

489629

5521
7449

地基的强度与变形的计算

陆培炎 徐振华



青海人民出版社

5521
7449

地基的强度与变形的计算

陆培炎 徐振华

青海人民出版社

内 容 提 要

本书研究了地基在垂直荷载作用下弹塑性阶段的地基强度及地基变形计算问题。得到了以危险度 λ 表示的地基强度计算公式及相应的计算表格，论述了以弹性应力代入塑性条件的 $P-\frac{1}{\lambda}$ 公式有原则性缺陷；研究了地基变形的一般规律性，并提出了弹塑性阶段基础沉降计算公式及相应的计算表格；说明如何进行地基设计才能充分利用地基的承载能力。书中列举了一些计算实例。

本书可供建筑设计、工程地质勘测、工程结构及地下建筑专业大专院校师生及从事土力学地基基础科研人员参考。

地基的强度与变形的计算

陆培炎 徐振华

青海人民出版社出版 青海省新华书店发行
北京印刷一厂排版 青海新华印刷厂印刷

1978年2月第1版 1978年2月第1次印刷

印数 1—8,500

书号 13097·30 定价 0.31元

前 言

目前,国内外一些地基设计规范是应用线性变形理论去计算地基的变形,并规定作用于地基上的压力必须保证地基在线性变形阶段。但是,实践证明,地基处于弹-塑性阶段仍然可以承受荷载;特别是对于中等压缩性和低压缩性地基,即使基础面积很小,压力用得比较大,超过了线性变形阶段,而基础的沉降仍然小于建筑物沉降容许值。我们是否有理由使作用于地基上的压力用到弹-塑性阶段,从而充分利用地基的承载能力,以减小基础尺寸,达到经济效果呢?

伟大领袖和导师毛主席指出:“在生产斗争和科学实验范围内,人类总是不断发展的,自然界也总是不断发展的,永远不会停止在一个水平上。因此,人类总得不断地总结经验,有所发现,有所发明,有所创造,有所前进。”

由于生产实践要求我们去研究弹-塑性阶段的地基强度计算与地基变形计算,所以应用弹-塑性理论的混合课题以及根据地基变形的一般规律性去研究它,就可能比较符合客观实际。

本书是用近似方法研究地基非线性问题的一个尝试,若能引起人们对这个问题的兴趣,进一步开展这方面的研究工作,逐步完善地基设计规范的内容,为我国蓬勃发展的社会主义建设事业节约资金和材料,那么,本书的目的就算是达到了。

第一章简短地说明基础沉降的特征,提出了研究弹-塑性阶段地基强度与变形的意义、方法。

第二章是弹-塑性压力计算的理论。首先证明用叠加的近似方法是可行的;分别研究了临塑压力及其塑性开展、极限平衡与弹-塑性阶段的压力及其塑性范围;最后提出危险度 λ 的概念,得出地基强度 p_k 的计算公式以及相应的计算表格。

第三章是试图证明当研究弹—塑性压力时，不能应用线性变形时的应力，而必须用弹—塑性理论的混合课题解的理由，并对现行规范公式 $p_{\frac{1}{4}}$ 或类似 $p_{\frac{1}{4}}$ 公式在理论上的缺陷作了详细分析，本章根据在工业与民用建筑中应用弹—塑性压力的实践，初步提出危险度 λ 应如何选择。

第四章是在作者及其他作者所作的试验观测结果的基础上初步总结了地基变形的一般规律性，并将地基强度的计算与地基变形的特征联系起来，提出了分层总和法计算弹塑性阶段基础沉降的公式，并列出了相应的计算表格。

第五章是试验例和实践例，阐述为了充分利用地基的承载能力，地基设计要进行的两项计算，这个计算方法也是本书的结论。

本书初稿完成于1964年，经过以后几年的实践，又对初稿进行了修改与补充。这里应特别感谢中国科学院地球物理研究所陈宗基教授、华南工学院蔡益铨教授、冶金工业部建筑研究院谷元之总工程师、重庆建筑工程学院夏正中工程师、北京工业大学叶于政工程师等同志，他们给予作者很多有益的指教，对于出版社、省科委和省人防办的支持亦表谢意。

