大学物理实验

（下册）

编著 浦天舒
张铮扬
沈亚平

东华大学出版社
（原中国纺织大学出版社）

大学物理实验(下册)

浦天舒　张铮扬　沈亚平　编著

东华大学出版社
(原中国纺织大学出版社)

图书在版编目(CIP)数据

大学物理实验 下册 浦天舒,张铮扬,沈亚平编著.
上海:中国纺织大学出版社,2002.8
ISBN 7-81038-453-8

Ⅰ.大… Ⅱ.①浦…②张…③沈… Ⅲ.物理学—实验—高等学校—教材 Ⅳ.04-33

中国版本图书馆CIP数据核字(2002)第013439号

责任编辑 林 萍
封面设计 陈 晨

大学物理实验(下册)
浦天舒 张铮扬 沈亚平 编著
东华大学出版社(原中国纺织大学出版社)出版
(上海市延安西路1882号 邮政编码:200051)
南京展望照排印刷有限公司排版 昆山市亭林印刷总厂印刷
新华书店上海发行所发行
开本:787×1092 1/16 印张:7.75 字数:198千字
2002年8月第1版 2002年8月第1次印刷
印数:0 001~4 000
ISBN 7-81038-453-8/O·19
定价:17.00元

前　言

本书是为配合我校物理实验中心建立以基本实验、综合与设计性实验、近代物理提高实验的物理实验教学新体系，以及我校应用物理(光电信息)专业的建设目标，以我们历年所编的讲义为基础，根据《高等工业学校物理实验课程教学基本要求》，结合我校现有仪器设备状况，经修改、充实后而编写的系列教材之一。除作为我校理工科学生的“大学物理实验”课程的教材外，部分内容(主要为物理专业所开设)亦可作为对他们开设的物理实验选修课的教材。

本教材的特点是将实验内容分为基本实验和综合与设计性实验两部分。基本实验以实验内容较为单一的实验为主，但适当提高实验起点，误差处理以标准差为主，增加了不确定度的初步知识；综合与设计性实验部分的要求稍高，相对于基本实验是螺旋式上升的一个新循环，大多数实验含有选做和设计的内容，以适应不同层次学生的需要。另外对实验(主要是基本实验)尽可能配以计算机多媒体教学手段，以利于学生自学。

本书的编写是我们深化教学改革的一种尝试。其中凝聚着物理实验中心全体人员的经验和心得，反映了集体的智慧和集体的劳动，包括现已离开实验室的、已退休的同志的贡献。参加本次新编的有浦天舒、张铮扬、沈亚平、金若鹏、胡群华、许毓敏、龚俊、邱高等同志。实验的多媒体教学软件由张铮扬、沈亚平、严治仁等同志编制。我们认为，物理实验课担当着对学生的一种特殊的用脑动手、智能与技能综合协作的使命，教材的编写与实验室的物质建设是相辅相成、彼此促进和提高的。但是由于我们水平有限，本书肯定有许多不足之处，诚望阅读或使用本书的老师和学生提出宝贵意见，以便我们改进。全文插图由姜月玲同志描绘，在此表示衷心感谢！

编　者

2002.4

目　　录

绪　论(续)*

一、Bessel 公式的证明

Bessel 公式
$$S_x^2=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2 \tag{1}$$
是估算测量列 x_1, …, x_n 方差的基本公式,式中 $\bar{x}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i$ 为平均值。以下从测量列的方差定义
$$\sigma^2=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i-a)^2 \tag{2}$$
(式中 a 是被测量的真值)出发来证明式(1)。

对式(1)显然有
$$\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left[(x_i-a)-\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}(x_j-a)\right]^2$$
展开后不难得到
$$\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i-a)^2-\frac{2}{n(n-1)}\sum_{i<j}(x_i-a)(x_j-a) \tag{3}$$
上式右端第二项有正有负,故根据偶然误差具有抵偿性的假定,当 $n\to\infty$ 时
$$\lim_{n\to\infty}\frac{2}{n(n-1)}\sum_{i<j}(x_i-a)(x_j-a)=0 \tag{4}$$
于是
$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i-a)^2$$
即
$$\lim_{n\to\infty}S_x^2=\sigma^2$$
这说明用 Bessel 公式来估算方差 σ^2 时,n 越大效果越好。式(1)由此得证。

