数学解题天才

多解全攻略

新课标

高中代数

开拓思路
创新解法
凝聚精华
提升能力

GAOZHONG DAISHU DUOJIE QUANGONGLUE

陈矿初 曾平 谭洁 编著

广西教育出版社

数学解题天才

高中代数多解全攻略

陈矿初　曾平　谭洁　编著

☆

广西教育出版社出版

南宁市鲤湾路 8 号

邮政编码:530022　电话:5850219

本社网址　http://www.gep.com.cn

读者电子信箱　master@gep.com.cn

全国新华书店经销　广西地质印刷厂印刷

开本 890×1240　1/32　10.75 印张　295 千字

2003 年 1 月第 4 版第 5 次印刷

印数:24 001—34 000 册

ISBN 7 5435-2668-9/G·2052　定价:15.00 元

前 言

代数是数学最基本的分支之一.所谓代数指的是可用字母代表一般的数,并研究数的关系、数的性质和数的运算的数学分支.

中学代数是中学阶段一门重要的学习课程,它涉及若干数学分支的基础部分,其核心是函数、方程(组)等内容.它涉及面广,内容多,问题错综复杂,变化多,学生不易掌握.

为了帮助广大高中生学好高中代数知识,开拓思路,沟通各学科之间的联系,提高分析问题和解决问题的能力,我们根据新教材的要求,结合我们多年的教学经验和积累,精选一批富有思考性、代表性及多解性的典型范例,编写了这本《高中代数多解全攻略》奉献给广大读者,希望它能成为中学教师指导学生学习不可缺少的参考资料,广大中学生和自学青年加深学习的良师益友.

本书的特点是着眼于代数中各部分内容的典型例题的常规方法,并同时挖掘问题的本质,从多角度"追踪",探索规律,提高解题的技巧.为了帮助读者加深理解,在各种解法前,阐明采用这些方法的动机和想法;每道题解答后都有简评,评价各种解法的优劣与关键,并总结解题规律;在每单元后面附有练习,供广大读者巩固、提高之用,书末附有练习的提示及答案,供大家对照与参考.

希望读者在阅读此书时,首先应独立思考,然后再与书中解法进行比较,以琢磨出最佳解法,提高解题能力.

编著者

目录

高中代数多解全攻略

一、函数

1. 已知全集 $U=\{1,2,3,4,5,6,7,8\}$，$M\subseteq U$，$N\subseteq U$，且 $M\cap N=\{3\}$，$(\complement_U M)\cap N=\{1,7,8\}$，$(\complement_U M)\cap(\complement_U N)=\{2,6\}$，求集合 M，N.

攻略 1 本题是研究集合的交、并、补三种运算，可通过交、并、补集的定义判断元素与集合的从属关系，从而使问题获解.

解法 1 $\because$ $M\cap N=\{3\}$，

$\therefore$ $3\in M$；$3\in N$.

$\because$ $(\complement_U M)\cap N=\{1,7,8\}$，

$\therefore$ $1,7,8\notin M$；$1,7,8\in N$.

又 $(\complement_U M)\cap(\complement_U N)=\{2,6\}$，

$\therefore$ $2,6\notin M$；$2,6\notin N$.

下面考虑余下的元素 4，5 是否属于 M，N：

若 $4\in N$，则因为 $4\notin M\cap N$，所以 $4\notin M$，即 $4\in(\complement_U M)$，则 $4\in(\complement_U M)\cap N$，这与 $(\complement_U M)\cap N=\{1,7,8\}$ 相矛盾，故 $4\notin N$.

又 $4\notin(\complement_U M)\cap(\complement_U N)$，

$\therefore$ $4\notin(\complement_U M)$，即 $4\in M$.

同理可得 $5\in M$，$5\notin N$.

故 $M=\{3,4,5\}$，$N=\{1,3,7,8\}$.

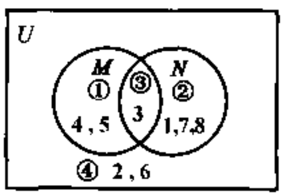

图 1

攻略 2 本题可利用文氏图来求解. 集合 M，N 将全集 U 分成如图 1 所示的①、②、③、④四个部分，然后根据题设条件确定这四个部分所含的元素.