作者

1978.2

目 录

第一章 问题的提出	(1)
第二章 弹-塑性压力的计算	(4)
(一) 这个问题的解可用两个情况 0° 与 1° 的解之和代替	(4)
(二) 临塑压力 p_{kp}	(10)
1. $0^\circ (q \neq 0, \gamma = 0, \varphi \neq 0, c \neq 0)$ 的解 $p_{kp}(0^\circ)$	(10)
2. $1^\circ (q = 0, \gamma \neq 0, \varphi \neq 0, c = 0)$ 的解 $p_{kp}(1^\circ)$	(15)
3. 0° 与 1° 的叠加 $(q \neq 0, \gamma \neq 0, \varphi \neq 0, c \neq 0)$ 的解 p_{kp}	(17)
(三) 极限平衡压力 p_{np}	(17)
1. 塑性平衡方程	(17)
2. $0^\circ (q \neq 0, \gamma = 0, \varphi \neq 0, c \neq 0)$ 的解 $p_{np}(0^\circ)$	(19)
3. $1^\circ (q = 0, \gamma \neq 0, \varphi \neq 0, c = 0)$ 的解 $p_{np}(1^\circ)$ 以及 0° 与 1° 叠加 $(q \neq 0, \gamma \neq 0, \varphi \neq 0, c \neq 0)$ 的解 p_{np}	(22)
(1) B. B. 索科洛夫斯基的解	(22)
(2) 假定滑裂面的解	(24)
(3) 有压密核存在的解	(31)
(四) 弹-塑性压力 p_{y-n}	(34)
1. $0^\circ (q \neq 0, \gamma = 0, \varphi \neq 0, c \neq 0)$ 的解 $p_{y-n}(0^\circ)$	(34)
2. $1^\circ (q = 0, \gamma \neq 0, \varphi \neq 0, c = 0)$ 的解 $p_{y-n}(1^\circ)$	(41)
3. 0° 与 1° 的叠加 $(q \neq 0, \gamma \neq 0, \varphi \neq 0, c \neq 0)$ 的解 p_{y-n}	(42)
(五) 地基强度 p_λ 计算公式	(42)
第三章 弹-塑性压力公式的应用	(49)
(一) 应用弹性应力求弹-塑性压力是不正确的	(49)
(二) 对规范公式 $p_{\frac{1}{2}}$ 的讨论	(54)

(三) 危险度 λ 的选择	(57)
第四章 地基变形的计算	(60)
(一) 地基变形的一般规律性	(60)
(二) 单独基础沉降的计算	(67)
1. 均质土	(68)
(1) $\varphi=0$ 或近似计算时内摩擦角 φ 较小时单独基础沉降的 计算	(68)
(2) 内摩擦角 φ 较大时单独基础沉降的计算	(69)
2. 非均质土	(72)
(1) 基础下的压缩层范围内有不同的土层, 而各土层为 $\varphi=0$ 或内摩擦角 φ 较小时单独基础沉降的计算	(72)
(2) 基础下有不同的土层, 而各土层内摩擦角 φ 较大时 单独基础沉降的计算	(79)
3. 埋深的影响	(79)
第五章 例证及地基设计方法	(81)
(一) 试验例	(81)
(二) 实践例	(83)
(三) 地基设计方法	(85)
参考文献	(87)
附记	(89)

