高职高专规划教材

复变函数与积分变换

李龙星 主编
程志谦 魏 巍 副主编

高职高专规划教材

复变函数与积分变换

主　编　李龙星
副主编　程志谦　魏巍
参　编　运士伟　许超
主　审　徐会芳

机 械 工 业 出 版 社

复变函数与积分变换是工程专科学校电类专业必修的一门重要基础课，原来主要借用本科教材，其内容较为抽象难懂。为适应高职高专“以应用为目的，必需够用为度”的教学要求，编写了这本书。本书把原来较为抽象的内容用便于理解的方式予以说明，使读者不局限于一些具体的细节，重在把握内容的实质，为学好专业课打下基础。

图书在版编目(CIP)数据

复变函数与积分变换/李龙星主编．—北京：机械工业出版社，2002.8

高职高专规划教材

ISBN 7-111-10763-2

Ⅰ．复… Ⅱ．李… Ⅲ．①复变函数—高等学校：技术学校—教材②积分变换—高等学校：技术学校—教材 Ⅳ．017

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2002)第 058122 号

机械工业出版社(北京市百万庄大街 22 号 邮政编码 100037)

责任编辑：郑 丹 版式设计：张世琴 责任校对：陈延翔

封面设计：陈 沛 责任印制：付方敏

北京铭成印刷有限公司印刷·新华书店北京发行所发行

2002 年 9 月 第 1 版·第 1 次印刷

1000mm×1400mm B5·3.5 印张·132 千字

0 001—3 500 册

定价：9.00 元

前　言

教育部在高职高专数学教学基本要求中强调，基础课教学应该以“应用为目的，必须够用为度”。复变函数与积分变换是电类专业必修的基础课，原来主要借用本科教材，其内容较为抽象难懂，为适应高职高专的教学要求，我们编写了这本书，力图把原来较为抽象的内容用便于理解的方式予以说明，使读者不局限于一些具体的细节，重在把握内容的实质，为学好专业课打下基础。

本书由李龙星主编，程志谦、魏巍任副主编。第1章复数与复变函数、第2章解析函数由运士伟编写，第3章复变函数的积分、第4章级数由李龙星编写，第5章留数由许超编写，第6章保角映射由程志谦编写，第7章拉普拉斯变换由魏巍编写，习题答案由魏巍、运士伟、许超验算整理。

由于时间仓促，缺点错误在所难免，敬请读者批评指正。

编　者

2002年8月

目　　录

第1章　复数与复变函数

复变函数是自变量为复数的函数．这门课程所研究的主要对象是在某种意义下可导的复变函数，通常称为解析函数．为建立这类函数的理论基础，在这一章中，我们首先引入复数及其几何表示，其次引入区域、曲线以及复变函数等基本概念．

1.1　复数及其几何表示

在初等代数中我们已经学过一些关于复数的知识，为了便于我们以后讨论，在这儿我们再来回顾一下以前所学有关复数的内容．

1.1.1　复数及其代数运算

定义 1.1　设 x、y 为任意实数，我们称形如 $z=x+y\mathrm{i}$ 的数为**复数**，其中 $\mathrm{i}^2=-1$，称 i 为**虚数单位**，x 称为**实部**，记为 $\mathrm{Re}(z)$；y 称为**虚部**，记为 $\mathrm{Im}(z)$．

当 $x=0$ 且 $y\neq0$ 时，$z=y\mathrm{i}$ 称为**纯虚数**；当 $y=0$ 时，$z=x$ 为**实数**．

当且仅当两个复数的实部和虚部分别相等时，我们称这两个**复数相等**．一般来说，两个复数是无法比较大小的．

下面介绍一下复数的代数运算．

设 $z_1=x_1+\mathrm{i}y_1$、$z_2=x_2+\mathrm{i}y_2$，规定

$$(x_1+\mathrm{i}y_1)+(x_2+\mathrm{i}y_2)=(x_1+x_2)+\mathrm{i}(y_1+y_2) \tag{1.1}$$

$$(x_1+\mathrm{i}y_1)\cdot(x_2+\mathrm{i}y_2)=(x_1x_2-y_1y_2)+\mathrm{i}(x_1y_2+x_2y_1) \tag{1.2}$$

为 z_1 与 z_2 的**和与积**．

减法与除法分别定义为加法与乘法的逆运算，即如果 $z_1=z_2+z$，则称 z 是 z_1 与 z_2 的**差**，记为 $z=z_1-z_2$；如果 $z_1=z_2z\ (z_2\neq0)$，则称 z 是 z_1 与 z_2 的**商**，记为 $z=\dfrac{z_1}{z_2}$，由和与积的定义不难推出

$$(x_1+\mathrm{i}y_1)-(x_2+\mathrm{i}y_2)=(x_1-x_2)+\mathrm{i}(y_1-y_2) \tag{1.3}$$

$$\frac{x_1+\mathrm{i}y_1}{x_2+\mathrm{i}y_2}=\frac{x_1x_2+y_1y_2}{x_2^2+y_2^2}+\mathrm{i}\,\frac{x_2y_1-x_1y_2}{x_2^2+y_2^2} \tag{1.4}$$

