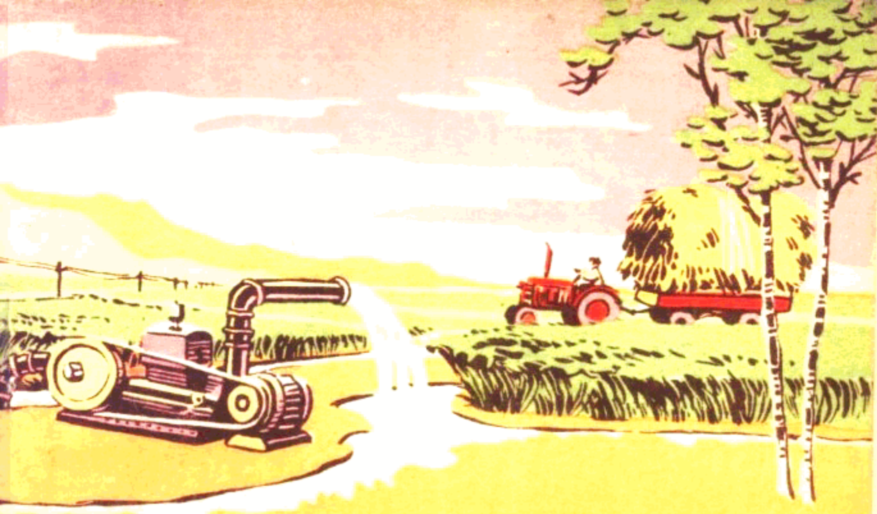


北京市初级中学试用课本

平面几何

第 二 册

北京市初级中学试用课本

平面几何

第 二 册

北京市教育局中小学教材编审处编

*

北 京 出 版 社 出 版

（北京东单麻线胡同 3 号）

北京市书刊出版业营业许可证出字第 095 号

北京新华印刷厂印刷

北京市新华书店发行

*

开本：787×1092 1/32 · 印张：3 14/16 · 字数：80,000

1961年10月第 1 版　　1961年10月第 1 次印刷

印数：00,001—73,100册

统一书号：K7071 · 482　　定价：(2)0.22元

目　录

第六章　圓

I　圓的一些重要性质

60. 圓　在前几章里，我們学习了由直綫組成的一些几何图形的性质，例如平行綫、三角形和平行四边形的性质等等. 在这一章里，我們将研究关于圓的一些重要性质.

圓可以看做是这样构成的：当射綫 OA 繞着它的端点 O 旋轉一周的时候(图 227)，射綫上的一点，例如 A，就画出一条封閉的曲綫，这条曲綫叫做**圓**. O 点叫做这个圓的**圓心**，連結圓心和圓上任何一点的綫段叫做**圓的半徑**. 显然，**同圓的半徑相等.**

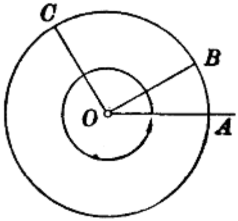


图　227

圓可以用符号“⊙”来表示，以 O 为圓心的圓可以記做“⊙O”.

連結圓上任意两点的綫段叫做圓的**弦**，如图 228 中的綫段 [illegible]过圓心的弦叫做圓的**直徑**，如图 228 中的綫段 CD.

[illegible]圓既是中心对称图形，又是軸对称图形. 一个圓的圓心就是它的对称中心；任何一条直径都是它的对称軸.