二、平均值方差估算公式的证明

对于平均值 $\bar{x}$ 来说,有
$$\begin{aligned}(\bar{x}-a)^2&=\left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i-a)\right]^2\\&=\frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-a)^2+\frac{2}{n^2}\sum_{i<j}(x_i-a)(x_j-a)\end{aligned}$$

---

* 一般同学可跳过这一部分。

由等式(3)上式可化为

$$(\overline{x}-a)^2=\frac{1}{n(n-1)}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})^2+\frac{2}{n(n-1)}\sum_{i<j}(x_i-a)(x_j-a) \tag{5}$$

令 $n\to\infty$，则上式右端两项都趋于零，说明这时平均值 $\overline{x}$ 趋向于真值 a，但正如前面所说，第二项求和号内的值互有正负，而第一项却恒为正值，所以当 $n\to\infty$ 时，第二项的分母实际上要比第一项多出一个因子 $n-1$，因此将更快地趋于零。于是当 n 很大时可以近似地认为

$$(\overline{x}-a)^2=\frac{1}{n(n-1)}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})^2 \tag{6}$$

这就是平均值的方差估算公式。

从以上证明过程可见，式(1)、(6)实际上都是式(4)的直接推论，即它们都是"偶然误差具有抵偿性"这一假定下的自然结果。

三、间接测量误差传递公式的证明

为简单计，假设间接测量量 z 仅由两个直接测量量 x，y 决定，即

$$z=f(x,\ y) \tag{7}$$

设 x，y 互相独立，则可假定直接测量量 x，y 的两组数据为

$$x_i(i=1,\ 2,\ \cdots,\ n),\quad y_j(j=1,\ 2,\ \cdots,\ m)$$

任一组的测量结果应记为

$$z_{ij}=f(x_i,\ y_j) \tag{8}$$

这是由于 x，y 互相独立，x，y 的各个测量值可以任意组合。

现对 z_{ij} 在 x，y 的真值 $(x_0,\ y_0)$ 附近作 Taylor 展开，一级近似为

$$z_{ij}=f(x_0,\ y_0)+\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{x_0,\ y_0}(x_i-x_0)+\left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{x_0,\ y_0}(y_j-y_0) \tag{9}$$

从而

$$\frac{1}{mn}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}z_{ij}=f(x_0,\ y_0)+\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{x_0,\ y_0}(\overline{x}-x_0)+\left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{x_0,\ y_0}(\overline{y}-y_0) \tag{10}$$

式中 $\overline{x}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i$，$\overline{y}=\frac{1}{m}\sum_{j=1}^{m}y_j$。把上式与 $f(\overline{x},\ \overline{y})$ 在 $(x_0,\ y_0)$ 的展开式

$$f(\overline{x},\ \overline{y})=f(x_0,\ y_0)+\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{x_0,\ y_0}(\overline{x}-x_0)+\left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{x_0,\ y_0}(\overline{y}-y_0) \tag{11}$$

比较可得

$$\frac{1}{mn}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}z_{ij}=f(\overline{x},\ \overline{y}) \tag{12}$$

即 z 的最佳值为

$$\bar{z} = f(\bar{x}, \bar{y}) = \frac{1}{mn}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} z_{ij} \tag{13}$$

而由式(9)可得

$$[z_{ij} - f(x_0, y_0)]^2 = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2_{x_0, y_0}(x_i - x_0)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2_{x_0, y_0}(y_i - y_0)^2 + 2\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2_{x_0, y_0}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2_{x_0, y_0}(x_i - x_0)(y_j - y_0) \tag{14}$$