我们由复数的代数运算的定义，不难证明复数有如下运算规律

(1) 交换律　$z_1+z_2=z_2+z_1$　　$z_1\cdot z_2=z_2\cdot z_1$

(2) 结合律　$(z_1+z_2)+z_3=z_1+(z_2+z_3)$　$(z_1\cdot z_2)\cdot z_3=z_1\cdot(z_2\cdot z_3)$

(3) 分配律 $z_1(z_2+z_3)=z_1z_2+z_1z_3$

定义 1.2 我们把实部相同，虚部相反的两个复数称为**共轭复数**. 与 z 共轭的复数记为 $\overline{z}$，即如果 $z=x+y\mathrm{i}$，则 $\overline{z}=x-y\mathrm{i}$.

可以证明共轭复数有如下运算性质

(1) $\overline{z_1\pm z_2}=\overline{z}_1\pm\overline{z}_2$ $\quad\overline{z_1z_2}=\overline{z}_1\overline{z}_2$ $\quad\overline{\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right)}=\dfrac{\overline{z}_1}{\overline{z}_2}$

(2) $\overline{\overline{z}}=z$

(3) $z\overline{z}=[\mathrm{Re}(z)]^2+[\mathrm{Im}(z)]^2$

(4) $z+\overline{z}=2\mathrm{Re}(z)\quad z-\overline{z}=2\mathrm{i}\mathrm{Im}(z)$

由性质 3 可知$\dfrac{z_1}{z_2}=\dfrac{z_1\overline{z}_2}{z_2\overline{z}_2}$

例 1 已知 $z=\dfrac{3+\mathrm{i}}{(2-3\mathrm{i})(1+2\mathrm{i})}$，求 $\mathrm{Re}(z)$，$\mathrm{Im}(z)$，$\overline{z}$.

解 $z=\dfrac{3+\mathrm{i}}{(2-3\mathrm{i})(1+2\mathrm{i})}=\dfrac{3+\mathrm{i}}{8+\mathrm{i}}=\dfrac{(3+\mathrm{i})(8-\mathrm{i})}{(8+\mathrm{i})(8-\mathrm{i})}=\dfrac{5+\mathrm{i}}{13}$

所以 $\mathrm{Re}(z)=\dfrac{5}{13}\quad\mathrm{Im}(z)=\dfrac{1}{13}\quad\overline{z}=\dfrac{5-\mathrm{i}}{13}$

例 2 证明：任意两个复数 z_1、z_2，有 $z_1\overline{z}_2+\overline{z}_1z_2=2\mathrm{Re}(z_1\overline{z}_2)$.

证明 $\overline{z_1\overline{z}_2}=\overline{z}_1\overline{\overline{z}}_2=\overline{z}_1z_2$

$$z_1\overline{z}_2+\overline{z}_1z_2=z_1\overline{z}_2+\overline{z_1\overline{z}_2}=2\mathrm{Re}(z_1\overline{z}_2)$$

1.1.2 复数的几何表示

1. 复平面

我们知道，一个复数是由它的实部和虚部(即一对有序实数)唯一确定的，而在平面直角坐标系上，平面上的任一点也与一对有序实数构成一一对应，于是一切复数 $z=x+y\mathrm{i}$ 可以与平面上的点(x,y)构成一一对应. 其中 x 轴上的每个点对应一个实数，我们称它为**实轴**；y 轴上的除原点外的每个点对应一个纯虚数，我们称它为虚轴. 因此我们可以用平面上的点来表示复数，这个平面我们称为**复平面**. 以后我们把“点 z”与“复数 z”认为同义语.

复数 $z=x+y\mathrm{i}$ 除了可以用点(x,y)来表示外，也可以用以原点为起点，以点 z 为终点的向量来表示(见图 1.1)，因此，有时我们也把“复数 z”与“向量 z”认为同义语. 向量 $z=x+y\mathrm{i}$ 的长度称为复数 z 的**模**，记为 $|z|$，显然有 $|z|=\sqrt{x^2+y^2}$，且容易验证 $|x|\leqslant|z|,|y|\leqslant|z|$，$|z|\leqslant|x|+|y|$，$z\overline{z}=|z|^2$.