圓上任意两点間的部分叫做**弧**. 弧通常用符号“⌒”来表

示．如图 228 中的弧 AmB 和 AnB 分别記做 $\overset{\frown}{AmB}$ 和 $\overset{\frown}{AnB}$．

小于半圆的弧叫做**劣弧**，大于半圆的弧叫做**优弧**．以后，在不加說明的情况下，通常所說的弧总是指的劣弧．劣弧也可以只用表示弧的两个端点的字母来表示．例如图 228 中的$\overset{\frown}{AmB}$，可以記做 $\overset{\frown}{AB}$．

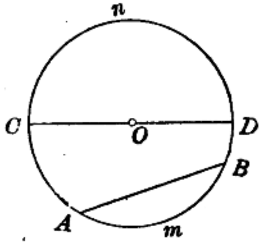


图 228

假設 $\overset{\frown}{AB}$ 和 $\overset{\frown}{CD}$ 是同圆或等圆(半径相等的圆)中的两条弧．把其中的一条弧放在另一条弧上，例如把 $\overset{\frown}{AB}$放在$\overset{\frown}{CD}$上，使 A 点和 C 点重合．如果 B 点和 D 点也能重合，这两条弧就叫做相等的弧；如果 B 点和 D 点不能重合，这两条弧就不相等．如果 B 点落在 $\overset{\frown}{CD}$ 上，那么 $\overset{\frown}{AB}<\overset{\frown}{CD}$；如果 B 点落在 $\overset{\frown}{CD}$ 外，那么 $\overset{\frown}{AB}>\overset{\frown}{CD}$．应該注意：不在同圆或等圆中的两条弧，我們不能比較它們的相等或不等．

61．不在一条直綫上的三点确定一个圆 我們知道，經过两点能作一条直綫并且只能作一条直綫．这就是說，两点确定一条直綫．那么，几点确定一个圆呢？

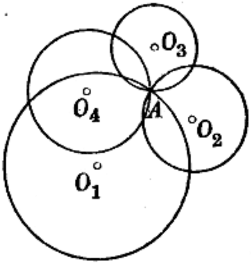


图 229

首先，取一点 A (图 229)．可以看出，以其他任何一点为圆心，以这点到 A 点的距离为半径所作的圆都經过 A 点，所以經过一点能作无数个圆，并且这些圆的圆心可以任意选擇．

其次，取两个点 A、B（图 230）。由于过 A、B 两点的圆的圆心到 A 和 B 的距离相等，所以这样的圆的圆心必定在綫段 AB 的垂直平分綫上；反过来，綫段 AB 的垂直平分綫上的任何一点到 A 和 B 的距离都相等，因此，以綫段 AB 的垂直平分綫上的任何一点为圆心，以这点到 A（或 B）的距离为半径所作的圆，都过 A 和 B。由此可知，过两点也能作无数个圆，并且这些圆的圆心都在連結这两点的綫段的垂直平分綫上。

現在来研究經过三点能不能作圓，如果能作，可以作几个？

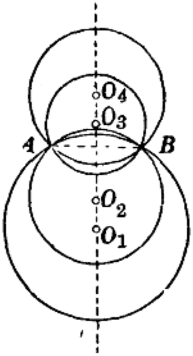


图 230

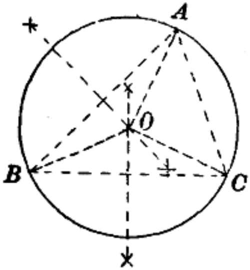


图 231

取不在同一直綫上的三个点 A、B、C（图 231），連結 AB、BC 和 CA。根据上面的分析可知：通过 A、B 两点的圓的圓心必在綫段 AB 的垂直平分綫上；通过 B、C 两点的圓的圓心必在綫段 BC 的垂直平分綫上。設这两条垂直平分綫的交点为 O，并連結 OA、OB 和 OC，那么 $OA=OB$、$OB=OC$，所以 $OA=OB=OC$。因此，以綫段 AB 和綫段 BC

的垂直平分綫的交点 O 为圆心，OA 为半径所作的圆，一定通过 A、B、C 三点．这就是說，过不在同一直綫上的三点可以作一个圆．其次，因为这两条垂直平分綫只能有一个交点，并且从这个交点到 A、B、C 的距离都相等，所以这样的圆只能作一个．由此得到：