即

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}[z_{ij} - f(x_0, y_0)]^2 = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2_{x_0, y_0}(x_i - x_0)^2 + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2_{x_0, y_0}(y_j - y_0)^2 + 2\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2_{x_0, y_0}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2_{x_0, y_0}(x_i - x_0)(y_j - y_0) \tag{15}$$

两边除以 mn

$$\frac{1}{mn}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}[z_{ij} - f(x_0, y_0)]^2 = \frac{1}{mn}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2_{x_0, y_0}(x_i - x_0)^2 + \frac{1}{mn}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2_{x_0, y_0}(y_j - y_0)^2 + \frac{2}{mn}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2_{x_0, y_0}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2_{x_0, y_0}(x_i - x_0)(y_j - y_0) \tag{16}$$

因各 x，y 互相独立，所以根据偶然误差的抵偿性，最后一项为零。因 x，y 的方差分别为

$$\sigma_x^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - x_0)^2 \tag{17}$$

$$\sigma_y^2 = \frac{1}{m}\sum_{j=1}^{m}(y_j - y_0)^2 \tag{18}$$

所以

$$\frac{1}{mn}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}[z_{ij} - f(x_0, y_0)]^2 = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2_{x_0, y_0}\sigma_x^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2_{x_0, y_0}\sigma_y^2 \tag{19}$$

即

$$\sigma_z^2 = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2_{x_0, y_0}\sigma_x^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2_{x_0, y_0}\sigma_y^2 \tag{20}$$

相应的方差及标准差估计则分别为

$$S_z^2 = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2_{x_0, y_0}S_x^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2_{x_0, y_0}S_y^2 \tag{21}$$

$$S_z = \left[\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2_{x_0, y_0}S_x^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2_{x_0, y_0}S_y^2\right]^{\frac{1}{2}} \tag{22}$$

式中 S_x^2 和 S_y^2 分别为

$$S_x^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - x_0)^2 \tag{23}$$

$$S_y^2 = \frac{1}{m-1}\sum_{j=1}^{m}(y_j - y_0)^2 \tag{24}$$

类似地，由式(11) 则可得到 z 的最佳值 $\bar{z}$ 的方差公式为

$$\sigma_{\bar{z}}^2 = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2_{x_0,\ y_0}\sigma_{\bar{x}}^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2_{x_0,\ y_0}\sigma_{\bar{y}}^2 \tag{25}$$

式中 $\sigma_{\bar{x}}^2 = \overline{(\bar{x} - x_0)^2} = \frac{\sigma_x^2}{n}$，$\sigma_{\bar{y}}^2 = \overline{(\bar{y} - y_0)^2} = \frac{\sigma_y^2}{m}$，而 $\sigma_{\bar{z}}^2 = \overline{(\bar{z} - f(x_0,\ y_0))^2}$。相应的方差及标准差估计分别为

$$S_{\bar{z}}^2 = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2_{x_0,\ y_0}S_{\bar{x}}^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2_{x_0,\ y_0}S_{\bar{y}}^2 \tag{26}$$

$$S_{\bar{z}} = \left[\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2_{x_0,\ y_0}S_{\bar{x}}^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2_{x_0,\ y_0}S_{\bar{y}}^2\right]^{\frac{1}{2}} \tag{27}$$

式中 $S_{\bar{x}}^2 = \frac{S_x^2}{n}$，$S_{\bar{y}}^2 = \frac{S_y^2}{m}$。

x，y 不独立时的误差传递公式的推导从略。

四、合成不确定度的自由度

前述合成方差估计存在一个自由度的问题。这是因为用方差合成方法求得间接测量结果的合成不确定度的表征值后，有时还需将该值乘以一个因子以获得有较大置信概率的总不确定度，为此往往需求出合成不确定度的自由度。因不确定度的合成仿照方差合成，且以正态分布为基础，所以一般以正态分布的方差进行合成。因而只须讨论由误差传递公式求得的合成方差估计的自由度，并且只须考虑 x，y 的偶然误差即可。