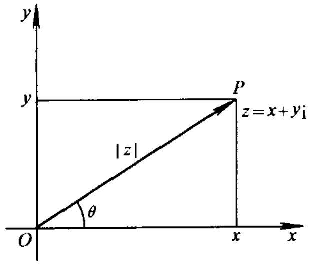

图 1.1

在 $z\neq0$ 的情况下，我们把实轴正向与向量 z 之间的夹角称为复数z 的**辐角**，记为 $\mathrm{Arg}z$，这时有

$$\tan(\mathrm{Arg}z)=\frac{y}{x} \tag{1.5}$$

显然 $\mathrm{Arg}z$ 有无穷多个值，其中每两个值的差是 2π 的整数倍．但是 $\mathrm{Arg}z$ 只有一个值 θ_0 满足条件 $-\pi<\theta_0\leqslant\pi$，我们称 θ_0 为 z 的**辐角主值**，记作 $\arg z$．显然 $\mathrm{Arg}z=\arg z+2k\pi$，$k=0$，$\pm1$，$\pm2$，$\cdots$．

当 $z=0$ 时，$|z|=0$，辐角不确定．

引入复数的向量表示后，复数的加减法运算与向量的加减法运算一致(见图 1.2)，由图上可以看出 $|z_1-z_2|$ 就是点 z_1 与点 z_2 之间的距离，并且有

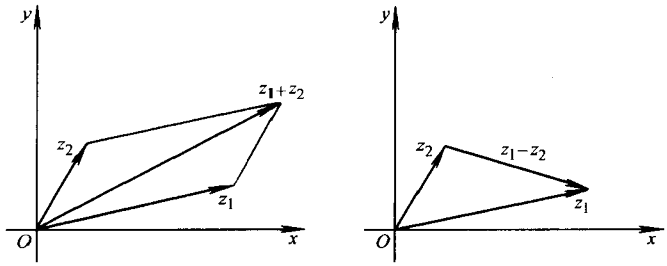

图 1.2

$$||z_1|-|z_2||\leqslant|z_1+z_2|\leqslant|z_1|+|z_2| \tag{1.6}$$

$$||z_1|-|z_2||\leqslant|z_1-z_2|\leqslant|z_1|+|z_2| \tag{1.7}$$

式(1.6)、式(1.7)称为三角不等式．

一对共轭复数 z 与 $\bar{z}$ 在复平面内的位置关系是关于实轴对称的，因此有 $|z|=|\bar{z}|$，如果 z 不在负实轴和原点上时，有 $\arg z=-\arg\bar{z}$(见图 1.3)．

复数 $z=x+y\mathrm{i}$ 的辐角主值 $\arg z$ 与反正切函数有如下关系

$$\arg z=\arctan\frac{y}{x}\quad x>0,\ y\neq0$$

$$\arg z=\frac{\pi}{2}\qquad x=0,\ y>0$$

$$\arg z=\pi+\arctan\frac{y}{x}\quad x<0,\ y\geqslant0$$

$$\arg z=-\frac{\pi}{2}\qquad x=0,\ y<0$$

$$\arg z=-\pi+\arctan\frac{y}{x}\quad x<0,\ y<0$$

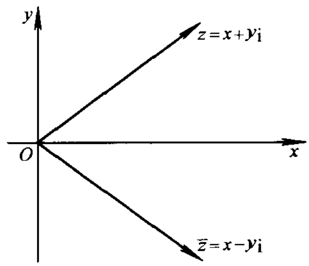

图 1.3

例 3 求 $\mathrm{Arg}(2-2\mathrm{i})$及 $\mathrm{Arg}(-3+4\mathrm{i})$．

解 $\mathrm{Arg}(2-2\mathrm{i})=\arg(2-2\mathrm{i})+2k\pi$

$$=\arctan\frac{-2}{2}+2k\pi=-\frac{\pi}{4}+2k\pi$$

$$(k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$$

$$\operatorname{Arg}(-3+4i)=\arg(-3+4i)+2k\pi$$
$$=\arctan\frac{4}{-3}+\pi+2k\pi=-\arctan\frac{4}{3}+(2k+1)\pi$$
$$(k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$$

利用直角坐标系与极坐标系的关系：$x=r\cos\theta$，$y=r\sin\theta$，我们可以把复数 $z=x+yi$ 表示成

$$z=r(\cos\theta+i\sin\theta) \tag{1.8}$$

称为复数 z 的**三角形式**，其中 $r=|z|$，$\theta=\operatorname{Arg}z$.

再利用欧拉公式(我们将在第 2 章 2.3 介绍)$e^{i\theta}=\cos\theta+i\sin\theta$（并且容易验证 $e^{i\theta_1}e^{i\theta_2}=e^{i(\theta_1+\theta_2)}$，$\frac{e^{i\theta_1}}{e^{i\theta_2}}=e^{i(\theta_1-\theta_2)}$）我们又可以得到

$$z=re^{i\theta} \tag{1.9}$$

称为复数 z 的**指数形式**.

前面介绍的 $z=x+yi$ 的表示方法称为复数 z 的**代数形式**. 这三种表示方法可以相互转换，以适应讨论不同问题的需要.

例 4 将 $z=1-i$ 转化为三角形式和指数形式.

解 $z=1-i=\sqrt{2}\left[\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right]=\sqrt{2}e^{i\left(-\frac{\pi}{4}\right)}$

利用复数的指数形式或三角形式作复数的乘除法运算较为方便，且容易验证以下定理.