解法 2 如图 1 所示，集合 M,N 将全集分成①、②、③、④四部分.

由 $M\cap N=\{3\}$，知③中含有 3；

由 $(\complement_U M)\cap N=\{1,7,8\}$，知②中含有 1,7,8；

由 $(\complement_U M)\cap(\complement_U N)=\complement_U(M\cup N)=\{2,6\}$，知④中含有 2,6；

余下的 4,5 只能在①中.

故 $M=\{3,4,5\}$，$N=\{1,3,7,8\}$.

简评 通过集合的交、并、补去求集合，一般用分析法(如解法 1)找出集合中一定含有或一定不含有的元素，然后再对余下元素逐个加以分析判断它的从属关系；利用文氏图进行集合运算(如解法 2)是解决集合问题的一种行之有效的重要方法，这种数形结合的思想方法既直观，又简捷.

2. 已知集合 $A=\{1,x,y\}$，$B=\{x,x^2,xy\}$，且 $A=B$，求实数 x,y 的值.

攻略 1 由条件 $A=B$ 可知：集合 A,B 中的元素完全相同，从而布列方程组进行求解. 根据集合元素的互异性对所求得的结果进行判断.

解法 1 $\because$ $A=B$，

$\therefore$ $\begin{cases}x^2=1,\\ xy=y.\end{cases}$ ① 或 $\begin{cases}x^2=y,\\ xy=1.\end{cases}$ ②

解①，得 $\begin{cases}x=1,\\ y\in\mathbf{R}.\end{cases}$ 或 $\begin{cases}x=-1,\\ y=0.\end{cases}$

当 $\begin{cases}x=1,\\ y\in\mathbf{R}\end{cases}$ 时，集合 A,B 中的元素不互异，所以 $\begin{cases}x=1\\ y\in\mathbf{R}\end{cases}$ 不符合题意，舍去；

当 $\begin{cases}x=-1,\\ y=0\end{cases}$ 时，集合 A、B 中的元素互异，所以 $\begin{cases}x=-1\\ y=0\end{cases}$ 符合

题意.

解②,得$\begin{cases}x=1,\\y=1.\end{cases}$

当$\begin{cases}x=1\\y=1\end{cases}$时,集合 A,B 中的元素不互异,所以$\begin{cases}x=1\\y=1\end{cases}$不符合题意,舍去.

$\therefore\quad x=-1,\ y=0.$

攻略 2　因为集合 A 中的 3 个元素与集合 B 中的 3 个元素相同,所以可从 A 中元素的和等于 B 中元素的和、A 中元素的积等于 B 中元素的积,布列方程组进行求解. 注意检验同一集合中的元素是否互异.

解法 2　$\because\quad A=B$,

$$\therefore\quad \begin{cases}1+x+y=x+x^2+xy,\\1\cdot x\cdot y=x\cdot x^2\cdot xy.\end{cases}$$

$$即\quad \begin{cases}(x-1)(x+y+1)=0 & ①\\xy(x^3-1)=0 & ②\end{cases}$$

由②得　$x=0$ 或 $x=1$ 或 $y=0$.

根据集合元素的互异性,得 $x\neq0$ 且 $x\neq1$.

$\therefore\quad y=0.$

把 $y=0$ 代入①,得 $x=-1$.

故　$x=-1,y=0.$

简评　解法 1 是根据"如果两个集合相等,则它们的元素完全相同",列出关于 x,y 的方程组进行求解;解法 2 是根据"如果两个集合相等,则它们元素的和与积分别相等",列出了关于 x,y 的方程组进行求解. 其中解法 2 避免了解法 1 中的分类讨论.

3. 集合 $A=\left\{x\mid x=\frac{k\pi}{2}+\frac{\pi}{4},k\in\mathbf{Z}\right\}$,$B=\left\{y\mid y=\frac{k\pi}{4}+\frac{\pi}{2},k\in\mathbf{Z}\right\}$,

则(　　)*.