通常总假定，测量是“独立地”进行的，显然应区分两种情况：(1) 两个直接测量量 x 和 y 是独立的；(2) 直接测量量 x 和 y 并不独立，但各组测量是独立进行的，即测量值$(x_1,\ y_1)$，…，$(x_n,\ y_n)$仍组成简单随机样本。这两种情况的合成不确定度(或方差估计)的自由度是不同的。

(一) 直接测量量独立时不确定度的自由度

为简单计，假设间接测量量 z 仅由两个直接测量量 x，y 决定，即

$$z = f(x,\ y) \tag{28}$$

假定直接测量 x，y 的两组数据为

$$x_i(i = 1,\ 2,\ \cdots,\ n),\quad y_j(j = 1,\ 2,\ \cdots,\ m)。$$

由 Bessel 公式，x，y 的方差估计分别为

$$S_x^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i}(x_i - \bar{x})^2 \tag{29}$$

$$S_y^2 = \frac{1}{m-1}\sum_{j}(y_j - \bar{y})^2 \tag{30}$$

式中 $\overline{x}=\frac{1}{n}\sum_i x_i$，$\overline{y}=\frac{1}{m}\sum_j y_j$。因 x，y 独立，故合成方差估计为 $S_z^2=\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 S_x^2+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 S_y^2$。

记 $\alpha_x=\frac{\partial f}{\partial x}$，$\alpha_y=\frac{\partial f}{\partial y}$，则

$$S_z^2=\alpha_x^2 S_x^2+\alpha_y^2 S_y^2 \tag{31}$$

是合成方差

$$\sigma_z^2=\alpha_x^2\sigma_x^2+\alpha_y^2\sigma_y^2 \tag{32}$$

的无偏估计，并且可以证明[1]，若 x，y 分别服从期望为 x_0 和 y_0 方差为 σ_x^2 和 σ_y^2 的正态分布（记为 $x\sim N(x_0,\sigma_x^2)$，$y\sim N(y_0,\sigma_y^2)$），则 $\frac{\nu S_z^2}{\sigma_z^2}$ 近似于自由度为 ν 的 χ^2 分布，且

$$\nu=\sigma_z^4\Big/\left(\frac{\alpha_x^4\sigma_x^4}{\nu_x}+\frac{\alpha_y^4\sigma_y^4}{\nu_y}\right)\approx S_z^4\Big/\left(\frac{\alpha_x^4 S_x^4}{\nu_x}+\frac{\alpha_y^4\sigma_y^4}{\nu_y}\right) \tag{33}$$

其中 $\nu_x=n-1$，$\nu_y=m-1$ 分别为 S_x^2 和 S_y^2 的自由度。

（二）直接测量量不独立时不确定度的自由度

仍以二元函数 $z=f(x,y)$ 为例，此时因 x，y 不独立，故测量时要求 $m=n$，且 x，y 可能相关，则合成方差估计

$$S_z^2=\alpha_x^2 S_x^2+\alpha_y^2 S_y^2+2\alpha_x\alpha_y r S_x S_y \tag{34}$$

是合成方差

$$\sigma_z^2=\alpha_x^2\sigma_x^2+\alpha_y^2\sigma_y^2+2\alpha_x\alpha_y\rho\sigma_x\sigma_y \tag{35}$$

的无偏估计，这里的 ρ 为相关系数，而 r 为其估计值

$$r=\frac{\sum_i(x_i-\overline{x})(y_i-\overline{y})}{\sqrt{\sum_i(x_i-\overline{x})^2\sum_i(y_i-\overline{y})^2}} \tag{36}$$

