中央人民政府高等教育部推薦

高等學校教材試用本

數學解析教程

（上册 I）

А. Ф. Бермант 著

張理京等合譯

重工業出版社

1953

中央人民政府高等教育部推薦

高等學校教材試用本

數學解析教程

(上册)

А. Ф. Бермант 著

張理京 等合譯

重工業出版社

1953

А. Ф. Бермант 著

數學解析教程

（上册 II）

張理京 等譯

重工業出版社出版

1953

數學解析教程

上　册

張理京 等合譯

重 工 業 出 版 社 出 版
北京中央人民政府重工業部

中國圖書發行公司發行

旅大人民印刷第二廠印刷

1952年12月第一版　　1—9970册
1953年6月第二版　　9971—14970册
定　價　　¥ 17,000

中央人民政府高等教育部推薦
高等學校教材試用本的說明

充分學習蘇聯的先進經驗，根據國家建設需要，設置專業，培養幹部，是全國高等學校院系調整後的一項重大工作。在我國高等學校裏，按照所設置的專業試用蘇聯教材，而不再使用以英美資產階級教育內容爲基礎的教材，是進一步改革教學內容和提高教學質量的正確方向。

一九五二年九月二十四日人民日報社論已經指出：'蘇聯各種專業的教學計劃和教材，基本上對我們是適用的。它是眞正科學的和密切聯系實際的。至於與中國實際結合的問題，則可在今後教學實踐中逐漸求得解決。'我們現在就是本着這種認識來組織人力，依照需要的緩急，有計劃地大量翻譯蘇聯高等學校的各科教材，並將陸續向全國推薦，作爲現階段我國高等學校教材的試用本。

我們希望：使用這一試用本及今後由我們繼續推薦的每一種試用本的教師和同學們，特別是各有關教研組的同志們，在教學過程中，對譯本的內容和譯文廣泛地認眞地提出修正意見，作爲該書再版時的參考。我們並希望各有關教研組在此基礎上逐步加以改進，使能結合中國實際，最後能編出完全適合我國需要的新教材來。

中央人民政府高等教育部

序

本書原著是蘇聯別爾曼特教授爲適合蘇聯高等教育部 1950 年新教學大綱而改編的第六版“數學解析教程”（詳見原序）。這本書也跟其他許多優秀的蘇聯教材一樣，內容豐富，注重聯繫實際，同時說理清楚而又富於思想性，是一本值得介紹的好書。

目前我國在工業經濟建設開始的階段需要培養大量專門人材，而我們就缺少配合實際需要的教科書與參考書。解決教材問題的第一個步驟無疑地是要吸收蘇聯的先進科學成就與先進教學經驗。這本書的譯出，在介紹蘇聯教材的教學觀點、思想方法以及愛國主義教育等各方面，對於我們教學工作上，必然是有貢獻的。

本書翻譯工作是在 1951 年秋季開始的，當時大連工學院採用本書爲主要教材。由於大連工學院領導上的重視及數學教研組與編譯室全體同志的努力，終於將這書譯出。現在將分工情況介紹於下:

（1） 翻譯工作。顧同高: 預篇的第13節;
張義桊，蕭義珣，陸智常: 第二章，第三章;
徐潤炎: 第四章前兩節;
張理京: 全書其餘部分。

（2） 集體校訂工作。數學教研組全體: 自原序至第五章，第七章至第十二章（內缺若干節）。

（3） 最後校訂與校對工作。顧同高，張理京，陳百屏。

（4） 排印聯繫工作。周承舟（教務科），顧同高。

應該要感謝的是旅大人民印刷廠第二廠排版與改版的同志們，雖然我們一再修改辭句與更換譯名，帶給他們很多的困難，但是他們始終很耐心地克服了這些困難。

另外要提到的是翻譯者與校訂者對於原書中某些小錯誤曾加以修正。而且有幾處是根據蘇聯"數學成就"雜誌第七卷第二期及第四期所載托爾斯多夫教授關於原書的評論與原著者的覆文而加以修改的。來不及修改的錯誤儘量登記在正誤表裡。