第一章 问题的提出

大量的室内小压板以及现场小压板和大型压板的天然地基上逐级加荷的静载试验,其压板底面平均压力 p 与压板沉降 S 的关系见图 1 a) 与 b)。一般来说,图 a) 系浅埋砂土地基,图 b) 系粘性土地基以及深埋砂土地基。图 a) 有很明显的变形三个阶段,因而可容易确定出两个压力,即临塑压力 p_{kp} , 以及极限平衡压力 (或称塑性压力) p_{np} 。图 b) 无明显的变形三个阶段,要确定临塑压力及极限平衡压力很困难,根据作者的试验提出确定 p_{kp} 及 p_{np} 的方法见第五章试验例。因此,我们就可概括地把地基变形的特征分为三个阶段,第一,线性变形阶段,第二,弹-塑性阶段,第三,极限阶段。从第一阶段过渡到第二阶段的作用于地基表面上的压力称为临塑压力,以 p_{kp} 表示;第二阶段过渡到第三阶段的压力或丧失稳定性时的压力称为极限平衡压力,以 p_{np} 表示;第二阶段的压力称为弹-塑性压力,以 p_{y-n} 表示。

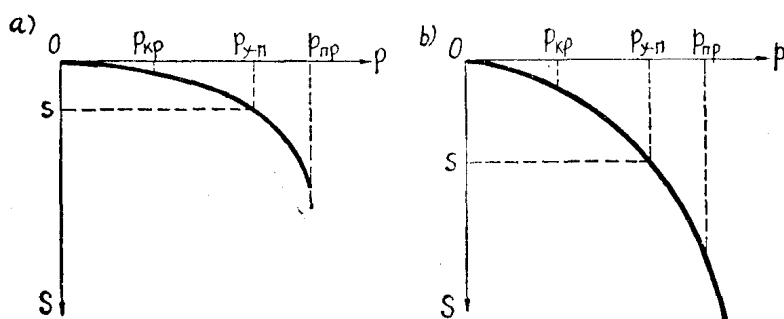


图 1

计算临塑压力 p_{kp} 是以弹性应力代入极限平衡条件 (又称塑性条件) 中求得的; 计算极限平衡压力 p_{np} 是按塑性理论进行计算求得的。这些公式及相应的表格, 在各种土力学的教科书及松

散介质静力学的专著中已有了不少，而 p_{np} 公式都是近似解或数值解，至于弹-塑性压力 p_{y-n} ，应该按弹-塑性混合课题来求解，现仅有平面问题（半无限荷载）无体积力的解，就是这样的解，也很难在实践中加以利用，可以说，仍没有一个比较完整的公式及相应的计算表格。

至于用弹性应力代入塑性条件而求得的一定塑性范围的压力，例如目前应用塑性深度为基础宽度的 $\frac{1}{4}$ 时的压力 $p_{\frac{1}{4}}$ 或所谓出现局部塑性变形时的地基土的承载力公式，这种公式由于应用弹性应力状态而不是弹-塑性应力状态，因此，从力学理论讲就不是严格的，再加上它并不反映客观实际，这种方法就是不恰当的了。

目前，一些外国的及我国的地基设计规范是用线性变形理论计算地基的变形，为了保证变形计算的准确性，要求作用于地基上的压力不超过一定的数值，准确地讲，不应超过临塑压力 p_{kp} ，有些规范认为不超过用弹性应力代入塑性条件的 $p_{\frac{1}{4}}$ 或所谓局部塑性变形的压力 R ，仍然可以用线性变形理论，或者认为，这个压力就是地基土的承载力，不能超过它。

显然，作了这种限制，使地基设计方法并不能充分利用地基的承载能力。

生产实践要求有一个用弹-塑性混合课题解的弹-塑性压力 p_{y-n} ，因为：

第一，当 $p=R$ （ p ——作用于地基上的压力， R ——计算的地基强度或承载力），而 S 远小于 S_{np} 时（ S ——地基广义变形，如沉降、倾斜、沉降差、弯曲等的计算值， S_{np} ——建筑物广义变形的容许值），能否将基础尺寸减小，使 $p>R$ ， $S\leq S_{np}$ ，从而达到经济效果，这种情况对于碎石土、砂土、老粘性土以及孔隙比较小的一般粘性土其经济效果更为显著。