定理 45　不在同一直綫上的三点确定一个圆．

如果 A、B、C 三点取在同一直綫上（图 232），那么綫段 AB 的垂直平分綫和綫段 BC 的垂直平分綫平行，因此它們沒有交点．所以，**过同一直綫上的三点不能作圆．**

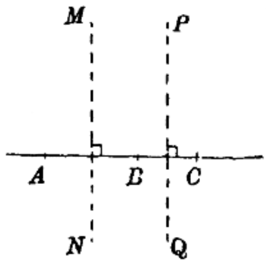


图 232

根据上面的討論可以看出：一个圆的位置是由它的圆心的位置确定的，圆的大小是由它的半径的长度确定的，因此，只有当圆心的位置和半径的长度都确定时，这个圆才能完全确定．由此可知：作圆的問題的关鍵，就在于确定圆心的位置和半径的长度．

在图 231 中，三角形 ABC 的頂点都在同一个圆上，这个三角形叫做**圆的內接三角形**，而这个圆就叫做这个**三角形的外接圆**．根据前面的分析知道：三角形 ABC 的 AB 和 BC 两条边的垂直平分綫相交于 O，而且 $OA=OB=OC$，因此，O 点也一定在 AC 边的垂直平分綫上．这就是說，**三角形三边的垂直平分綫相交于一点**，这点叫做这个**三角形的外心．**

根据上述性质可以知道：当我們作一个三角形的外接圆的时

候，只要作出这个三角形任意两条边的垂直平分綫，就能确定圆心的位置。

62. 垂直于弦的直徑 关于弦和直径間的关系，有下面一些定理：

定理 46 垂直于弦的直徑平分这条弦，幷且平分这条弦所对的两条弧.

已知：在⊙O中，DE 是直径，AB 是弦，$DE \perp AB$ 于 C(图 233).

求証：$AC=BC$；$\overset{\frown}{AD}=\overset{\frown}{BD}$，$\overset{\frown}{AE}=\overset{\frown}{BE}$.

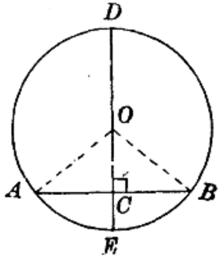


图 233

証明：連結 OA、OB，那么 $OA=OB$. 因为垂直于弦 AB 的直径 DE，既是等腰三角形 OAB 的对称軸，也是⊙O的对称軸，所以当把圆面沿着直径 DE 折迭起来时，左面的半圓就和右面的半圓重合，A 点和 B 点重合，AC 和 BC 重合，$\overset{\frown}{AE}$、$\overset{\frown}{AD}$ 分别和 $\overset{\frown}{BE}$、$\overset{\frown}{BD}$ 重合. 因此，$AC=BC$，$\overset{\frown}{AD}=\overset{\frown}{BD}$，$\overset{\frown}{AE}=\overset{\frown}{BE}$.

定理 47 过弦（不包括直徑）的中点的直徑垂直于这条弦，幷且平分这条弦所对的两条弧.

在定理 46 中我們已經証明，如果直径 DE 垂直于弦 AB，那么垂足 C 就是 AB 的中点(图 233). 但是 AB 的中点只有一个，所以通过 AB 的中点作直径必定和 DE 重合（过两点只能作一条直綫），因此过弦 AB 的中点的直径一定垂直于弦 AB. 根据定理 46，这条直径也一定平分 AB 所对的

两条弧．这就証明了定理47.