限於翻譯者與校訂者的業務水平與俄文修養，這譯本裡的錯誤與缺點一定還是很多，希望用本書的教師們與讀者們隨時予以指正幫助！

陳 百 屏

1952年底

原　　序

在這第六版中，本書經過相當多的修訂，其首要目的是使本書能完全適合蘇聯高等教育部所頒佈的高等技術學校新教學大綱（1950年）。

修訂時著者面前擺着下列三項總的任務：

1）把屬於哲學方法論上的，以及屬於歷史性的知識，放到教程裡面去；

2）講解一些為每個工程師所必需的知識，即關於近似值計算法及實際計算以及關於幫助作那些計算所用的計算機；

3）從教學法方面來改進教本，並參照幾年來的教學經驗，克服教本上所發現的缺點。

著者在“引論”裡面要簡略講到數學的起源問題，講到數學的重要任務，講到理論與實踐間的相互關係，講到俄羅斯偉大數學家（歐拉，羅巴契夫斯基，契伯雪夫）以及其他傑出學者與大工程數學家（如茹可夫斯基，賈普利金，克路洛夫）在科學與工程發展史上的地位。

在“預篇”一章裡，特別有一節講近似值計算法中的初等問題。本書後面處處盡可能講到如何把理論應用到數值計算問題上。因此關於微分概念、有限增量公式、台勞公式與級數等等對於各種近似值計算法的應用就講得相當多一些。書中加了幾小節關於普通方程的近似解法，函數的圖解微分與積分法，以及微分方程的近似積分法等等。此外著者還設法讓讀者認識一些重要的自動計算機及計算儀器（迄今所知，這在教科書性質的文獻上還是個創舉）：在§3中要敘述那些處理各個數據的計算機，並且在本書後面適當的地方還要講那些處理連續數據的儀器（積分製圖器①，測面器②，積分計③，測長計④，微分及諧量分析器⑤）。

---

① Интеграф　② Планиметр,　③ Интегриметр,　④ Длиномер,

⑤ Дифференциальный и гармонический анализаторы.

但在加添這些材料時，著者曾避免把技術上的細節講得太多，只能讓讀者去參考關於這方面的現有專門書籍以及每件儀器上通常都附有的說明書。著者只打算使讀者對那些幫助作繁複運算的機械工具，知道一些大概。

現代科學與工程實踐上的創造性工作都需要具有極高度的數學知識，並且這不僅是指能够搬運公式，而主要的乃是須瞭解數學解析中各種概念與運算的本質。因此如何克服那個在數學中易陷入的、以及在實際教學工作中易犯的"公式主義"，如何克服那隨之而來的對數學解析的膚淺學習，乃是我們最重大與主要的問題。著者認爲如果按下列程序來擬教材結構的話，就可能正確地解決這個問題，這個程序是：實踐——解析的基本概念——這些概念的性質(理論)——計算方法——用法——實踐。著者在這全部教程內一貫按這種程序來講解，那樣才可能指出數學與實踐的聯繫，揭露其中一些基本概念的物質根源，並說明在解決具體的物理與技術問題時如何應用數學理論的顯明原則。在所有這些要求下，著者當然有責任把本書中的每一部份弄得盡可能易於瞭解。

從講解方面來改進本書的路線，是根據著者自身的經驗以及用過本書的教授和教師們的許多意見得來的。首先著者設法把長的以及繁複的一些討論分成幾段。其次著者在內容方面重新作了各種穿插與編排，使教本的結構更有層次並且更加簡單。

莫斯科航空學院高等數學教研組在總結對於本書初稿的討論中，表明他們的希望，認爲可以將關於定積分與不定積分的材料予以改編，以便毫無困難地按照任意次序進行這部分材料的講授：先講定積分後講不定積分，或者顛倒來講都行；有些工學院裡講這幾章時寧願先講不定積分，著者考慮到他們的願望，因此也就作了這種改編。最後，本書的全部材料都經重新仔細校閱過並且重寫過。

除了上面所講的以外，本書在各章節上還有如下的一些最重要的更動：

第二章中加上均勻連續性概念，並證明了基本初等函數的連續性。第三章中把微分概念放在全部微分法完了之後再講，並加上萊布尼茲公式。第四章幾乎所有各部分都重編過；裡面提出了近似多項