定理 1.1 **设复数** $z_1=r_1e^{i\theta_1}=r_1(\cos\theta_1+i\sin\theta_1)$，

$z_2=r_2e^{i\theta_2}=r_2(\cos\theta_2+i\sin\theta_2)$，**则**

$$z_1z_2=r_1r_2e^{i(\theta_1+\theta_2)}=r_1r_2[\cos(\theta_1+\theta_2)+i\sin(\theta_1+\theta_2)]$$

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{r_1}{r_2}e^{i(\theta_1-\theta_2)}=\frac{r_1}{r_2}[\cos(\theta_1-\theta_2)+i\sin(\theta_1-\theta_2)] \tag{1.10}$$

即 $|z_1z_2|=|z_1||z_2|$ $\qquad \frac{|z_1|}{|z_2|}=\frac{|z_1|}{|z_2|}$ (1.11)

$$\operatorname{Arg}(z_1z_2)=\operatorname{Arg}(z_1)+\operatorname{Arg}(z_2) \qquad \operatorname{Arg}\left(\frac{z_1}{z_2}\right)=\operatorname{Arg}(z_1)-\operatorname{Arg}(z_2) \tag{1.12}$$

注意：由于辐角的多值性，对于式(1.12)，可以理解为等式左侧任取一个值，等式右侧都可以找到一对值与等式左侧对应，反之亦然.

复数乘法的几何意义：向量 z_1z_2 是从向量 z_1 旋转一个角度 $\operatorname{Arg}z_2$，并伸长(缩短)到原来的模的$|z_2|$倍得到的(见图 1.4). 特别当$|z_2|=1$时，乘法就仅仅是旋转. 例如 zi 相当于将 z 逆时针旋转 90°，$-z$ 相当于将 z 逆时针旋转 180°. 又当 $\arg z_2=0$ 时，乘法就仅仅是伸长(缩短).

2. 运用复数表示几何图形应用举例

有很多平面图形能够用复数形式的方程(或不等式)来表示往往显得特别简单，下面我们通过两个例子来说明这类问题.

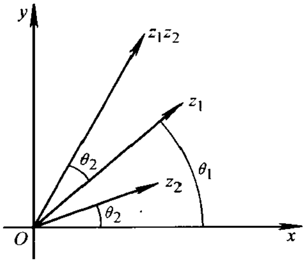

图 1.4

例 5 将直线方程 $x+y=2$ 转化为复数形式.

解 由共轭复数的性质 $x=\dfrac{1}{2}(z+\bar{z})$，$y=\dfrac{1}{2\mathrm{i}}(z-\bar{z})$

代入方程得$\dfrac{1}{2}(z+\bar{z})+\dfrac{1}{2\mathrm{i}}(z-\bar{z})=2$

即$\dfrac{1}{2}(1-\mathrm{i})z+\dfrac{1}{2}(1+\mathrm{i})\bar{z}=2$

例 6 求下列方程所表示的曲线.

(1) $|z+\mathbf{i}|=2$

(2) $\mathrm{Im}\,(\bar{z}+\mathrm{i})=2$

解 (1)在几何上不难看出，方程$|z+\mathrm{i}|=2$ 表示以 $-\mathrm{i}$ 为圆心，以 2 为半径的圆. 下面用代数方法求出该圆的直角坐标方程.

设 $z=x+y\mathrm{i}$，则方程变为$|x+(y+1)\mathrm{i}|=2$

即$\sqrt{x^2+(y+1)^2}=2$ 或 $x^2+(y+1)^2=4$

(2) 设 $z=x+y\mathrm{i}$ 则 $\mathrm{i}+\bar{z}=x+(1-y)\mathrm{i}$

所以 $\mathrm{Im}\,(1+\bar{z})=1-y$，从而可得所求曲线方程为 $y=-1$.

1.1.3 复数的乘幂与方根

n 个相同的复数 z 的乘积称为 **z 的 n 次幂**，记作 z^n，即 $z^n=\underbrace{zz\cdots z}_{n\text{个}}$.

设 $z=r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}=r\,(\cos\theta+\mathrm{i}\,\sin\theta)$，则

$$z^n=r^n\mathrm{e}^{\mathrm{i}n\theta}=r^n\,(\cos n\theta+\mathrm{i}\,\sin n\theta) \tag{1.13}$$

特别当 $r=1$ 时，则得**德莫佛(De Moivre)公式**

$$(\cos\theta+\mathrm{i}\,\sin\theta)^n=\cos n\theta+\mathrm{i}\,\sin n\,\theta \tag{1.14}$$

我们规定 $z^{-n}=\dfrac{1}{z^n}$，则当 n 为负整数时，式(1.13)、式(1.14)同样成立，证明由读者自己完成.

求非零复数 z 的 n 次方根，就相当于解方程 $w^n=z$ ($n\geqslant2$ 为整数). 记方程的所有根为$\sqrt[n]{z}$，下面来求它们.