定理 48　弦的垂直平分綫必过圓心，并且平分这条弦所对的两条弧．

在定理46中我們已經証明，如果直径 DE 垂直于弦 AB，那么直径 DE 也就平分弦 AB，即 DE 为 AB 的垂直平分綫(图 233)。但是 AB 的垂直平分綫只能有一条，因此，如果作弦 AB 的垂直平分綫就一定和直径 DE 重合，所以弦 AB 的垂直平分綫必过这个圓的圓心．根据定理46它也平分弦 AB 所对的两条弧．

例 1　平分已知弧 AB（图 234)．

作法：(1) 連結 AB．

(2) 作綫段 AB 的垂直平分綫交 $\overset{\frown}{AB}$ 于 M 点．M 点就把 $\overset{\frown}{AB}$ 分为二等份．

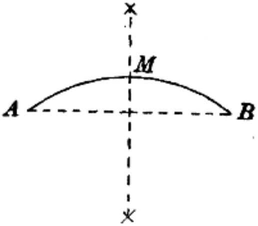


图　234

例 2　如果一条直綫和两个同心圓（就是有公共圓心的圓）都相交，那么这条直綫被截于两圓間的部分相等．

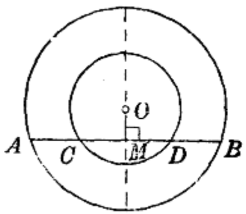


图　235

已知：两个以 O 为公共圓心的圓，直綫 AB 交大圓于 A、B，交小圓于 C、D(图 235)．

求証：$AC=BD$．

証明：过 O 点作弦 AB 的垂綫，交 AB 于 M，那么

$$AM=BM,$$

$$CM = DM \text{（垂直于弦的直径平分这条弦），}$$

$\therefore \quad AM - CM = BM - DM,$

卽 $\quad AC = BD.$

注意：在解有关圓的証明題或計算題的时候，我們有时需要作一条“垂直于弦的直径”作为輔助綫．为了簡便，在用到这条輔助綫时，我們往往只从圓心作一条和弦垂直的綫段，如图 235 中，只要作出 OM 就可以了．

例 3 在半径等于2厘米的$\odot O$中，弦 AB 的长是 3.2 厘米，求圓心 O 到弦 AB 的距离（图 236）.

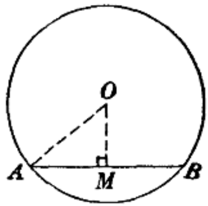


图 236

解：連結 OA，并且从 O 点作 $OM \perp AB$ 于 M，那么

$AM = BM$（垂直于弦的直径平分这条弦），

$$\therefore \quad AM = \frac{1}{2}AB = \frac{1}{2} \times 3.2 = 1.6 \text{（厘米）}.$$

在直角三角形 OAM 中：

$$\begin{aligned} OM &= \sqrt{OA^2 - AM^2} \\ &= \sqrt{2^2 - 1.6^2} \\ &= \sqrt{(2+1.6)(2-1.6)} \\ &= \sqrt{3.6 \times 0.4} = 1.2 \text{（厘米）}. \end{aligned}$$

答：圓心 O 到弦 AB 的距离是 1.2 厘米．

63. **弧、弦、弦心距之間的关系** 圓心到弦的距离叫做**弦心距**，如图 237 中，$OE \perp AB$，OE 就是弦 AB 的弦心距．

定理 49 在同圓或等圓中，等弧对等弦；等弦的弦心距相等．

已知：在 $\odot O$ 中，$\overset{\frown}{AB}=\overset{\frown}{CD}$，$OE\perp AB$，$OF\perp CD$（图237）．

求証：$AB=CD$，$OE=OF$．

証明：連結 OA、OB、OC、OD．把 $\overset{\frown}{AB}$ 連同半径 OA、OB 依箭头所指的方向旋轉，使 A 点和 C 点重合．因为 $\overset{\frown}{AB}=\overset{\frown}{CD}$，所以 B 点就和 D 点重合，因此 $AB=CD$．

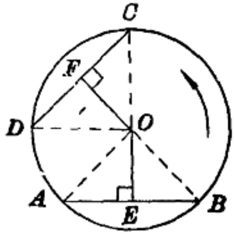


图 237

其次，因为 $OE\perp AB$，$OF\perp CD$，所以 E、F 分别为 AB 和 CD 的中点（定理46）．于是，当 AB 和 CD 重合时，E 点就和 F 点重合，所以 $OE=OF$．

