科學圖書大庫

微積分探原

譯者　吳英格

徐氏基金會出版

科學圖書大庫

微積分探原

譯者　吳英格

徐氏基金會出版

徐氏基金會科學圖書編譯委員會

科學圖書大庫

監修人　徐銘信　科學圖書編譯委員會主任委員
編輯人　林碧鏗　科學圖書編譯委員會編譯委員

中華民國六十六年十月十八日再版

微積分探原

基本定價 1.80

譯者　吳英格 國立台灣大學數學研究所碩士

(63)局版臺業字第0116號

出版者 財團法人臺北市徐氏基金會 臺北市郵政信箱53-2號 電話7813686 7815250號
發行者 財團法人臺北市徐氏基金會　郵政劃撥賬戶第15795號
承印者 大興圖書印製有限公司 三重市三和路四段一五一號 電話9719739

我們的工作目標

文明的進度，因素很多，而科學居其首。科學知識與技術的傳播，是提高工業生產、改善生活環境的主動力。在整個社會長期發展上，乃對人類未來世代的投資。從事科學研究與科學教育者，自應各就專長，竭智盡力，發揮偉大功能，共使科學飛躍進展，同將人類的生活，帶進更幸福、更完善之境界。

近三十年來，科學急遽發展之收穫，已超越以往多年累積之成果。昔之認爲若幻想者，今多已成爲事實。人類一再親履月球，是各種科學綜合建樹與科學家精誠合作的貢獻，誠令人無限興奮！時代日新又新，如何推動科學教育，有效造就科學人才，促進科學研究與發展，尤爲社會、國家的基本使命。培養人才，起自中學階段，此時學生對基礎科學，如物理、數學、生物、化學，已有接觸。及至大專院校專科教育開始後，則有賴於師資與圖書的指導啓發，始能爲尉爲大器。而從事科學研究與科學教育的學者，志在貢獻研究成果與啓導後學，旨趣崇高，彌足欽佩！

本基金會係由徐銘信氏捐資創辦；旨在協助國家發展科學知識與技術，促進民生樂利，民國四十五年四月成立於美國紐約。初由旅美學人胡適博士、程其保博士等，甄選國內大學理工科優秀畢業生出國深造，前後達四十人，惜學成返國服務者十不得一。另曾贈送國內數所大學儀器設備，輔助教學，尙有微效；然審情度理，仍嫌未能普及，遂再邀請國內外權威學者，設置科學圖書編譯委員會，主持「科學圖書大庫」編譯事宜。以主任委員徐銘信氏爲監修人，編譯委員林碧鏗氏爲編輯人，各編譯委員擔任分組審查及校閱工作。「科學圖書大庫」首期擬定二千種，凡四億言。門分類別，細大不捐；分爲叢書，合則大庫。爲欲達成此一目標，除編譯委員外，本會另聘從事

翻譯之學者五百餘位，於英、德、法、日文出版物中精選最近出版之基本或實用科技名著，譯成中文，供給各級學校在校學生及社會大衆閱讀，內容嚴求深入淺出，圖文並茂。幸賴各學科之專家學者，於公私兩忙中，慨然撥冗贊助，譯著圖書，感人至深。其旅居國外者，亦有感於爲國人譯著，助益青年求知，遠勝於短期返國講學，遂不計稿酬多寡，費時叉多，迢迢乎千萬里，書稿郵航交遞，其報國熱忱，思源固本，至足欽仰！

今科學圖書大庫已出版一千餘種，都二億八千餘萬言；尙在排印中者，約數百種，本會自當依照原訂目標，賡續進行，以達成科學報國之宏願。

本會出版之書籍，除質量並重外，並致力於時效之爭取，舉凡國外科學名著，初版發行半年之內，本會卽擬參酌國內需要，選擇一部份譯成中文本發行，惟欲實現此目標，端賴各方面之大力贊助，始克有濟。