(A)$A\subsetneqq B$　　(B)$A\supsetneqq B$　　(C)$A=B$　　(D)$A\cap B=\varnothing$

攻略 1　将 k 的若干数值代入集合 A,B.列举出集合 A,B 的部分元素,进行观察分析,从而得出结论.

解法 1　令 $k=\cdots$, 1,0,1,2,3,…代入集合 A,

得　$A=\left\{\cdots,-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4},\frac{3\pi}{4},\frac{5\pi}{4},\frac{7\pi}{1},\cdots\right\}$.

令 $k=\cdots,-3,-2,-1,0,1,2,3,4,5,\cdots$代入集合 B,

得 $B=\left\{\cdots,-\frac{\pi}{4},0,\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{4},\pi,\frac{5\pi}{4},\frac{3\pi}{2},\frac{7\pi}{4},\cdots\right\}$.

经观察,得 $A\subsetneqq B$,故选(A).

攻略 2　因为集合 A,B 中的元素表示的是角,所以可在直角坐标系中,以原点为角的顶点、x 轴的正半轴为角的始边,作集合 A,B 中所有角的终边,然后进行观察、判断,得到结论.

解法 2　在直角坐标系中,集合 A 中的角的终边分别落在各象限的角平分线上,如图 2 所示;

在直角坐标系中,集合 B 中的角的终边分别落在各象限的角平分线上及 x 轴和 y 轴上,如图 3 所示.

∴　$A\subsetneqq B$,故选(A).

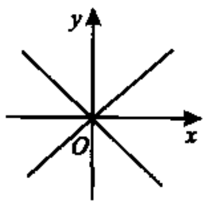

图 2

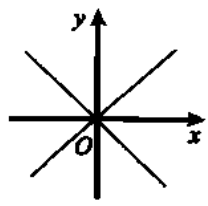

图 3

*　本书所有选择题所列的四个选项,只有一个是正确的.

攻略 3 对集合 B 中的 k 值分 $2n$ 和 $2n-1(n\in\mathbf{Z})$ 进行讨论，然后与集合 A 进行比较，从而得到结论.

解法 3 在集合 B 中，当 $k=2n$ 或 $k=2n-1(n\in\mathbf{Z})$ 时，

$$B=\left\{y\,|\,y=\frac{n\pi}{2}+\frac{\pi}{2}\text{或 }y=\frac{n\pi}{2}+\frac{\pi}{4},n\in\mathbf{Z}\right\}$$

而 $A=\left\{x\,|\,x=\dfrac{k\pi}{2}+\dfrac{\pi}{4},\ k\in\mathbf{Z}\right\}$，

$\therefore$ $A\subsetneqq B$，故选(A).

简评 本题所介绍的三种解法是从三个不同角度对集合 A，B 进行分析，找出它们之间的包含关系. 解法 1 用的是列举法，思路直，易掌握；解法 2 用的是数形结合的思想方法，方法较为直观；解法 3 用的是分析法，方法较为简捷.

4. 已知 $A=\{(x,y)\,|\,x=n,y=an+b,n\in\mathbf{Z}\}$，$B=\{(x,y)\,|\,x=m,y=3m^2+15,m\in\mathbf{Z}\}$，$C=\{(x,y)\,|\,x^2+y^2\leqslant 144\}$ 是坐标平面内的点集，问是否存在实数 a，b 使得①$A\cap B\neq\varnothing$，②$(a,b)\in C$ 同时成立.

攻略 1 本题是一道探索性开放题，不妨假设满足条件的实数 a，b 存在. 根据条件①、②及非空集合的概念，元素从属关系的含义，布列方程及不等式，解出 a，b 的值. 注意检验集合 A 中 x 的值是否为整数，若 x 为整数，则 a，b 为所求，若 x 不是整数，则满足条件的实数 a，b 不存在.