设 $z=r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$，$w=\rho\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}$，由式(1.13)得 $\rho^n\mathrm{e}^{n\mathrm{i}\varphi}=r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$，从而有

$$\rho^n=r \qquad n\varphi=\theta+2k\pi \qquad k=0，\pm1，\pm2，\cdots$$

解出得 $\rho=\sqrt[n]{r}$(取算术根)，$\varphi=\dfrac{\theta+2k\pi}{n}$，因此 z 的 n 次方根为

$$w_k=\left(\sqrt[n]{z}\right)_k=\sqrt[n]{r}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\theta+2k\pi}{n}}\qquad k=0,\ \pm1,\ \pm2,\ \cdots$$

这里 k 表面上可以取 0，±1，±2，…，但实际上只要取 $k=0$，1，2，…，$n-1$ 即可得出 n 个不同的值，而在取其他值时，这些根又重复出现，所以记号 $\sqrt[n]{z}$ 与 $\left(\sqrt[n]{z}\right)_k$ $(k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$ 是一致的，z 的 n 次方根共有 n 个.

在几何上，z 的 n 次方根就是以原点为圆心，以 $\sqrt[n]{r}$ 为半径的圆内接正 n 边形的 n 个顶点.

例 7 求 $\sqrt[3]{-8}$.

解 因为 $-8=8(\cos\pi+\mathrm{i}\sin\pi)$

所以 $\left(\sqrt[3]{-8}\right)_k=\sqrt[3]{8}\left(\cos\dfrac{\pi+2k\pi}{3}+\mathrm{i}\sin\dfrac{\pi+2k\pi}{3}\right)\quad(k=0,1,2)$

即 $\left(\sqrt[3]{-8}\right)_0=\sqrt[3]{8}\left(\cos\dfrac{\pi}{3}+\mathrm{i}\sin\dfrac{\pi}{3}\right)=1+\sqrt{3}\mathrm{i}$

$\left(\sqrt[3]{-8}\right)_1=\sqrt[3]{8}(\cos\pi+\mathrm{i}\sin\pi)=-2$

$\left(\sqrt[3]{-8}\right)_2=\sqrt[3]{8}\left(\cos\dfrac{5\pi}{3}+\mathrm{i}\sin\dfrac{5\pi}{3}\right)=1-\sqrt{3}\mathrm{i}$

这三个根是内接于以原点为圆心，以 2 为半径的圆的某个等边三角形的顶点.

1.1.4 复球面

除了用平面内的点或向量来表示复数外，还可以用球面上的点来表示复数，现在来介绍这种表示方法.

取一个在原点处与复平面相切的球面，通过原点 O 作垂直于复平面的直线与球面交于一点 N（见图 1.5），N 称为北极，O 称为南极. 对于复平面上任一点 z，如果用一直线段与 N 相连，那么该直线段与球面交于异于 N 的一点 P，这样就建立起球面上的点(不包括 N)与复平面上的点之间的一一对应. 但是，对于球面上的点 N，还没有复平面内的一个点与之对应. 从图上看，当 z 无限地远离原点时，即 $|z|$ 无限变大，此时点 P 就无限地靠近 N. 为了使复平面与复球面上的点都能一一对应，规定复数中有唯一一个“无穷远点”，它与复球面上的 N 点对应，同时规定复数中有唯一的“无穷大”与复平面上的“无穷远点”对应，记为 ∞. 这样一来，球面上的每一个点，都有唯一的复数与之对应，这样的球面称为**复球面**.

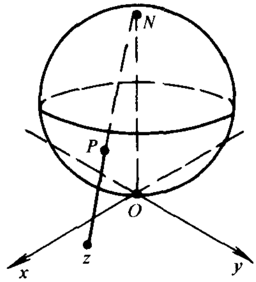

图 1.5

我们把含有无穷远点在内的复平面称为**扩充复平面**，不包括无穷远点的复平面称为**有限复平面**.

关于复数 ∞(读作“无穷”)，它的实部、虚部和辐角均无意义，对于它的运算作如下规定

(1) $|\infty| = +\infty$

(2) $\alpha \pm \infty = \infty \pm \alpha = \infty \qquad (\alpha \neq \infty)$

(3) $\alpha \infty = \infty \quad \alpha = \infty \qquad (\alpha \neq 0)$

(4) $\dfrac{\alpha}{\infty} = 0$，$\dfrac{\infty}{\alpha} = \infty \qquad (\alpha \neq \infty)$

对于$\infty \pm \infty$，$\dfrac{\infty}{\infty}$，$0 \cdot \infty$无意义.

1.2 复变函数

1.2.1 平面点集的几个概念

定义 1.3 由不等式$|z - z_0| < \delta$所确定的平面点集(以后平面点集简称为点集)，就是以z_0为圆心，以δ长为半径的圆的内部，称为**点z_0的δ邻域**(见图 1.6). 而称不等式$0 < |z - z_0| < \delta$所确定的点集称为**点z_0的去心邻域**.

定义 1.4 对于点集E和平面上一点z_0，如果存在z_0的一个δ邻域，该邻域内的任一点都属于E，则称z_0为E的**内点**；如果对于z_0的任意一个邻域，都既有E内的点，又有E外的点，则称z_0为E的**边界点**；否则，称z_0为E的**外点**(即存在z_0的一个δ邻域,而该邻域内的任一点都不属于E).