式問題，討論了契伯雪夫線性近似式（以及與零相差最小的契氏多項式），講解了曲線的接觸度問題，然後引出曲率概念。在第六章中敍述了奧氏（奧斯特羅格拉特斯基M. В. Остроградский）的有理分式積分法。第七章是新添的，講直接應用於計算定積分的積分方法，講（數值計算的及圖解的）近似積分法及旁義積分，並且關於後者的理論大爲增加。這一章可以在依照第五——第六兩章的次序講完後再講，也可以在依照第六——第五兩章的次序講完後再講。我們又把級數論（三角級數除外）放在本書上卷作爲第九章，其中添入級數的運算法則，擴充了關於冪級數應用問題的材料，補充了一些複數的四則運算法及複平面上的冪級數。第十章中蒐集了多變量函數的導數及微分概念以及偏微分法的材料，第十一章講微分學的下列應用：在對於所有關於函數的研究，在矢量解析及幾何上的應用；其中最後幾小節的材料增加得相當多。第十三章中把關於場論（勢，流及環流）的問題併成一大節，這可以算是矢量解析的積分部分；而第十一章 §2 中的材料則可作爲矢量解析的微分部份（梯度，散度，及旋度）。在第十五章中我們導出了逐段滑溜函數可展開爲福里哀級數的充分條件，並敍述了具有有限個間斷點及極值點的函數展開爲這種級數的類似條件，此外又講了克路洛夫使級數收斂性加快的方法。

所有說明性質的例子及超出教學大綱中所規定的那些材料是用小字排印的；如果略去那些材料，後面用大字排出的各部分仍然可以瞭解，並無影響。

適用於這新訂本的別爾曼（Г.Н. Берман）習題彙集也已修訂。（下略）。

引　論

讀者開始研究數學解析這門課程時，應該瞭解（即使是很籠統的）這門課程的目標，它在自然科學與技術訓練系統中的重要性，數學對於現實的關係，及本書中所要提到的那幾個俄羅斯大數學家的功績。我們在本書開頭幾頁裏就要講這幾個大問題，雖然我們知道讀者不會都事先熟悉高等數學中的方法及所研究的對象，但希望所講的知識能幫助他有信心地掌握這門課程。我們也希望讀讀者在往下研讀本書的時候回過來翻閱這頭幾頁。

在§1中我們解釋"初等數學"與"高等數學"間的差異以及這種分法的慣例性，使讀者認識數學解析的主要任務是什麼，并清楚數學理論與客觀現實間的關係。在§2中講了一些關於俄羅斯大數學家的歷史知識。

§1. 數學解析及其意義

1. "初等"及"高等"數學. 一般統稱做"初等數學"的那幾門數學（初等代數，初等幾何及三角）來源很早。現有的初等幾何學整個系統，除了極小部份以外，是在公元前五至三世紀時就已形成了的。古代巴比倫人（公元前三至二世紀）對於代數變換法及方程解法也具有相當可觀的技巧，但代數作爲一門科學來說，它的產生却在公元後八世紀，那時有個阿刺伯著名學者摩罕默德、阿里、赫萊士米在他的著作"Альджебр альмукабала"中講解了代數的基本原理；並且代數"алгебра"這個名稱也是從該書書名的第一個字得來的。三角法的產生也是跟更早期的天文學研究有關的；不過對於三角函數及其屬性的概念則一直到十六及十七世紀時才研究出來。

通常統稱爲"高等數學"的那幾門數學，是隨着十七及十八世紀中科學與工程的進步而發展起來的。應該指出，"高等數學"中一些個別的觀點與方法是古代偉大數學家物理學家兼工程師亞幾米德（公元前287—212）早認識到的。不過"高等數學"還是比較年青的科學。

數學的"高等"與"初等"之分是照慣例的。我們不可能說出任何一個決定性的準則，以便根據它來判定某些數學事實或某些數學定

理是屬於"初等數學"的。但是我們可以指出習慣上稱爲"初等數學"的、由歷史上與教學上所形成的那門中學課程所固有的兩大特徵。

初等數學的第一個特徵在於其所研究的對象乃是不變的量或圖形。初等數學中的典型問題是：已給一代數方程——要找出滿足該方程的常數（方程的根）；用初等代數中所講的法則把已給代數式變換爲他式；算出某些幾何常量（例如長度、面積及體積）的値，或作出一定的點線及圖形，使其具有所需的屬性。

三角法中所考慮的是三角函數隨着角或弧而變化的情形，但所講的材料是描述性質的而不是根據某種一般理論推出來的，通常這種材料不能作爲導出三角函數的屬性的根據。初等三角法中的基本問題帶有跟幾何與代數的問題相同的性質：研究三角式子的簡單變換法以及用三角函數來計算幾何圖形中的元素。