第二，为了调整相邻基础的沉降，特别是荷载差异很大的相邻柱基，能否提高小基础底面下的压力 p ，使 $p>R$ ，从而增大

沉降^[1]。

根据按极限状态设计地基的原则，当地基不丧失稳定性的破坏时，只需符合 $S \leq S_{np}$ ，这样，地基设计是最经济的。

因此，研究作用于地基上的压力 p 与塑性范围开展的关系，即研究弹-塑性压力 p_{y-n} （它的下限为 p_{kp} ，它的上限为 p_{np} ）以及此时的 S 又如何计算的问题，这在生产上就很有意义，本书就是用近似的方法研究这两个问题。

第二章 弹-塑性压力的计算

我们研究平面变形问题, 假定基础作用于地基上的压力 p 在基础宽度 $2a$ 内为均布, 基础底面以上埋深 h 的土重用 $q = \gamma_0 h$ 表示, 地基为具有容重 γ 的粘性土 (内摩擦角 $\varphi \neq 0$, 内聚力 $c \neq 0$)。

为了找出弹-塑性压力的解, 首先要得到临塑压力 (下限) 和极限平衡压力 (上限) 的解, 以及了解塑性范围先从什么地方开始和极限平衡时的塑性范围。在这个基础上, 来求弹-塑性压力的解, 以及弹-塑性范围。

这里, 是用近似方法, 将有埋深, 其压力为 $q = \gamma_0 h$, 有容重 γ 的粘性土 ($q \neq 0$, $\gamma \neq 0$, $\varphi \neq 0$, $c \neq 0$) 分为两种情况, 然后进行叠加。

(一) 这个问题的解可用两个情况 0° 与 1° 的解之和代替

其中: 0° : $q \neq 0$, $\gamma = 0$, $\varphi \neq 0$, $c \neq 0$ (有埋深无容重的粘性土);

1° : $q = 0$, $\gamma \neq 0$, $\varphi \neq 0$, $c = 0$ (无埋深有容重的理想松散土)。

将问题的解分为 0° 和 1° , 其物理意义是清楚的: 0° 情况就是把内聚力 c 所产生的粘结压力 $c \cdot \cot \varphi$ (见图 2) 看作与 q 相似的表面压力, 该情况相当于 ($q' \neq 0$, $\gamma = 0$, $\varphi \neq 0$) 的地基; 1° 情况具有体积力, 相当于 ($q' = 0$, $\gamma \neq 0$, $\varphi \neq 0$) 的地基 (这里的 $q' = q + c \cdot \cot \varphi$)^{*}。当求 p_{kp} 、 p_{y-n} 或 p_{np} 时, 有表面力的地基求得为 $p(0^\circ)$, 有体积力的地基求得为 $p(1^\circ)$, 将它们叠加, 即 $p(0^\circ) + p(1^\circ)$, 就是这个问题的 p_{kp} 、 p_{y-n} 或 p_{np} 的解。

现要证明临塑、极限平衡以及弹-塑性时这种叠加是可能的。

1. 当 $p \leq p_{kp}$ 时, 地基处于弹性状态, 此时的应力为 σ_x , σ_y 和 τ_{xy} 。

0°: 地基的应力状态为 σ_{x0} ; σ_{y0} 和 τ_{xy0} ;

1°: 地基的应力状态为 σ_{x1} ; σ_{y1} 和 τ_{xy1} 。

由于地基处于线性变形状态, 0°和 1°应满足平衡方程和以应力表示的连续性方程。如

0°的平衡方程:

$$\begin{cases} \frac{\partial \sigma_{x0}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy0}}{\partial y} = 0 \\ \frac{\partial \tau_{xy0}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{y0}}{\partial y} = 0 \end{cases}$$

1°的平衡方程:

$$\begin{cases} \frac{\partial \sigma_{x1}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy1}}{\partial y} = \gamma \\ \frac{\partial \tau_{xy1}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{y1}}{\partial y} = 0 \end{cases}$$