解法 1 若实数 a，b 使得 $A\cap B\neq\varnothing$ 成立，则集合 A 与集合 B 对应的方程组 $\begin{cases}y=ax+b,\\ y=3x^2+15,\end{cases}$ 有整数解，

即方程 $3x^2-ax+15-b=0$ (※)必有整数解，

因此，$\Delta=a^2-4\times3\times(15-b)\geqslant0$，

即$-a^2-12b+180\leqslant 0$. ①

若$(a,b)\in C$,则$a^2+b^2\leqslant 144$. ②

①+②,得 $b^2-12b+36\leqslant 0$,即$(b-6)^2\leqslant 0$.

$\therefore$ $b=6$.

把$b=6$代入①,得$a^2\geqslant 108$.

把$b=6$代入②,得$a^2\leqslant 108$.

$\therefore$ $a^2=108$, $a=\pm 6\sqrt{3}$.

再将$a=\pm 6\sqrt{3}$,$b=6$代入(※)式,得$3x^2\pm 6\sqrt{3}x+9=0$,

解得$x=\pm\sqrt{3}\notin \mathbf{Z}$.

所以不存在实数a,b使①、②同时成立.

攻略 2 根据题意,可得本题等价于关于a,b的不等式组:

$$\begin{cases} na+b=3n^2+15, & ① \\ a^2+b^2\leqslant 144, & ② \\ n\in \mathbf{Z}. \end{cases}$$

是否有实数解?由解析几何知识可知:

①式表示直线,②式表示圆盘面.结合图形可知不等式组有解的充要条件是圆心到直线的距离小于等于半径.

解法 2 由$A\cap B\neq\varnothing$,

得方程组$\begin{cases} n=m, \\ na+b=3m^2+15. \end{cases}$有整数解.

消去m,得$na+b-3n^2-15=0$.

而$(a,b)\in C$,意味着$a^2+b^2\leqslant 144$.

问题转化为关于a、b的不等式组

$$\begin{cases} na+b-3n^2-15=0, & ① \\ a^2+b^2\leqslant 144. & ② \end{cases}$$

是否有实数解,其中$n\in \mathbf{Z}$.

①式表示直线,②式表示圆盘面.

如果不等式组有解,则圆心(0,0)到直线$na+b-3n^2-15=0$的距离小于或等于半径,

即 $d=\dfrac{|3n^2+15|}{\sqrt{n^2+1}}\leqslant 12$,

两边平方，整理，得$(n^2-3)^2\leqslant 0$，

则　$n=\pm\sqrt{3}$，这与$n\in\mathbf{Z}$矛盾.

所以符合条件①、②的实数a,b不存在.

攻略3　由解法2可知：原题等价于关于a,b的不等式组

$$\begin{cases}na+b-3n^2-15=0,\\ a^2+b^2\leqslant 144,\\ n\in\mathbf{Z}.\end{cases}$$

是否有实数解？从方程出发，巧妙地应用柯西不等式$(\sum_{i=1}^{n}a_i^2)\cdot(\sum_{i=1}^{n}b_i^2)\geqslant(\sum_{i=1}^{n}a_ib_i)^2$，从而使问题获解.

解法3　若$A\cap B\neq\varnothing$，则存在整数n，使得$na+b=3n^2+15$，若$(a,b)\in C$，则$a^2+b^2\leqslant 144$.

此题等价于关于a,b的不等式组$\begin{cases}na+b=3n^2+15,\\ a^2+b^2\leqslant 144.\end{cases}$　$(n\in\mathbf{Z})$是否有实数解.

$\because$　$(3n^2+15)^2=(na+b)^2\leqslant(n^2+1)(a^2+b^2)$，

而$a^2+b^2\leqslant 144$，

$\therefore$　$(3n^2+15)^2\leqslant 144(n^2+1)$，即$(n^2-3)^2\leqslant 0$.

$\therefore$　$n^2=3$，$n=\pm\sqrt{3}$这与$n\in\mathbf{Z}$相矛盾.

故不存在实数a,b使①、②同时成立.

简评　本题是一道探索性开放题，这种题型对学生创造性思维的培养具有重要意义，是近几年高考数学试题中经常出现的题型. 解法1的关键是利用一元二次方程有实数根，则判别式大于或等于零来求解；解法2利用数形结合的思想，转化为解析几何的问题；解法3应用柯西不等式求解. 解法1、2都是常用的基本方法，解法3思路巧妙，过程简明.