第二個大特徵是在方法上。初等代數與幾何中的理論是各自獨立構築出來的。初等數學中的代數法（或按廣義的說法叫做解析法）跟初等幾何中的綜合法在本質上是沒有聯繫的。但這裡我們當然並不是說幾何及三角中的計算問題不會用到最簡單的代數公式。重要的一點是，在初等數學範圍內沒有總的原理，使我們能唯一地解釋所有代數問題的幾何意義，而把所有幾何問題用代數術語陳述出來並用計算法從解析上來解決。

工程上與經濟上的實際需要迫使人對自然界作比前更深刻的研究，研究的結果使人對周圍世界中所觀察到的變化過程與現象創立了學說。這首先涉及物理現象。但要從量的方面來研究變化過程時，就必須創出新的數學，使我們能用解析來掌握參與過程的各個量的相互變化情形。

數學解析，特別是本書中所要講的微積分法，乃是高等數學中極重要的部份；它跟初等數學不同，是在依從關係中去研究變量的。

在方法上高等數學也跟初等數學相反，前者是在代數法（按廣義說來即解析法亦即計算法）與幾何法密切結合的基礎上發展起來的，而這種結合首先出現在法國著名數學家兼哲學家笛卡兒(1596—1650)的解析幾何學中*)。坐標觀念是這樣的一個總的原理：有了它，

*) 譯者註：蘇聯中等學校中不講授解析幾何；解析幾何被列入高等數學以內。

我們一方面能用代數（或解析）的運算來順利證明幾何定理，而另一方面由於幾何觀念的顯明性，使我們又能發掘及建立解析性的新定理與新論點。

但是我們還要注意到，數學的“初等”與“高等”之分是照慣例的，與其說是根據原理特性來分的，還不如說是根據教學特性來分的。所以初等數學中也漸漸愈來愈多地包括了觸及高等數學的思想的問題。

2. 量的概念。變量及函數依從關係。 在任何自然科學及技術的知識領域中，我們每一步都碰到的一個基本概念，就是量的概念。**所謂量是能加以度量並用數（一個或多個）表示出來的一切。** 換言之，**凡是可以施行度量（形式最簡單的度量或是經數學方法改進了的度量）的一切對象叫做量。** 形式最簡單的度量是：取一個本質跟被量對象相同的東西作爲“度量單位”，然後直接確定該被量對象“容納”多少倍“單位”。經數學方法改進了的度量以及上述最簡單的度量的繼續發展，便引出數學解析中所研究的新的重要概念——導數概念及積分概念等等。

在實際生活及自然科學與技術科學的具體問題中，我們一定會遇到種種本質不同的量。例如：長度、面積、體積、重量、溫度、速度、力、等等這些東西都是量。但是在數學中並沒有具體的量。數學（特別是數學解析）中所創出的一般理論是可以應用到種種本質不同的量上去的。要能創出這一般理論，就必須在陳述數學原理及數學規律時抽去各種量的具體性質而只注意它們的數值。根據這個道理，所以數學中只考慮**一般的量**，而用某種記號（字母）表示，**毫不假定它可能含有什麽具體物理意義。** 正因爲如此，所以數學理論是可以應用來研究任何具體的量，而同樣獲得成功的。數學理論的一般性或普遍性或所謂抽象性（這個名詞常被人誤解爲脫離實際與現實）也就表現在這一點上。恩格斯用下面的話着重指出數學的這項特性：“要純粹地研究這些（空間——著者註）形狀及（數量——著者註）關係時，就必須完全不管它們的內容，把內容看作是與研究無關的東西而加以拋棄。於是就有所謂無大小可言的點，無粗細可言的線，有 a 及 b，有 x 及 y，有常量及變量……”（俄文版馬恩全集第十四卷39頁）。

在一起考察的諸量中，常有些是變化着的，而另一些量是不變的。變化與運動乃是通常所謂現象及過程中的首要標誌。在自然界或工程上所觀察到的現象，我們都領會作是：參與該現象的一些量，受另一些量的變化所約制而起的變化。例如在觀察恒溫下一定質量的氣體時，我們就注意其體積變化時的壓力變化情形。用數學方法研究過程所得的知識，結果比不用數學方法時遠為深刻完備而且準確。但要用數學方法來研究過程，就必須在數學中引入變量概念；而這事確實就在創立新數學的第一階段時（笛卡兒及其後的牛頓與萊布尼茲時代）做到了。數學裡面引用變量乃是數學史上的一件大事，關於這一點恩格斯曾寫道："笛卡兒的變量是數學上的轉折點。有了變量，數學裡就有了運動與辯證法，有了變量，不久就需要有微積分法，而微積分法也就在那時產生，並且總的說來它是在牛頓和萊布尼茲兩人手上完成的，不是他們憑空發明的"（1948年版俄文本"自然辯證法"208 頁）