则(0°+1°)的应力状态为: $\sigma_x = \sigma_{x0} + \sigma_{x1}$; $\sigma_y = \sigma_{y0} + \sigma_{y1}$;
 $\tau_{xy} = \tau_{xy0} + \tau_{xy1}$, 此时, 可以证明满足平衡方程:

$$\begin{cases} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} = \gamma \\ \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} = 0 \end{cases} \quad (2-1)$$

同理, 亦可证明满足连续性方程:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) (\sigma_x + \sigma_y) = 0 \quad (2-2)$$

* 这可看作 $\varphi \neq 0$ 的地基两种力的叠加。0°情况中的粘结压力 $c \cdot \cot \varphi$ 各向相同, 即 $\sigma_1^{(c)} = \sigma_2^{(c)} = c \cdot \cot \varphi$, 字母(c)是指由内聚力 c 引起的。将它代入 $\varphi \neq 0$, $c=0$ 的塑性条件 $\sigma_1 - \sigma_2 = (\sigma_1 + \sigma_2) \sin \varphi$ 中可变成 $\varphi \neq 0$, $c \neq 0$ 的塑性条件 $\frac{\frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_2)}{\frac{1}{2}(\sigma_1 + \sigma_2) + c \cot \varphi} = \sin \varphi$ 。此外, $c \cdot \cot \varphi$ 与 $q = \gamma_0 h$ 相似, 是因在 q

的作用下假定侧压力系数 $\xi_0 = \frac{\mu_0}{1 - \mu_0} = 1$, 故可写成 $q' = q + c \cdot \cot \varphi$ 。因此 $q' \neq 0$, $\gamma = 0$, $\varphi \neq 0$ 的情况亦是 $q \neq 0$, $\gamma = 0$, $\varphi \neq 0$, $c \neq 0$ 的情况。

由此, $\eta \neq 0$, $\gamma \neq 0$, $q \neq 0$, $c \neq 0$ 的地基可用两个情况 0° 与 1° 的解之和代替。我们不证明亦知道, 线性状态, 力是可以叠加的。

2. 当 $p = p_{np}$ 时, 地基处于极限平衡(塑状)状态, 可以证明, 平衡方程(2-1)是符合的。至于塑性条件, 则需要证明。

地基处于极限平衡时, 假定剪应力与剪应变符合理想刚-塑性体, 并应用莫尔(Mohr)塑性条件, 对于 $q \neq 0$, $c \neq 0$ 的土, 由图 2 可得:

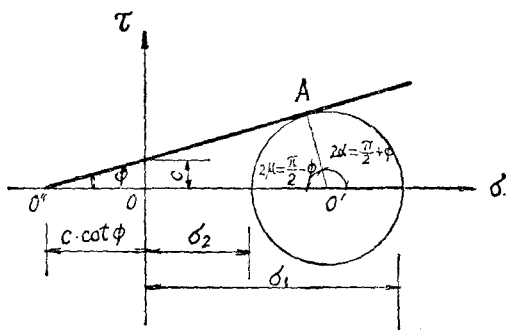


图 2

$$\sin \varphi = \frac{O'A}{O'O'} = \frac{\frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_2)}{\frac{1}{2}(\sigma_1 + \sigma_2) + c \cdot \cot \varphi}$$

则得塑性条件:

$$\frac{1}{\cos \varphi} \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} - \tan \varphi \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2} = c \quad (2-3)$$

由于

$$\left. \begin{matrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \end{matrix} \right\} = \frac{1}{2}(\sigma_x + \sigma_y) \pm \frac{1}{2} \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4 r_{xy}^2},$$

所以(2-3)式可改写为:

$$\sqrt{\frac{1}{4}(\sigma_x - \sigma_y)^2 + r_{xy}^2} = \frac{1}{2} \sin \varphi (\sigma_x + \sigma_y + 2 \sigma_c) \quad (2-3)a$$

式中 $\sigma_c = c \cdot \cot \varphi$

因此 0° 情况的塑性条件为:

$$\sqrt{\frac{1}{4}(\sigma_{x0} - \sigma_{y0})^2 + \tau_{xy0}^2} = \frac{1}{2} \sin \varphi (\sigma_{x0} + \sigma_{y0} + 2\sigma_c) \quad (a)$$