茲特掬誠呼籲：

自由中國大專院校之教授，研究機構之專家、學者，與從事工業建設之工程師；

旅居海外從事教育與研究之學人、留學生；

大專院校及研究機構退休之教授、專家、學者

主動地精選最新、最佳外文科學名著，或個別參與譯校，或就多年研究成果，分科撰著成書，公之於世。本基金會自當運用基金，並藉優良出版系統，善任傳播科學種子之媒介，尙祈各界專家學人，共襄盛擧是禱！

徐氏基金會　敬啓

中華民國六十四年九月

目　錄

第一章　無窮程序的性質
(The Nature of the Infinite Process)

解析幾何學 (Analytic geometry) 與微積分學 (Calculus)形成大學教育方案上對初學者的兩門主科，二者間的區別從其名稱上就可以看得很清楚；其一討論幾何學，另一討論演算法。然而實質上，此種區別所表示的原理並不確切。無窮程序一樣牽涉到幾何對象，正如其在計算對象上所牽涉的，而且平面上或空間中二次及三次的圖形幾何性質可以包含於純粹演算的行列式論中。因此，這二門科目間的眞正區別在於微積分是利用無窮程序，而解析幾何學避免用到無窮程序。這種區別在數學中一直推廣出去，遠超初等課程所能瞭解的地步。不僅如此，對整個科學的分類之進行也給予了僅有的堅實根基。只要數學有所發展，這種區別將越來越明顯，而幾何學與演算學之間的區別也就會慢慢的消去。職此之故，我們的第一項工作便是如何把無窮程序的主要性質描述出來。在後面的若干章節裡，我們將討論到無窮程序的若干特殊種類，如求微分、求積分及無窮級數之和。

1. 希臘人對"無窮小"推想的起源

假若一新觀念對同時代的人顯得很荒誕，並先遭受到攻擊時，那麽，這件事便表示此新觀念眞正偉大的地方，齊諾 (Zeno) 的似是而非的說法 (paradoxes) 便是第一個指明給我們無窮程序的顯明概念，那時候的知識生活如何？我們知道的很少，對他們的作者來說，那些似是而非的說法無疑的並非準雙關迷語。至於會有這種事實發生，主要是太注重問題所給的形式。在一篇有關我們所欠缺的似是而非的報導裡，亞里士多德便肯定地不相信他們那一套，而且力辯說 "我不能由這裡走到牆！假若這樣做的話，我得首先完成這段路程的一半，然後走剩餘的一半，再走所餘的一半；此程序可以一直進行下去，但始終無法到達目的地 "。難道齊諾沒有注意到橫越這些連續的一半路程所需要的時間越變越短嗎？他僅僅辯論到無窮程序的矛盾性，這在閉聯集的進行道路上是無法避免的。而且這種辯法雖以富有年青的氣息表出，說起來却幾乎與他的初衷相反，這表明一件事實，數學家第一次敢於

探求無窮多，但恆減少的片刻時間的和，如

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\cdots\cdots$$

把這篇亞氏的報告，跟一片斷的報告譬如；紀元前第五世紀（從Anaxagara 傳下來的）加以比較："設有小中的最小，也設有大中的最大；但總有較小的及較大的。"比較這些話，在今天看來就一點也不稀奇；但在原子學說（Atomism）時代却不然，這並非是我們用以想像的，分佈於空間中成孤立東西"原子"的原子學說（Atomism ）而是把本身預想成不連續性以及把一線段想成不可能無限制的區分的可能性的理論。齊諾的似是而非足可反對表明於安那薩哥拉斯（Anaxagoras ）之敍述中的原子學說，盡管對於厄立帝克斯（Elea rtics ），畢達哥拉斯以及其他哲學學派之間的相互關係是無可置疑的，齊諾的批評直接反對着某種首次，不確實的新數學的要求，此即想把立基在直覺上的淺近原子觀點代之以系統的推理而得的定律。

正當"畢氏學派"發現"無理的"的時候，齊諾似是而非所給予的說明便公開的跟"畢氏學派"發生衝突，致而使得無限程序的概念容易地建立起來，並舖下其不渝的根基，這些概念一直適用到今天。此"無理的"之意義究竟是什麼？它蘊藏在一正方形的一邊長與其對角線長之間的"不可通約"——意即缺乏共同量度——的發現上。