5. 判断命题“已知a、x为实数，如果关于x的不等式$x^2+(2a+1)x+a^2+2\leqslant 0$的解集非空，则$a\geqslant 1$”的逆否命题的真假.

攻略 1 直接由原命题写出其逆否命题，然后判断逆否命题的真假.

解法 1 原命题：已知 a,x 为实数，如果关于 x 的不等式 $x^2+(2a+1)x+a^2+2\leqslant 0$ 的解集非空，则 $a\geqslant 1$.

逆否命题：已知 a、x 为实数，如果 $a<1$，则关于 x 的不等式 $x^2+(2a+1)x+a^2+2\leqslant 0$ 的解集为空集.

判断如下：

抛物线 $y=x^2+(2a+1)x+a^2+2$ 开口向上，

判别式 $\Delta=(2a+1)^2-4(a^2+2)=4a-7$.

$\because$ $a<1$，$\therefore$ $4a-7<0$，

即抛物线 $y=x^2+(2a+1)x+a^2+2$ 与 x 轴无交点.

$\therefore$ 关于 x 的不等式 $x^2+(2a+1)x+a^2+2\leqslant 0$ 的解集为空集.

故逆否命题为真.

攻略 2 根据命题之间的关系"原命题与逆否命题同真同假"，只需判断原命题的真假即可.

解法 2 $\because$ a，x 为实数，且关于 x 的不等式 $x^2+(2a+1)x+a^2+2\leqslant 0$ 的解集非空，

$\therefore$ $\Delta=(2a+1)^2-4(a^2+2)\geqslant 0$，

即 $4a-7\geqslant 0$，解得 $a\geqslant\frac{7}{4}$.

$\because$ $a\geqslant\frac{7}{4}>1$，

$\therefore$ 原命题为真.

又因为原命题与其逆否命题同真同假，所以逆否命题为真.

攻略 3 利用充要条件与集合的包含、相等关系求解.

解法 3 命题 p：关于 x 的不等式 $x^2+(2a+1)x+a^2+2\leqslant$

0 有非空解集，

命题 q：$a\geqslant1$.

∴ p：$A=\{a\mid$关于 x 的不等式 $x^2+(2a+1)x+a^2+2\leqslant0$ 有实数解$\}=\{a\mid(2a+1)^2-4(a^2+2)\geqslant0\}=\{a\mid a\geqslant\frac{7}{4}\}$.

q：$B=\{a\mid a\geqslant1\}$.

∵ $A\subseteq B$，

∴ 若 p 则 q 为真.

∴ “若 p 则 q”的逆否命题：“若$\neg q$ 则$\neg p$”为真.

即 原命题的逆否命题为真.

简评 要判断一个命题的真假，可根据定义直接判断，如解法 1；也可利用原命题与其逆否命题的等价关系求解，如解法 2；而解法 3 是从集合观点出发，建立命题 p、q 相应的集合，利用充要条件与集合的包含、相等关系求解. 即设 p：$A=\{a\mid p(a)$成立$\}$，q：$B=\{a\mid q(a)$成立$\}$，①若 $A\subseteq B$，则 p 是 q 的充分条件；若 $A\subsetneqq B$，则 p 是 q 的充分非必要条件；②若 $B\subseteq A$，则 p 是 q 的必要条件；若 $B\subsetneqq A$，则 p 是 q 的必要非充分条件；③若 $A=B$，则 p 是 q 的充要条件；若 $A\nsubseteq B$ 且 $B\nsubseteq A$，则 p 是 q 的既不充分也不必要条件.

6. 已知整数 n 的立方是偶数，求证 n 也是偶数.

攻略 1 用直接法难以下手时，可考虑用反证法. 假设 n 不是偶数，导出与已知条件相矛盾的结论，则假设不成立，原命题成立.

证法 1 假设 n 不是偶数，因为 $n\in\mathbf{Z}$，则 n 是奇数.

设 $n=2k+1(k\in\mathbf{Z})$，

则 $n^3=(2k+1)^3=8k^3+12k^2+6k+1$.