对于 $c=0$, $\varphi \neq 0$ 的土, 即对于 1° 情况的塑性条件显然为:

$$\sqrt{\frac{1}{4}(\sigma_{x1} - \sigma_{y1})^2 + \tau_{xy1}^2} = \frac{1}{2} \sin \varphi (\sigma_{x1} + \sigma_{y1}) \quad (b)$$

将(a)、(b)式两边分别相加得:

$$\begin{aligned} & \sqrt{\frac{1}{4}(\sigma_{x0} - \sigma_{y0})^2 + \tau_{xy0}^2} + \sqrt{\frac{1}{4}(\sigma_{x1} - \sigma_{y1})^2 + \tau_{xy1}^2} = \\ &= \frac{1}{2} \sin \varphi [(\sigma_{x0} + \sigma_{x1}) + (\sigma_{y0} + \sigma_{y1}) + 2\sigma_c] \\ &= \frac{1}{2} \sin \varphi (\sigma_x + \sigma_y + 2\sigma_c) \end{aligned} \quad (c)$$

由于有显然的不等式:

$$\begin{aligned} & \sqrt{\frac{1}{4}(\sigma_{x0} - \sigma_{y0})^2 + \tau_{xy0}^2} + \sqrt{\frac{1}{4}(\sigma_{x1} - \sigma_{y1})^2 + \tau_{xy1}^2} \geq \\ & \sqrt{\frac{1}{4}(\sigma_x - \sigma_y)^2 + \tau_{xy}^2} \end{aligned} \quad (d)$$

(d) 式的证明只要两边两次平方并化简成 $[(\sigma_{x0} - \sigma_{y0})\tau_{xy1} - (\sigma_{x1} - \sigma_{y1})\tau_{xy0}]^2 \geq 0$ 就可得到。

由(c)、(d)两式可知:

$$\sqrt{\frac{1}{4}(\sigma_x - \sigma_y)^2 + \tau_{xy}^2} = \nu \frac{\sin \varphi}{2} (\sigma_x + \sigma_y + 2\sigma_c) \quad (2-4)$$

式中 $\nu \leq 1$ 。

B. B. 索科洛夫斯基(Соколовский)认为^[2], 这可以看作新的缩小的内摩擦系数和内聚力, 并作为未知的安全系数。

可以证明, 当 0° 与 1° 某一点的滑裂线在 xy 平面上均相同, 或最大主应力方向相同, 则 $\nu=1$ 。证明如下: 要 $\nu=1$, 则只要证明

$$\begin{aligned} & \sqrt{\frac{1}{4}(\sigma_{x0}-\sigma_{y0})^2 + \tau_{xy0}^2} + \sqrt{\frac{1}{4}(\sigma_{x1}-\sigma_{y1})^2 + \tau_{xy1}^2} = \\ & = \sqrt{\frac{1}{4}(\sigma_x - \sigma_y)^2 + \tau_{xy}^2} \end{aligned} \quad (e)$$

就可得到塑性条件(2-3)_a。

为此, 将式(e)进行两次平方并化简得:

$$4\tau_{xy0}^2(\sigma_{x1}-\sigma_{y1})^2 + 4\tau_{xy1}^2(\sigma_{x0}-\sigma_{y0})^2 = 8\tau_{xy0}\tau_{xy1}(\sigma_{x0}-\sigma_{y0}) \rightarrow$$

$$\leftarrow (\sigma_{x1}-\sigma_{y1}) \text{ 或 } [\tau_{xy0}(\sigma_{x1}-\sigma_{y1}) - \tau_{xy1}(\sigma_{x0}-\sigma_{y0})]^2 = 0$$

即必须证明:

$$\frac{\tau_{xy0}}{\sigma_{x0}-\sigma_{y0}} = \frac{\tau_{xy1}}{\sigma_{x1}-\sigma_{y1}} \quad (f)$$