凡是可取得各種數值的量叫做變量；凡是保持同一數值的量叫做常量（或常數）。

如前所講，我們把每個現象或過程（從數量方面）看作是若干變量間的相互變化情形。這種看法使我們引到數學裡極重要的概念——**函數依從關係。**

如果兩個變量間有下列關係：其中一個量的變化會引起另一個量的一定變化，那末這種關係就叫做那兩個量之間的函數依從關係。把已給過程中各個量之間的函數依從關係確立出來並加以描述，是自然科學及技術科學的首要任務。變化過程的規律無非就是**出現在該過程中並且刻畫該過程的函數依從關係**；也可以說是這函數依從關係描述了變化過程。例如在常溫下氣體壓力（p）與體積（v）之間的函數依從關係是 $p=\frac{k}{v}$（k 為常量），而這依從關係就定出了氣體在所論條件下所遵守的變化規律（波義耳——馬利奧脫定律）。用話表達的這個函數依從關係：（在恒溫下）**氣體壓力與其體積成反比例**——便是上述規律的通常陳述法。

這個函數依從關係觀點，是由於普遍公認的因果原理而發生。因果原理在十七及十八世紀中為自然科學及其他各門科學所傳播着，不

過這原理跟函數依從關係的數學觀念是有本質上的差別的。它需要找出引起已知結果的（一切的或只是最重要的）確實的原因，而函數依從關係則僅提供諸量間的關係，並不一定認爲其中某個量的變化乃是使他量變化的實際原因。例如一晝夜間空氣溫度的變化是由許多原因所致的：風力的變化，太陽輻射力的強弱，以及空氣濕度等等。但這裡我們却可以直截了當地建立出溫度與（一晝夜內）時間的函數依從關係。儘管時間的進行決非溫度變化的“原因”，但是如果我們要從量的方面去刻畫溫度的變化過程，並因而要瞭解這變化過程的特性時，上述函數依從關係便可能是極重要的資料。

數學解析是以全面研究函數依從關係爲其主要目標的。多虧爲這種研究所發展起來的方法，人們發見了極有力的工具，使能藉以對自然科學及工程上的各種各樣的問題，進行準確而深刻的研究。“只有微分法，才不僅使科學上能用數學來表示（靜的——譯者註）狀態，而且還可用它來表示（動的——譯者註）過程：運動”（恩格斯，自然辯證法；1948俄文版 220 頁）。

3. 數學解析與現實。不僅是在各門自然科學的狀態和過程中，而且在各門社會科學中，凡是必須從量的方面去考察其中的狀態和過程時，我們都可用數學來作研究。（數學上所研究的問題不一定是數量性質的，也可能是屬於空間形狀及其關係的；但這些問題本書中幾乎不會講到）。對於科學與工程來說，數學是其理論研究的極重要方法及實用工具。如果沒有那些初等數學與後來的高等數學中所給的工具，就不能做任何技術上的計算，所以如果沒有數學就不可能進行工程上與科學技術上的任何嚴正的工作。這是由於技術科學要以物理學、力學、化學等等爲其基礎，而後者中的數量性的規律必須用數學解析上的函數概念及其他概念表示的緣故。迦利略早就說過：“自然規律要用數學語言來記錄”，恩格斯也曾說：“……要辯證而又唯物地瞭解自然就必須熟悉數學……”（“反杜林論”；見俄文版馬恩全集十四卷 8 頁）。

正因爲物理學力學等等上的基本規律是用數學語言表達出來的，所以使我們可能在理論上藉邏輯推論及計算的幫助，從已知規律性找出結果，並解決自然界及人類實踐所提出的新問題。

過程中量的規律性與其質的本性間並無厚牆相隔：量與質兩方面有密切關係，這是完全符合於辯證唯物論的。所以在科學及工程上所考慮的任何過程，如果從一切方面以及從整體上去認識時，數學是必不可省的東西。有人說得對，數學是掌握技術的鑰匙*)。