∵ $8k^3$、$12k^2$、$6k$ 为偶数，

$\therefore\ 8k^3+12k^2+6k$ 为偶数，

$\therefore\ 8k^3+12k^2+6k+1$ 为奇数，这与已知条件 n^3 为偶数相矛盾，

$\therefore$ 假设不成立，故 n 是偶数.

攻略 2 假设 n 不是偶数，根据已知条件可导出与整数的定义相矛盾的结论，则假设不成立，原命题成立.

证法 2 假设 n 不是偶数，因为 $n\in\mathbf{Z}$，则 n 是奇数.

设 $n=2k+1(k\in\mathbf{Z})$，

则 $n^3=(2k+1)^3=8k^3+12k^2+6k+1$

$$=2(4k^3+6k^2+3k+\frac{1}{2}).$$

$\because\ n^3$ 为偶数，

$\therefore\ 4k^3+6k^7+3k+\frac{1}{2}\in\mathbf{Z}$，

$\because\ 4k^3+6k^2+3k\in\mathbf{Z}$，

$\therefore\ (4k^4+6k^2+3k+\frac{1}{2})-(4k^3+6k^2+3k)=\frac{1}{2}\in\mathbf{Z}$，这与整数的定义相矛盾.

$\therefore$ 假设不成立，故 n 为偶数.

攻略 3 假设 n 不是偶数，可推出自相矛盾的结论，则假设不成立，原命题成立.

证法 3 假设 n 不是偶数，因为 $n\in\mathbf{Z}$，所以 n 是奇数.

设 $n=2k+1(k\in\mathbf{Z})$，

则 $n^3=(2k+1)^3=8k^3+12k^2+6k+1$.

$\because\ n^3$ 为偶数，设 $n^3=2a(a\in\mathbf{Z})$，

由 $8k^3+12k^2+6k+1=2a$，得 $a=4k^3+6k^2+3k+\frac{1}{2}$，

$\because\ a=4k^3+6k^2+3k+\frac{1}{2}\in\mathbf{Z}$，

$\therefore\quad 4k^3+6k^2+3k\notin \mathbf{Z}$.

$\because\quad k\in \mathbf{Z}$ 与 $4k^3+6k^2+3k\notin \mathbf{Z}$ 相矛盾，

$\therefore$ 假设不成立，原命题成立.

简评 反证法是一种重要的证题方法. 从上述三种不同证法中可以看出，做出反设后，可把反设当成已知条件，结合已知条件进行逻辑推理，达到反证法的目的. 证法 1 推出的结论与已知矛盾；证法 2 推出的结论与定义矛盾；证法 3 推出的结论自相矛盾，从而肯定了命题的结论成立.

7. 求函数 $y=\dfrac{x^2-2x+1}{x^2+1}$ 的值域.

攻略 1 观察此函数的表达式，对于分子、分母都是二次函数的分式函数，可用判别式法求解.

解法 1 由 $y=\dfrac{x^2-2x+1}{x^2+1}$，得 $(x^2+1)y=x^2-2x+1$.

整理得 $(y-1)x^2+2x+y-1=0$.

当 $y=1$ 时，$x=0$，

当 $y\neq 1$ 时，由 $\Delta=4-4(y-1)^2\geqslant 0$，解得 $0\leqslant y\leqslant 2$.

故函数的值域为 $[0,2]$.

攻略 2 本题可以先对原函数的表达式进行变形，分离成常数与某一分式的代数和的形式，再利用基本不等式，逐步分析取值状况，最后得出 y 的取值范围.

解法 2 原函数变为：$y=\dfrac{(x^2+1)-2x}{x^2+1}=1-\dfrac{2x}{x^2+1}$.

当 $x=0$ 时，$y=1$.

当 $x\neq 0$ 时，$y=1-\dfrac{2}{x+\dfrac{1}{x}}$.