所有E的边界点组成E的**边界**.

注意：E的边界可能属于E，也可能不属于E；点集E的孤立点必是边界点.

定义 1.5 如果点集E的每个点都是E的内点，称E是**开集**.

定义 1.6 如果存在正数M，对于点集E内的任一点z，有$|z| \leqslant M$，称E为**有界集**；否则称E为**无界集**.

1.2.2 区域 曲线

定义 1.7 如果非空点集D满足

(1) 是一个开集；

(2) 是连通的：即D中任何两点，都可以用属于D的一条折线连接(见图 1.6)，称D是一个**区域**.

注意：区域是开集，不包含边界点.

定义 1.8 区域D加上它的边界构成的点集称为**闭区域**，记作$\overline{D}$.

如果区域是有界集，则称它是有界区域；否则称它是无界区域.

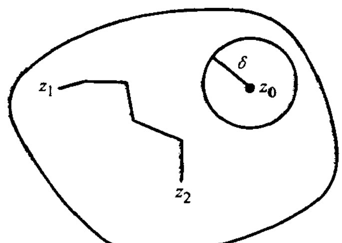

图 1.6

定义 1.9 设$x(t)$和$y(t)$是关于实变量t的连续函数，那么方程组$x = x(t)$，$y = y(t)$ $(a \leqslant t \leqslant b)$或由复数方程$z = x(t) + \mathrm{i}y(t)$ $(a \leqslant t \leqslant$

b)(简记为 $z=z(t)$) 所构成的点集 C，称为复平面上的一条**连续曲线**. $z(a)$ 和 $z(b)$ 分别称为 C 的**起点**和**终点**；对于满足 $a<t_1<b$，$a\leqslant t_2\leqslant b$，$t_1\neq t_2$ 的 t_1 和 t_2，当 $z(t_1)=z(t_2)$ 时，称 $z(t_1)$ 为曲线的**重点**；凡无重点的连续曲线，称为**简单曲线**；当 $z(a)=z(b)$ 时，称为**闭曲线**(见图 1.7).

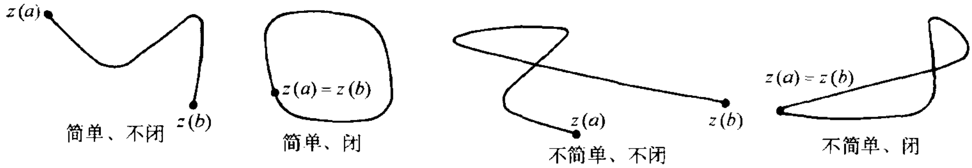

图 1.7

从几何的直观意义上可以清楚地看到，任意一条简单闭曲线 C 把整个复平面唯一地分成三个互不相交的点集，一个是有界区域，称为 C 的内部，另一个是无界区域，称为 C 的外部，C 是它们的公共边界.

定义 1.10 设简单曲线(或简单闭曲线)C 的参数方程为

$$z=x(t)+\mathrm{i}y(t) \qquad (a\leqslant t\leqslant b)$$

当 $a\leqslant t\leqslant b$ 时，如果 $x'(t)$ 和 $y'(t)$ 连续且不全为零，则称 C 为**光滑**(闭)**曲线**；由有限条光滑曲线连接而成的连续曲线称为**按段光滑曲线**.

沿着一条简单闭曲线 C 有两个相反的方向. 一般情况下，当观察者沿着曲线行走，以该曲线为边界的区域在观察者的左侧，这个方向我们规定为**曲线的正向**(见图 1.8).

定义 1.11 设 D 为复平面上的一个区域，如果在 D 内任作一条简单闭曲线，而曲线的内部总属于 D，则称 D 是**单连通区域**(见图 1.8a)；非单连通的区域称为**多连通区域**(见图 1.8b).

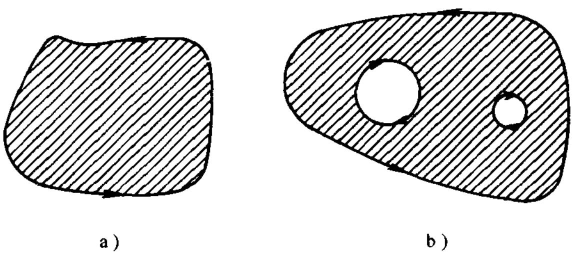

图 1.8

单连通区域 D 有这样的特征：属于 D 内的任何一条简单闭曲线，在 D 内可以经过连续变形而缩成一个点.

1.2.3 复变函数

定义 1.12 设 E 是一个复数集，如果对于 E 内任一点 $z=x+y\mathrm{i}$，都有一个

或多个复数 $w=u+v\mathrm{i}$ 按照一定的法则 f 与它对应，那么我们就称 w 是 z 的一个**复变数函数**(简称为**复变函数**)，记作 $w=f(z)$. 如果 z 的一个值唯一对应着一个 w 的值，则称函数 $f(z)$为**单值的**；如果 z 的一个值对应两个或两个以上的 w 值，则称函数 $f(z)$为**多值的**. E 称为函数的**定义域**；集合 $\{w \mid w=f(z), z\in E\}$ 称为**值域**.