由于 0° 和 1° 的应力状态分别要符合塑性条件, 故可用图 3 的莫尔圆表示, 其 $\sigma_{(0^\circ)}$ 表示 0° 之应力圆, $\sigma_{(1^\circ)}$ 表示 1° 之应力圆, 并可绘出叠加后的应力圆(σ)。

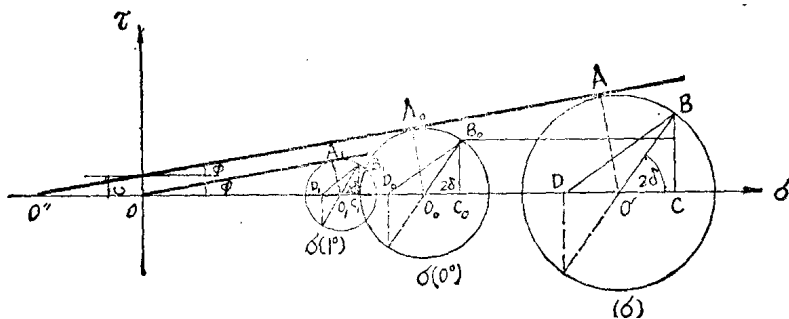


图 3

首先, 我们需了解最大主应力 σ_1 方向与两组滑裂面成多大的角度, 由图 2 可知, A 点即代表滑裂面上的应力状态, $2\alpha = \frac{\pi}{2} + \varphi$, 在图 4 中, $\alpha = \frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}$, 因此, 最大主应力方向 σ_1 与两组滑裂线成 $\pm\mu = \frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}$ 。

因此, 图 3 中 A_0, A_1 点表示滑裂面方向与最大主应力方向

(二) 临塑压力 p_{kp}

1. $0^\circ (q \neq 0, \gamma = 0, \varphi \neq 0, c \neq 0)$ 的解 $p_{kp}(0^\circ)$

(图5)

地基中的弹性主应力已知^[3]:

$$\left. \begin{matrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \end{matrix} \right\} = \frac{(p_0 - q)}{\pi} (2\beta \pm \sin 2\beta) + q \quad (2-5)$$

此处假定土的侧压力系数 $\xi_0 = \frac{\mu_0}{1 - \mu_0} = 1$ 。

上式中 p_0 系作用于地基上的均布压力。

塑性条件为:

$$\frac{1}{\cos \varphi} \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} - \tan \varphi \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2} = c \quad (2-3)$$

将地基中的弹性主应力 σ_1, σ_2 (2-5) 式代入塑性条件 (2-3) 式中, 则得:

$$(p_0 - q) \sin 2\beta - \sin \varphi (p_0 - q) 2\beta - \pi \sin \varphi q - \pi \cos \varphi c = 0^* \quad (2-6)$$

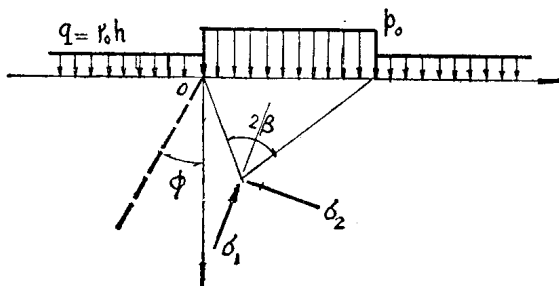


图 5

此式就是塑性范围方程。将 (2-6) 式变为:

$$\frac{\sin 2\beta}{\sin \varphi} - 2\beta = \frac{\pi q + \pi c \cot \varphi}{p_0 - q} \quad (2-6)_a$$

* 若在边界上作用 $q' = q + c \cdot \cot \varphi$ 并用 $\varphi \neq 0, c = 0$ 的塑性条件 $\sigma_1 - \sigma_2 = (\sigma_1 + \sigma_2) \sin \varphi$, 其结果与该式完全相同。