上面是在同圓中来証明的，但对于等圓来說，上述結論也正确．因为我們可以把两个相等的圓迭合成一个圓来加以証明．以后遇到这种情况，我們也只就同圓来討論．

定理 50　在同圓或等圓中，弦心距相等的弦相等；等弦所对的劣弧相等（証明从略）．

如图 238，$\overset{\frown}{AB}$ 和 $\overset{\frown}{CD}$ 是两条不相等的劣弧．如果把 $\overset{\frown}{AB}$ 連同半径 OA、OB 依箭头所指的方向旋轉，使 A 点和 C 点重合，那么，由于 $\overset{\frown}{AB}<\overset{\frown}{CD}$，$B$ 点就要落在 $\overset{\frown}{CD}$ 上（图中 K 点的位置）．从这个图中可以明显地看出：$CD>CK$、$OF<OG$，也就是 $CD>AB$、$OF<OE$．这就說明：在同圓（或等圓）中，如果两条劣

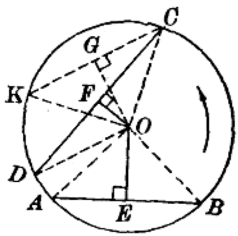


图 238

弧不等，那么大弧所对的弦較大；大弦的弦心距較小（在本书中不作証明）。反过来，我們也可以看出：在同圓（或等圓）中，弦心距較小的弦較大；大弦所对的劣弧較大（在本书中不作証明）。

例 如图 239，O 点是 $\angle A$ 的平分綫上的任意一点，$\odot O$ 和 $\angle A$ 的两边分别相交于 B、C 和 D、E，求証 $BC=DE$，$\overset{\frown}{BC}=\overset{\frown}{DE}$。

已知：AP 是 $\angle A$ 的平分綫，O 是 AP 上的任意一点，$\odot O$ 分别交 $\angle A$ 的两边于 B、C 和 D、E。

求証：$BC=DE$，$\overset{\frown}{BC}=\overset{\frown}{DE}$。

証明：作 $OM\perp BC$ 于 M，$ON\perp DE$ 于 N。

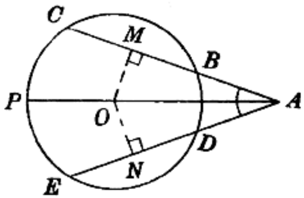


图 239

$\because$ O 点在 $\angle A$ 的平分綫 AP 上，

$\therefore$ $OM=ON$，

$\therefore$ $BC=DE$，

$\overset{\frown}{BC}=\overset{\frown}{DE}$（在同圓中，弦心距相等的弦相等，等弦所对的劣弧相等）。

习題二十三

1.（口答）一个圓有几条对称軸？

2. 作边长是下列长度的三角形，并且作出这些三角形的外接圓：

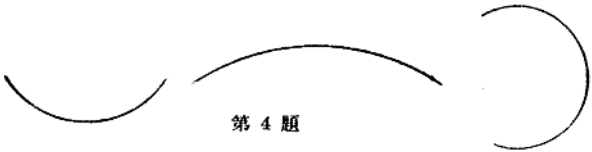
（1）2.6 cm、2.8 cm 和 3 cm；

（2）2 cm、1.5 cm 和 2.5 cm；

(3) 2 cm、1.5 cm 和 3.2 cm.

3. (口答)有一块圓形鋼板，要在它的圓心的地方钻孔，怎样找出圓心的位置？

4. 用薄紙描出下列各弧，找出它們的圓心.



第 4 題

5. 把上題中的各条弧分别分成四等份.

6. 作直径是 4.5 cm 的半圓，并把这个半圓 8 等份.

7. 在 $\odot O$ 中有一个已知点 P，过 P 点作一条弦，使这条弦被 P 点平分.