做一直角的"木匠"定則早爲人所熟悉。做一三角形之二邊，長各爲3及4厄爾（ells ），將一端重疊，再將此二邊彼此接近而使連接二端點的線段長恰爲5厄爾；那麼，此角便爲直角，而此三角形便是直角三角形。（見圖1 ）。數學家們一直想發現類似的,更明顯的等邊直角三角形邊長間的類似整數關係（圖2 ），他們把各股分成五等分，然後，在斜邊上取同長之等分來

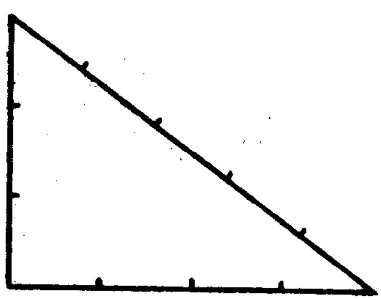

圖1

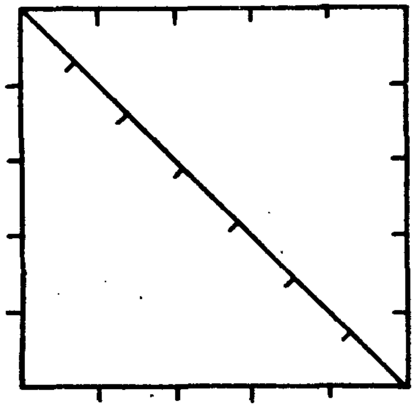

圖 2

，則斜邊似乎包含着如此之等分有七份之多，但並沒剛剛好；斜邊還要長些。他們又把一股分成十二等分；而這次所得的斜邊差不多要十七等分才夠，雖比前面的分法要恰當些，但仍未完全剛剛好，這種要求斜股之間的"公通量"(common measure)的努力終歸無效。最後，大家便承認這個問題必須終歸無效的——意即沒有公通量的存在。

此處有兩種不可能的證明，第一種證明是根據很容易觀察到的有關偶數奇數之性質：

1. 偶數的平方常可被 4 整除：

$$(2n)^2 = 4n^2$$

2. 奇數的平方常爲奇數：

$$(2n+1)^2 = 4n^2 + 4n + 1 = 2(2n^2 + 2n) + 1$$

從這兩種觀察的性質可以導出另二種性質：

3. 若一數的平方爲偶數，則此平方數可被 4 整除。

4. 若一數的平方爲偶數，則此數本身爲偶數。

此種不可能的證法是應用間接的證法，假設正方形的邊長 a 及對角線長 d 具有公通量 e，且 $d = pe$ 及 $a = qe$，則由畢氏定理得

$$d^2 = a^2 + a^2 = 2a^2 ;$$

可見，

$$(pe)^2 = 2(qe)^2 ,$$

因此

$$p^2 = 2q^2 \tag{1.1}$$

此處不妨假設 p 與 q 除 1 外沒有公因子，蓋若不然的話，公通量 e 可以選的很小，然後再加以放大。

由於等式（1.1）的右側顯然為偶數，故左側亦然，由觀察 4 知，p 必為偶數，另一方面，由於 p^2 為偶數，故按照觀察 3. 知，p^2 可被 4 所整除，但是這樣一來，等式（1,1）的右側，也就可被 4 整除了，故 q^2 必可被 2 整除，因而 q^2 為偶數，再一次利用觀察 4. 便得知 q 本身為偶數，因此，p 與 q 均為偶數，而跟 p 與 q 除 1 外沒有公因子的假設不合，證明的原先假設——即正方形的邊與對角線具有公通量——便導致矛盾，因此，應為一否證。

第二種不可能的證明是利用初等幾何的想法，而不是利用偶、奇數的事實：在所給的正方形中（圖 3），在對角線 BC 上取線段 BD，其長等於邊長 AB，在 D 處作 BC 之一垂線交邊 AC 於 B'；連結 B' 與 B，則三角形 ABB' 及 DBB' 全等，蓋二三角形均為直角且有兩對應邊全等；因此，$AB' = DB$