如前所述，由於十六及十七世紀中自然科學及技術科學上的需要，就不可避免地產生了數學解析中的一些觀念和方法，而科學與工程的蓬勃發展，是受到生產的急劇變革和擴大所激起的。“科學的發生和發展，一開始，就已受了生產的約制”（恩格斯，自然辯證法，1948俄文版147頁）。

本書中凡是適當的地方，我們都要盡力說明其中基本的數學概念及運算的現實與具體的根源，要指出什麽客觀事實和條件產生了新的數學理論。其次我們要盡可能使這些理論是按數學的嚴格性講的，以便將來在提高的水平上指出其更廣泛的應用。因爲歸根到底理論的意義是要在實踐階段裡決定的。

發展數學理論時（一般對其他任何科學理論都一樣），決不可忘却該理論的根源；我們應該記住，要判別理論的可靠與否以及有無價值，決定性的準則是在生活實踐上的考驗。列寧曾寫道：“**生活的觀點實際上應爲認識論的首要與基本的觀點**”（第四版列寧全集14卷130頁）。

俄羅斯大數學家契伯雪夫，對於數學理論與實踐間的關係曾說過極有意義的話：“理論與實踐結合會產生極良好的結果，而受惠的不僅是實踐；**科學本身就是在實踐的影響之下發展起來的：實踐把新的研究對象或已知對象的新的方面揭示給科學**（重點是我們加的——著者）。儘管晚近三百年來大幾何學家（亦即數學家——著者註）的工作使科學有這樣高度的發展，但實踐仍顯然指出科學在各方面的不够完善；實踐提供科學在本質上嶄新的問題，因此促使人們尋出嶄新的

*) 由此讀者可以自己體會到，如果要想靈活地掌握他所選擇的專門技術，那就必須深入瞭解數學概念及其定理的精神所在，而不能僅限於所學事物的形式方面，必須深刻而不是膚淺地研究數學解析及其應用。一句話，如果讀者全力以赴，對所學的數學解析課程深思熟慮心有所得，使他學習別的課程時及以後做科學或實際工作時，數學解析能確實成爲他手中的工具，那麼他的學習態度是正確的。

方法（來解決它）。如果舊法的新應用及新發展使理論得到很多改進，那末新方法的發明對於理論的貢獻更大，在這種情形下科學在實踐中找到可靠的指導者”。（“地圖繪製問題”見“契氏數學著作選集”，蘇聯國家技術出版社1946版，第100頁）。關於數學在經驗上的根源問題，我們再引證恩格斯的話：“圖形概念跟數學的概念一樣，是完全借鑑於外界的，而根本不是從頭腦中純粹思維產生出來的。在人類能有圖形概念以前，就該存在着具有形狀的東西而人們將他們的形狀加以比較”（“反杜林論”，見馬恩全集第十四卷39頁）。在這裡恩格斯更往下討論到數學的對象問題，由於其所講的話深刻而又簡明，故可把它看作是對於數學的最準確而又令人滿意的定義：

“純粹數學的對象是現實世界中的空間形狀與數量關係”，而這，恩格斯往下說道，“…是非常現實的內容。雖然這內容以極端抽象的形式出現，但那只能略微掩飾它起源於外間世界的事實”（同上）。

哲學上的唯心論者認爲科學不是存在於我們身外的客觀現實的反映，而是人類心靈所自由創出的產物。但科學能使人得到預見，這事跟上面的觀點不可能調和。人之能具有預見，恰恰證實了數學這門科學也是由客觀現實產生的，證實了它的規律與關係是以數學上特有的抽象形式正確反映出來的物質世界中的現實關係。如果所證實的事並不如此，那末爲什麼憑藉數學的幫助由理論方法（由可靠的假定出發）得出的推論會得正確，爲什麼“預言”會得跟現實、跟以後確實發生的事完全相符合呢？

科學史上充滿着著名的預見例子。這裡我們只略講兩個例子，它們很足以說明數學在其中的作用：

1）法蘭西學者列佛利*）(1811--1877)曾研究太陽系中的行星運動問題。起初他根據古典力學中用已知函數關係表示出來的定律，但發現由此所得的一些推論跟觀察的事實有出入；他又發現：如果假設還存在一個具一定質量及在一定軌道線上的行星，便可使推論與事實沒有出入。不久就有人根據他的推測，在他所指定的時間和位置發現了一顆新行星——後來稱爲海王星。這樣就曾有人在案頭紙上藉計算

*）U. J. J. Leverrier.