例如：$w=z^2$，$w=\bar{z}$ 都是单值的，而 $W=\mathrm{Arg}z$，$w=\sqrt[n]{z}$ ($n\geqslant 2$ 为整数)都是多值的.

注意：以后若不作特别说明，我们所研究的函数为单值函数.

设 $w=f(z)$是定义在集合 E 上的单值函数，令 $z=x+y\mathrm{i}$，$w=u+v\mathrm{i}$，则 u、v 都是由 x、y 而确定，因此 $w=f(z)$又常写成

$$w=u(x,y)+\mathrm{i}v(x,y)$$

其中 $u(x,y)$、$v(x,y)$是两个二元实变函数.

在高等数学中，常把实变函数用几何图形表示出来，这些几何图形可以直观地帮助我们理解和研究函数. 而复变函数是反映了两对变量 u、v 和 x、y 之间的对应关系，我们不能借助于一个平面或一个三维空间中的几何图形来描述. 为了解决这个问题，我们取两个复平面，分别称为 **z 平面**和 **w 平面**. 复变函数可以理解为两个复平面上的点集间的**映射**(或**变换**). 具体地说，就是复变函数 $w=f(z)$给出了从 z 平面上的一个点集 E 到 w 平面上的一个点集 F 之间的一个对应关系，$z\in E$ 对应的点 $w=f(z)\in F$ 称为 z 的象，而 z 称为 w 的原象.

例如：设函数 $w=z^2$，则 $z=1$，i，-1 的象分别为 $w=1$，-1，1.

设 $z=x+y\mathrm{i}$，$w=u+v\mathrm{i}$，则 $w=z^2$ 对应两个实变函数 $u=x^2-y^2$，$v=2xy$，z 平面上的双曲线 $x^2-y^2=2$，$xy=1$ 的象分别为 w 平面的直线 $u=2$，$v=2$ (见图 1.9).

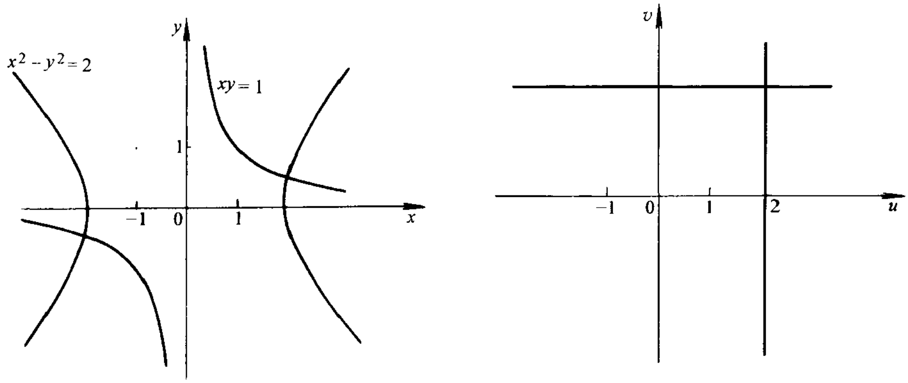

图 1.9

复变函数与实变函数一样，也有反函数的概念，我们定义如下：

定义 1.13 设 $w=f(z)$的定义域为 E，值域为 F，那么对于任意的 $w\in F$，则一定有一个或多个 $z\in E$ 按照一定的对应法则 φ 与 w 相对应. 按照函数的定义，则在 F 上就确定了一个函数 $z=\varphi(w)$，称为 $w=f(z)$的**反函数**，记为 $z=f^{-1}(w)$.

从反函数的定义可以看出，对于任意的 $w\in F$，有

$$w=f[f^{-1}(w)]$$

且当反函数为单值时，也有

$$z=f^{-1}[f(z)]$$

1.3 复变函数的极限及连续性

1.3.1 函数的极限

定义 1.14 设函数 $w=f(z)$在 z_0 的去心邻域 $0<|z-z_0|<\rho$ 内有定义，如果有一确定的数 A 存在，对于任意给定的 $\varepsilon>0$，相应地必有一正数 $\delta(\varepsilon)$，使得当 $0<|z-z_0|<\delta$ 时$(0<\delta<\rho)$有

$$|f(z)-A|<\varepsilon$$

那么称 A **为函数 $f(z)$在 z 趋近于 z_0 时的极限**，记作 $\lim\limits_{z\to z_0}f(z)=A$，或记作 $z\to z_0$ 时，$f(z)\to A$（见图 1.10）.