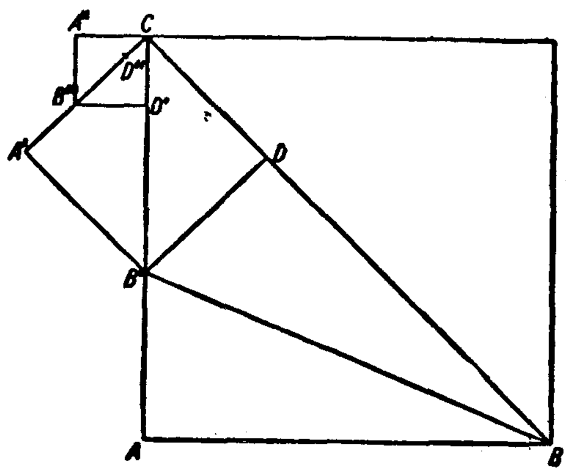

圖 3

，因角 ACB 為直角之半；故 $B'CD$ 為等腰直角三角形，且 $DB' = DC$，故得證

$$AB' = B'D = DC \tag{1.2}$$

今自 C 作一垂直於 CD 之直線，與過 B' 所作的平行於 CD 之直線交於 A'，則得一正方形 $A'B'CD$ 比原來的正方形 $ABCD$ 小，蓋因對角線 $B'C$ 為原正方形之一邊所蓋住（意即 $B'C < AC$），把剛才應用於原正方形的同樣

方法應用在此新正方形上；在對角線上，取線段 $B'D'$ 等於邊長 $A'B'$；且在 D' 作一垂直於對角線的直線交邊 $A'C'$ 於 B''，那麼，如前，得

$$A'B'' = B''D' = D'C \tag{1.3}$$

很明顯的，上述的方法可以無限地繼續下去，而沒有停止；意即，每一次都在對角線上留下一段下來，並比原先所留下的一段短些

$$CD > CD' > CD'' > CD''' > \cdots\cdots \tag{1.4}$$

這些留下來的線段依次都是該正方形的對角線與其邊之差

$$\begin{gathered} CD = CB - AB,\quad CD' = CB' - A'B', \\ CD'' = CB'' - A''B'', \cdots\cdots \end{gathered} \tag{1.5}$$

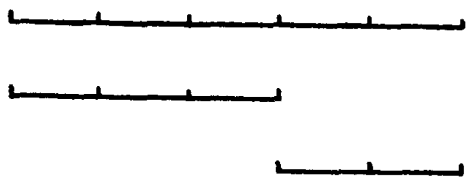

圖 4

這種初等幾何學上的想法，只是瞭解證明的預備知識；證法是間接的，假設正方形的邊及對角線可以通約的話；意即，假設兩者有公通量——一區間 E 的某整倍數恰等於正方形的邊長，而另一整倍數恰等於正方形的對角線長，這樣一來，我們只要注意到（圖 4 ）任二區間若均爲 E 的整倍數，則其差亦爲 E 的某整倍數，職此之故，假若 CB 與 AB 爲 E 的整倍數，則從等式（1.5）知 CD 也是 E 的整倍數，而且由於 $A'B' = CD$，故 $A'B'$ 亦爲 E 的整倍數。因而正方形 $A'B'CD$ 的對角線長 $CB' = CA - AB' = AB - CD$（最後等式是從等式（1.2）得來的），可見 CB' 亦爲 E 的整倍數。對於正方形 $A'B'CD'$ 的邊及對角線已證得的上面性質，對於其後的新正方形應該也都具備才是。

現在就可以利用矛盾的方法完成我們的間接證明。在正方形 $ABCD$ 的邊及對角線有公通量存在的假設下，出現在（1.4）中的區間均必爲 E 的整倍數，另一方面，等式（1.4）表 E 的倍數繼續的減少，但沒有終止或者甚至變爲零。這對於固定區間的倍數來說是不可能的，因爲假若首項爲 E 的

1000倍，那麼，CD' 將爲E的較小倍數——至多爲E的999倍，這樣下去到第1000項時，將小於E但仍爲E的倍數，這只有是E的零倍而已，但這便跟已證的事實（一直不停）相違背，這種矛盾是由於我們假設了正方形的邊及對角線之間有公通量的緣故促使發生的。因此，這個假設無法成立。

