT}} \right)^{\frac{1}{n}} \dot{\epsilon}_2^{\frac{1}{n}-1} \dot{\epsilon}_2$$

设

$$\mu_0 \equiv \left(\frac{1}{C} e^{\frac{E_a}{RT}} \right)^{\frac{1}{n}} \quad (2.20)$$

则岩石的黏滞度为

$$\mu = \mu_0 \left(\frac{1}{\dot{\epsilon}_2} \right)^{1-\frac{1}{n}} \quad (2.21)$$

当 $n=1$ 时, 我们得到牛顿流体, 否则我们得到非线性流体。由表 2.1 我们知道大部分岩石 $n \neq 1$, 因此岩石的蠕变并非一般的流动。公式(2.21)是我们研究岩石圈动力学蠕变的基本组构定律。

以上我们介绍了研究岩石圈的两个基本组构定律: 广义胡克定律(2.6 式)和岩石蠕变定律(2.21 式), 下面我们介绍岩石圈的最后一个主要组构定律, 即摩擦定律(friction Law or Byerlee's Law)。

§ 2.4 摩擦组构定律

岩石圈的断裂摩擦现象应该是最为人类熟知的自然现象之一, 因为断裂摩擦的直接产物就是地震。如前所述, 岩石圈是由很多板块组成。板块并不是刚性的。它们之间的相互运动, 相互作用使各板块形变, 且在板块内部及板块接触带产生了很多断裂。地球上著名的大断裂, 如中国西部的阿尔金左滑断层及美国西部的圣安德列斯(San Andreas)右滑大断层等就是最好的例子。人类对地震预报至今一筹莫展, 只知地震是地体间相互碰撞摩擦产生。因此我们在中学学到的摩擦定律, 基本上还是人类认识岩石圈断裂摩擦的