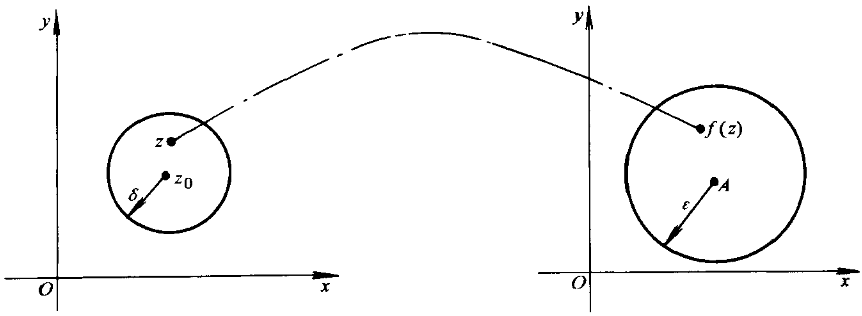

图 1.10

注意：定义中 z 趋近于z_0 的方式是任意的，也就是说，无论 z 从什么方向，以何种方式趋近于 z_0，$f(z)$都要趋近于同一个常数 A. 这比一元实变函数极限定义的要求要苛刻得多.

例如 $w=\arg z$ 在 $z_0=-1$ 处，当 z 从 $y\geqslant 0$ 的一侧任意趋近于 -1 时，$w=\arg z$ 趋近于 π，而当 z 从 $y<0$ 的一侧任意趋近于 -1 时，$w=\arg z$ 趋近于 $-\pi$. 所以 $w=\arg z$ 在 $z_0=-1$ 处的极限不存在.

关于极限的计算，有下面两个定理.

定理 1.2 设 $f(z)=u(x,y)+\mathrm{i}v(x,y)$，$A=u_0+\mathrm{i}v_0$，$z_0=x_0+\mathrm{i}y_0$，**那么** $\lim\limits_{z\to z_0}f(z)=A$ **的充要条件是**

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}}u(x,y)=u_0,\quad \lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}}v(x,y)=v_0$$

定理 1.3 如果 $\lim\limits_{z\to z_0}f(z)=A$，$\lim\limits_{z\to z_0}g(z)=B$，**那么**

(1) $\lim\limits_{z\to z_0}[f(z)\pm g(z)]=A\pm B$

(2) $\lim\limits_{z\to z_0}f(z)g(z)=AB$

(3) $\lim\limits_{z\to z_0}\dfrac{f(z)}{g(z)}=\dfrac{A}{B}(B\neq 0)$

这些极限运算法则与实变函数一样，我们可以运用定理 1.2 来证明，现只证明(2)，其余的由读者自己完成.

证明 令 $f(z)=u_1+\mathrm{i}v_1$，$g(z)=u_2+\mathrm{i}v_2$，设当 $z\to z_0$ 时，

$f(z)\to A=a+b\mathrm{i}$，$g(z)\to B=c+d\mathrm{i}$

因此，$u_1\to a$，$v_1\to b$，$u_2\to c$，$v_2\to d$，由于

$f(z)g(z)=(u_1+\mathrm{i}v_1)(u_2+\mathrm{i}v_2)=u_1u_2-v_1v_2+\mathrm{i}(u_1v_2+u_2v_1)$

$u_1u_2-v_1v_2\to ac-bd$，$u_1v_2+u_2v_1\to ad+bc$

因此，$f(z)g(z)\to(ac-bd)+(ad+bc)\mathrm{i}=(a+b\mathrm{i})(c+d\mathrm{i})$

1.3.2 函数的连续性

定义 1.15 如果 $\lim\limits_{z\to z_0}f(z)=f(z_0)$，那么称 $f(z)$**在** z_0 **处连续**；如果 $f(z)$ 在区域 D 内处处连续，则称 $f(z)$**在** D **内连续**.

根据这个定义和上述定理 1.2，容易证明下面的定理：

定理 1.4 函数 $f(z)=u(x,y)+\mathrm{i}v(x,y)$ 在 $z_0=x_0+\mathrm{i}y_0$ 连续的充要条件是：$u(x,y)$ 和 $v(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处连续.

由定理 1.3 和定理 1.4，还可以推出下面的定理.

定理 1.5 (1)**如果两个函数 $f(z)$ 和 $g(z)$ 在点 z_0 处连续，那么 $f(z)\pm g(z)$、$f(z)g(z)$、$\dfrac{f(z)}{g(z)}(g(z_0)\neq 0)$ 在 z_0 处也连续；**

(2) **如果函数 $h=g(z)$ 在 z_0 处连续，函数 $w=f(h)$ 在 $h_0=g(z_0)$ 处连续，那么复合函数 $w=f[g(z)]$ 在 z_0 处连续.**

还应当注意，所谓函数 $f(z)$ 在曲线 C 上 z_0 处连续的意义是指

$$\lim_{z\to z_0,\,z\in C}f(z)=f(z_0)$$

在这儿 z 趋近于 z_0 的趋近方式是沿着曲线 C 趋近的.

如果函数 $f(z)$ 在简单曲线或有界闭区域上连续，则 $f(z)$ 有界，即存在正数 M，使得 $|f(z)|\leqslant M$，并且能够取到 $f(z)$ 的最大模和最小模. 这些结论都