8. 計算下列各題(R 表示圓的半径，a 表示这个圓的一条弦的长，r 表示圓心到弦的距离)：

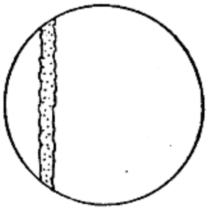
(1) 已知 $R=2.5$ 厘米，$r=1.5$ 厘米，求 a；

(2) 已知 $a=5$ 分米，$r=2$ 分米，求 R(精确到 0.01 分米)；

(3) 已知 $a=3$ 厘米，$R=3.6$ 厘米，求 r(精确到 1 毫米).

9. 在半径等于 1 cm 的 $\odot O$ 中，AB 是弦，$\angle AOB=60°$，求弦 AB 和圓心的距离.

10. (口答)在圓形花坛中，要栽两行等长并且平行的花木. 已栽好一行，怎样确定另一行的位置？



第 10 題

11. 証明：**两条平行弦之間所夹的弧相等**[1]．

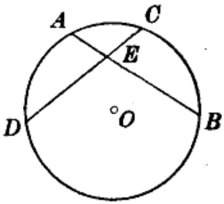
12. 証明：頂点都在同一个圆上的梯形一定是等腰梯形．

13. 在 ⊙O 中，AB 是直径，AC 和 AD 是两条相等的弦，求証 AB 平分 $\angle CAD$．

14. 在 ⊙O 中，相等的两弦 AB、CD 相交于 E，求証：

(1) $\overset{\frown}{AD}=\overset{\frown}{BC}$;

(2) $AE=CE$,　$BE=DE$．



第 14 題

15. 弦与直径相交的角是 $60°$，并且分这条直径为 4 厘米和 12 厘米的两部分，求这弦和圆心的距离．

（提示：可以利用三角函数去解）

II　直綫和圆的位置关系

64．直綫和圆的位置关系　一条直綫和一个圆的相互位置关系有下列三种：

(1) 直綫和圆沒有公共点时，这种位置关系叫做**直綫和圆相离**．如图 240 中的 AB 和⊙O．

(2) 直綫和圆只有一个公共点时，这种位置关系叫做**直綫和圆相切**．如图 241 中，直綫 AB 和 ⊙O 只有一个公共点 P，AB 叫做⊙O 的**切綫**，公共点 P 叫做**切点**．

[1] 在这本书里，凡是用黑体字印出的例題和习題，在解題时都可以作为定理来引用．

（3）直綫和圓有两个公共点时，这种位置关系叫做直綫和圓**相交**．如图 242 中，直綫 AB 和 $\odot O$ 相交，这时我們把直綫 AB 叫做 $\odot O$ 的**割綫**．

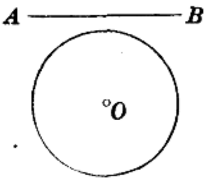


图 240

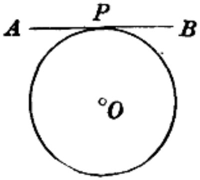


图 241

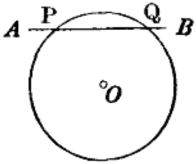


图 242

65. 切綫的判定定理

定理 51 經过半徑外端并且垂直于这条半徑的直綫是圓的切綫．

已知：OC 是 $\odot O$ 的半径，直綫 $AB \perp OC$ 于 C 点（图 243）．

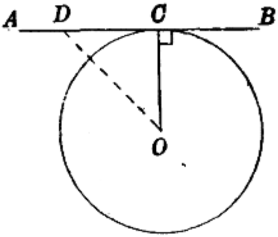


图 243

求証：AB 是 $\odot O$ 的切綫．

証明：因为 OC 是半径，所以 C 点在 $\odot O$ 上．又因为 C 点是垂足，所以 C 点也在直綫 AB 上，因此，C 点就是直綫 AB 和 $\odot O$ 的一个公共点．

其次，在 AB 上除 C 点以外的任意一点和圓心的距离（例如 D 点和圓心的距离 DO），一定大于半径 OC（由直綫外一点与直綫上的点連成的許多綫段中，以垂直于直綫的綫段为最短），所以除 C 点外，直綫 AB 上的其他各点都在圓外，

这就是説，AB 和$\odot O$ 只有一个公共点 C. 因此，AB 就是 $\odot O$ 的切綫.