上面所講的第一種不可能的證明，最先是怎樣開始的，始終不清楚，這種偉大的發現，比較其他任何的事情都要偉大，開創了近代數學的風格。最古老而且最清晰而肯定的事實都可以在柏拉圖及亞里士多德的作品中找到。亞氏一再的談到這個問題，常尖酸地諷刺第一次提到的證明，而這證明後來也在歐幾里德的書中出現。柏拉圖對這種發現的基本性質特別强調，在它的*定律*（Laws）一書中，他把這個數學上的發現指定放在高中教材中。在那本書裡，他提到他是在相當的老邁時才第一次學到這個發現，而且他覺得（對他自己及所有希臘人）不曉得這個發現是很大的恥辱，對這個發現的無知"豬的地位都要比人的地位有利"。尤其是在對偉大的數學家戴也特弟斯（Theaetetus）的紀念禮上（戴氏那時新近剛在戰場上陣亡）的談話，柏氏給了這些事情作了說明，在那裡他講到鐵奧道路斯（Theodorus）（是戴氏的老師，也是一位很有名的西西里（Sicilian）數學家，約生在紀元前430年），如何教導他的學生證明面積爲3平方呎的正方形，其一邊長跟線段一呎長是不公通的。同理，面積爲5到17平方呎的正方形（當然9與16要除外）也是一樣的，從柏氏的話可以很清楚的看出鐵氏對這些事實的理論早已妥善的研究並發展過了；2平方呎的情況根本沒提過，盡管柏拉圖把他跟他的學生戴氏加以對照，蓋戴氏對這理論曾引進過更抽象而一般的方法。

希臘數學的主要內容可以在歐幾里德的*原本*（約在紀元前300年）以及在歐氏以後的數學家、評論家的著作中找到，但其中有的只是內容，而不是它發展的歷史，只有如上所引的吉光片段可以使我們隱約地窺視到這種數學的起源，這些起源絕不是歐幾里德的傑作。這些片段中，最重要及可以加以理解的當屬可能由希臘數學最老的教科書或者至少從希博克拉特（Hippocrates）（約活在紀元前450年）的手中留下來的幾頁書。這幾頁記錄裡，顯示給我們的是無窮程序的理論發展的另一階段。希氏藉直徑AB平分一圓（圖5）；然後利用下半圓的中點作圓心，他畫一圓，通過A與B，他斷言蛾眉形（圖5中的有陰影之部分）跟半徑BM上的正方形具有相同的面積。

此斷言的證明是第一個引理，其原理很可惜並沒有記錄下來，引理說到：兩圓的面積彼等跟它們半徑的平方成比例，（圖6），由此又得對同圓心角的扇形面積也是跟其半徑的二方成比例，（圖7）這項事實的證明首先是