$\because\quad \left|x+\dfrac{1}{x}\right|=|x|+\dfrac{1}{|x|}\geqslant 2$,

$\therefore\quad x+\dfrac{1}{x}\geqslant 2$ 或 $x+\dfrac{1}{x}\leqslant -2$,

$\therefore\quad 0<\dfrac{2}{x+\dfrac{1}{x}}\leqslant 1$ 或 $-1\leqslant\dfrac{2}{x+\dfrac{1}{x}}<0$,

$\therefore\quad 0\leqslant 1-\dfrac{2}{x+\dfrac{1}{x}}<1$ 或 $1<1-\dfrac{2}{x+\dfrac{1}{x}}\leqslant 2$.

故函数的值域为$[0,2]$.

攻略 3　本题也可以通过换元作适当的变形,将原函数转化为易于求值域的二次函数,从而使问题获解.

解法 3　$y=\dfrac{x^2-2x+1}{x^2+1}=\dfrac{(x-1)^2}{x^2+1}$,

令 $t=x-1$, 则 $x=t+1(t\in\mathbf{R})$,

原函数变为 $y=\dfrac{t^2}{(t+1)^2+1}=\dfrac{t^2}{t^2+2t+2}$.

当 $t=0$ 时,$y=0$.

当 $t\neq 0$ 时,$\dfrac{1}{y}=\dfrac{t^2+2t+2}{t^2}=\dfrac{2}{t^2}+\dfrac{2}{t}+1$

$$=2\left(\frac{1}{t}+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{2}\geqslant\frac{1}{2}.$$

$\therefore\quad 0<y\leqslant 2$.

故函数的值域为$[0,2]$.

攻略 4　对原函数变形后,得 $y=1-\dfrac{2x}{x^2+1}$,观察式子$\dfrac{2x}{x^2+1}$与万能公式 $\sin2\theta=\dfrac{\tan\theta}{\tan^2\theta+1}$结构相似,故可考虑应用三角代换进行求解.

解法 4　$y=\dfrac{(x^2+1)-2x}{x^2+1}=1-\dfrac{2x}{x^2+1}$,

令 $x=\tan\theta(\theta\in\mathbf{R}$ 且 $\theta\neq k\pi+\dfrac{\pi}{2},k\in\mathbf{Z})$,

则$\dfrac{2x}{x^2+1}=\dfrac{2\tan\theta}{\tan^2\theta+1}=\sin2\theta(2\theta\in\mathbf{R}$ 且 $2\theta\neq 2k\pi+\pi,k\in\mathbf{Z})$.

∴ $y=1-\sin 2\theta$.

∵ $-1\leqslant\sin 2\theta\leqslant 1$， ∴ $0\leqslant 1-\sin\theta\leqslant 2$.

故 函数的值域为$[0,2]$.

简评 解法1是判别式法,使用判别式法求函数的值域时要注意两点:一是将函数解析式转化为关于自变量 x 的二次函数时,自变量 x 的取值范围是否改变了,二是只有当二次项系数不等于零时,才能使用 $\Delta\geqslant 0$ 求解.解法2是不等式法,使用此方法时要注意创造利用基本不等式求最值的条件.解法3通过换元,两边取倒数,转化为熟悉的二次函数的值域问题,再用配方法求解.解法4是三角代换法.以上方法都是求值域的常用方法.

8. 求函数 $y=2x-3-\sqrt{4-3x}$ 的值域.

攻略1 原函数的表达式中有根号,可以通过换元,将根号去掉,把原函数转化为二次函数.

解法1 令 $t=\sqrt{4-3x}$,则 $x=\dfrac{4-t^2}{3}(t\geqslant 0)$.

原函数变为 $y=2\cdot\dfrac{4-t^2}{3}-3-t=-\dfrac{2}{3}t^2-t-\dfrac{1}{3}$

$$=-\frac{2}{3}\left(t+\frac{3}{4}\right)^2+\frac{1}{24}.$$

由此二次函数的图像可知,当 $t=0$ 时,y 取到最大值 $-\dfrac{1}{3}$.

∴ 函数的值域为$\left(-\infty,-\dfrac{1}{3}\right]$.

攻略2 因为函数 $g(x)=2x-3$,$h(x)=-\sqrt{4-3x}$ 在其定义域内都是增函数,所以函数 $g(x)+h(x)$ 在其定义域内也是增函数,由增函数的定义可求得 y 的取值范围.