根据切綫的判定定理，可以得到过圓上的已知点作圓的切綫的方法. 方法是: 把 $\odot O$ 上的已知点 P 和圓心 O 連結起来，再过 P 点作 OP 的垂綫 AB, 那么直綫 AB 就是 $\odot O$ 的切綫(图 244). 如果用三角板和直尺来作，可以先使三角板的一条直角边落在 OP 上，再把直尺的边与三角板的另一条直角边密合(图 245)，最后拿开三角板，用鉛笔沿直尺的边緣作直綫 AB, AB 就是所作的切綫. 这样去作比直接沿着三角板的直角边作直綫要准确些.

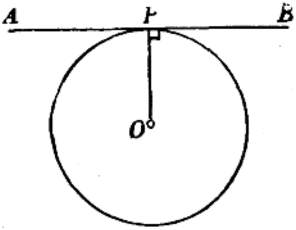


图 244

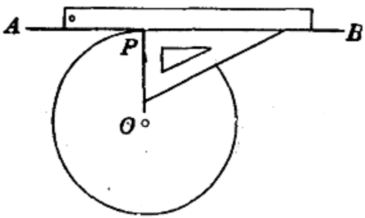


图 245

66. 切綫的性質定理

定理 52 切綫垂直于过切点的半徑(或説过切点的半徑垂直于切綫).

已知: AB 是 $\odot O$ 的切綫，C 是切点(图 246).

求証: $OC \perp AB$.

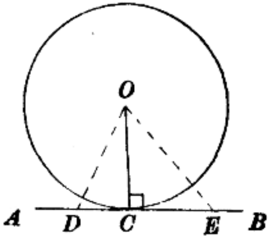


图 246

証明：因为 AB 是 $\odot O$ 的切綫，C 是切点，根据切綫定义可以知道，C 点就是 $\odot O$ 和 AB 唯一的公共点．又因为在直綫 AB 上，除了 C 点以外的点，如 D、E……都在圓外，因此 OD、OE……都大于半径 OC．这就是說，OC 是从 O 点到直綫 AB 的所有連綫中最短的一条，因此，$OC \perp AB$．

例 1 求証：和一个角的两边都相切的圓的圓心在这个角的平分綫上．

已知：$\odot O$ 和 $\angle A$ 的两边相切于 B、C 两点，AD 是 $\angle A$ 的平分綫（图 247）．

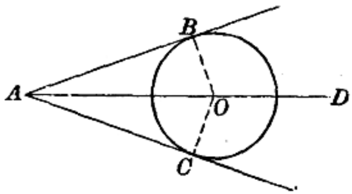


图 247

求証：O 点在 AD 上．

証明：連結 OB、OC．

$\because$ $\odot O$ 和 $\angle A$ 的两边相切于 B、C，

$\therefore$ $OB \perp AB$, $OC \perp AC$（过切点的半径垂直于切綫）．

又 $OB = OC$，

$\therefore$ O 点在 $\angle A$ 的平分綫 AD 上（到角的两边距离相等的点在角的平分綫上）．

在实际工作中，利用中心規来确定圓形工件的圓心时，就要用到例 1 的道理．如图 248，中心規的两脚的內边 DC 和 DE 都和圓相切．鋼尺的边緣 AB 是 $\angle CDE$ 的平分綫．

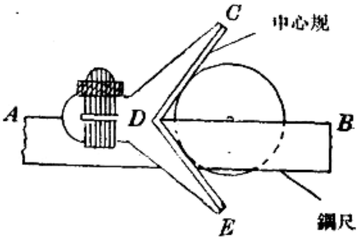


图 248