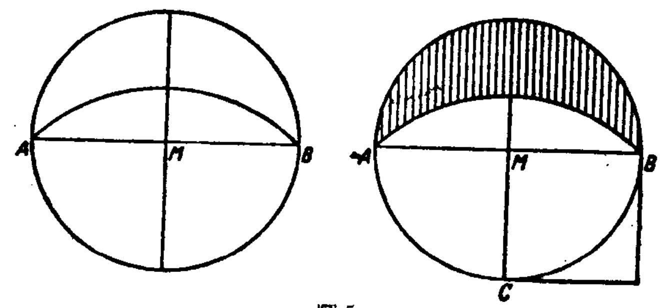

圖 5

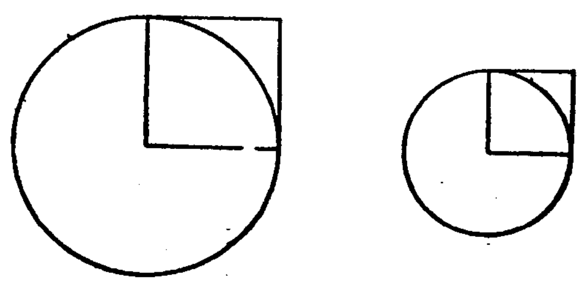

圖 6

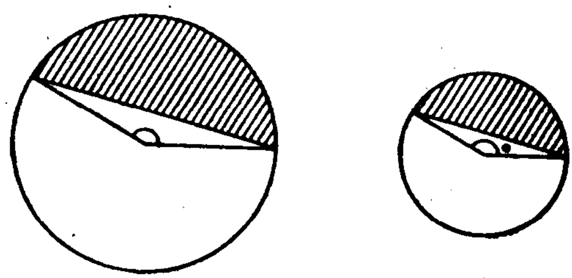

圖 7

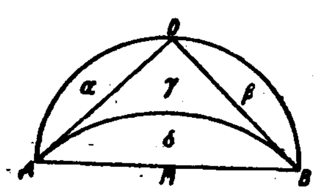

圖 8

對周角可整除部分的角，然後再對一般的角，其次希氏連結上半圓的中點D及A與B（圖8），而發現這些線在A與B處切大圓，並無伸入其內，因此，在所考慮的蛾眉形是由三塊面積組成，以α,β,γ 表示於圖中（圖8），面積α為已予圓的一弓形由內接於周角的四分之一所決定；δ是大圓的一弓形，內接於周角的四分之一，按照上面的引理，α及δ應彼此跟兩圓的半徑的平方成比例，意即AM^2：AD^2，此顯然為1:2，因此，α及β均為δ的一半，此意即$\alpha+\beta=\delta$，因此蛾眉形之面積為$\alpha+\beta+\gamma=\delta+\gamma=$三角形$ABD$的面積$=BM^2$。

這種發現的基本重要性在於證明由曲線所圍起來的面積可以公通於由直線所圍起來的面積的可能性。從這個發現，有關"圓的正方形化"問題便顯得要明顯些，由曲線圖形已經完成的某項工作可以由最簡的曲線圖形來代替完成，這是數學家二千年來所最關心的有威力的挑戰，甚至直到在其解的不可能性已早加以證實了之後的今天，很多不明白其不可能證明的人還在想辦法"圓的正方化"。希氏很清楚的瞭解到這個問題而以最具"方法"的方式去追求他的目標。他想求得那些跟第一個具有一樣性質的其他各種月形，目的在從各種眉月形建立實際上的整個圓，他以極其巧妙的設計，另外發現了兩種圖形具有跟某多邊形相等的面積（儘管它們跟弦上的正方形沒有公通量）。利用直尺及圓規把這些圖形變換成等面積的正方形——即它的正方形化——變成了那些日子裡，數學家所拿手的問題。可見，此種方式下的圓的正方形化問題確是有妥善意義的問題，但是由於圓無法從希氏所造的眉月形建立，所以此種求解它的首次而廣大的努力終歸失敗。

在那些日子裡，也有些人把問題的重點給錯過了，譬如，安弟豐（The Sophist Antiphon），約跟希氏同時候的人，住在雅典。亞里士多德談到他把一正方形內接於一圓，然後在其邊上作出等邊三角形以形成圓內接八邊形，隨後作十六邊形，等等類推下去。由於任何這類的多邊形可以變換成正方形，所以安弟豐相信，一定有邊數足夠大的多邊形存在使跟圓完全相同、而那多邊形能夠變換成的正方形便是我們的解答。

這種立論對於就是用最細的蠟板與夬筆畫出的具體圓是很有效的，但亞里士多德却反對，亞氏認為對幾何上的理想圓來說這是沒有意義的。希氏也把這種幾何上的清晰觀念拿去處理理想的圖形，這件事可以從阿納薩哥拉斯（Anaxagoras）所引用的話中看出來，上面的立論牽涉到具體而特殊的事物，根據這種看法，比起哲學上的辯論的研究，我們可以更清楚看出那些詭辯家的思想跟那些日子裡所產生的眞實科學思想之間的差異。今天也一樣，

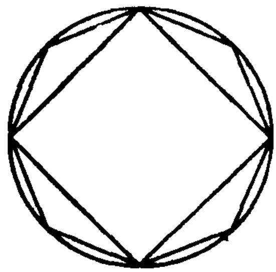

圖 9

雖經過了二千年的科學歷史，但有許多人不能瞭解數學上所討論的對象之理想性質，或者把〃精細的點〃視爲不甚重要或是多餘的考慮。由此可見，在此所提出的詭辯家不是什麽可笑的傢伙，而是一種人生觀的典型，他們一直流傳到今天，並繼續攻擊理論科學，今天對於〃應用〃與〃理論〃數學家們的爭論便是古代這種爭執的延續。這似乎很重要，故在本書的開頭特別指出來。

2. 古希臘的比例論

無理數——不可通約線段——的發現意含着整個幾何學的革命。茲以定理例子來說明：兩等高之三角形的面積比等於對應底之比，$A:B=a:b$（圖10）。

當 $a=b$ 之情況，此定理早就得證了：等高等底的三角形，面積一定相等。由此，當 a 與 b 爲可通約的情況（如，$a:b=3:2$）也就可以得證了；假若在 A 之旁放另一個底爲 a 的三角形，在 B 之旁另放二個底爲 b 的三角形（圖11），那麽，新形成的二個大的三角形便有相等的底（因 $a:b=3:2$，意即 $2a=3b$），因而具有相等的面積；意即 $2A=3B$ 或 $A:B=3:2$。

雖然有了不可通約線段的發現，但是其證明及跟它有關的所有比例（即相似形的整個理論）的幾何定理的證明都變成了有問題。事實上，有關比例的定義也發生了問題，逼得數學家們不得不重新考慮下列敍述的含義，譬如，二三角形 A 與 B 的面積與其底 a 與 b 對應地成比例。

至於這種危機何時發生或者由誰來解決，還不能確切曉得，但是在歐幾里德的**原本**（Elements）第五册裡，我們知道比例的理論，從那時候起，便形成了希臘數學的基礎。就是今天儘管有些變遷了，比例理論仍然在數論及無窮程序理論中具有決定性的特色。所以，我們想簡單地介紹歐幾里德**原**

本中的這一章。

歐氏以設計下列兩則很巧妙的定義來瞞過不可通約量所存在的困難問題

1. 假若對任何兩自然數 p 與 q，三關係式 $qa<pb$, $qa=pb$，及 $pa>qb$ 各別蘊涵 $qA<pB$, $qA=pB$, 及 $pA>qB$, 則稱 $a:b=A:B$。
2. 假若有一對自然數 p_0,q_0 存在，使得 $q_0a<p_0b$, 而 $q_0A>p_0B$，則稱 $a:b<A:B$ 或 $A:B>a:b$

在可通約量的情況裡，定義1包含着舊的定義，蓋三種可能性的第二者

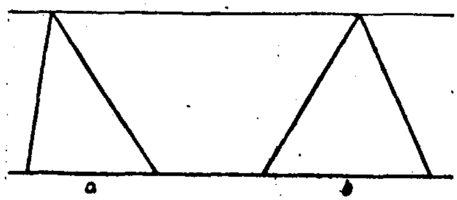

圖 10

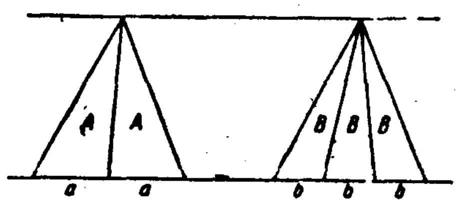

圖 11

成立。當定義1應用到上面的三角形例子時，不但比例觀念保存着，而且證明的重新組織也得到公認。理由是，若 p 與 q 爲任何二自然數且 q 個底爲 a 的三角形並列在一起，而 p 個底爲 b 的三角形也並列在一起，則下列三種可能性之一必須確認：

$$qa<pb,\quad qa=pb,\quad qa>pb.$$

現在不難得到下列的引理：假若二三角形 U 及 V 有相等的高，但底不等，$u<v$，那麽 $U<V$（圖12），蓋若在 v 上取一段等於 u，則在 v 上有一三角形，其面積等於 U，却爲 V 的一部分而已，因此，在面積上小於 V，但若 $qa<pb$，則兩大的三角形的面積也將有不等的相同比例，即 $qA<pB$，其他