因测量值 (x_1,y_1)，…，(x_n,y_n) 组成一个简单随机样本，故可记

$$z_i=f(x_i,y_i) \tag{37}$$

它在期望值 x_0，y_0 附近的 Taylor 展开的一级近似为

$$z_i=f(x_0,y_0)+\alpha_x(x_i-x_0)+\alpha_y(y_i-y_0) \tag{38}$$

若 $(x,y)\sim N(x_0,y_0,\sigma_x^2,\sigma_y^2,\rho)$，从而 $(x-x_0,y-y_0)\sim N(0,0,\sigma_x^2,\sigma_y^2,\rho)$，则有 $z-f(x_0,y_0)\sim N(0,\sigma_z^2)$（这里 σ_z^2 由式(35)决定），并且因 (x_1,y_1)，…，(x_n,y_n) 是独立测量的，因而各 z_i 或 $z_i-f(x_0,y_0)$ 也是互相独立的正态随机变量，由式(38)

$$\frac{1}{n}\sum_i z_i=f(x_0,y_0)+\alpha_x(\overline{x}-x_0)+\alpha_y(\overline{y}-y_0) \tag{39}$$

与 $f(\overline{x},\overline{y})$ 在 x_0，y_0 的展开式

$$f(\overline{x},\overline{y})=f(x_0,y_0)+\alpha_x(\overline{x}-x_0)+\alpha_y(\overline{y}-y_0) \tag{40}$$

比较可得

$$\frac{1}{n}\sum_i z_i = f(\bar{x},\ \bar{y}) \tag{41}$$

记 $\bar{z} = f(\bar{x},\ \bar{y})$，从而由数理统计学中的定理[1]有

$$\frac{\sum_i (z_i - \bar{z})^2}{\sigma_z^2} \sim \chi^2(n-1)$$

即此时合成方差估计（或不确定度）的自由度仍为 $n-1$，与直接测量结果的不确定度的自由度一样。

（三）几点讨论

1．x，y 独立时测量结果的分布

当 x，y 独立时，任一组的测量结果应记为

$$z_{ij} = f(x_i,\ y_j) \tag{42}$$

这是由于 x，y 独立，从而 x，y 的各个测量值可以任意组合的结果。这样便可得到 mn 个 z_{ij}，然而这些 z_{ij} 并不是独立的，其方差矩阵

$$\begin{bmatrix} E\{(z_{11}-Ez_{11})^2\} & E\{(z_{11}-Ez_{11})(z_{12}-Ez_{12})\} & \cdots \\ E\{(z_{12}-Ez_{12})(z_{11}-Ez_{11})\} & E\{(z_{12}-Ez_{12})^2\} & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots \end{bmatrix}$$

是 $mn \times mn$ 对称矩阵，非主对角元素如 $E\{(z_{11}-Ez_{11})(z_{12}-Ez_{12})\}$ 因存在共同因素如 x_1 而一般不为零。

对 z_{ij} 在 x_0，y_0 处作 Taylor 展开，一级近似为

$$z_{ij} = f(x_0,\ y_0) + \alpha_x(x_i - x_0) + \alpha_y(y_j - y_0) \tag{43}$$

从而

$$\frac{1}{mn}\sum_i\sum_j z_{ij} = f(x_0,\ y_0) + \alpha_x(\bar{x} - x_0) + \alpha_y(\bar{y} - y_0) \tag{44}$$

与 $f(\bar{x},\ \bar{y})$ 的展开式

$$f(\bar{x},\ \bar{y}) = f(x_0,\ y_0) + \alpha_x(\bar{x} - x_0) + \alpha_y(\bar{y} - y_0) \tag{45}$$

比较可得

$$\frac{1}{mn}\sum_i\sum_j z_{ij} = f(\bar{x},\ \bar{y}) \tag{46}$$

故这时应定义 $\bar{z} = f(\bar{x},\ \bar{y}) = \frac{1}{mn}\sum_i\sum_j z_{ij}$，因已假定 $x \sim N(x_0,\ \sigma_x^2)$，$y \sim N(y_0,\ \sigma_y^2)$，所以 $x - x_0 \sim N(0,\ \sigma_x^2)$，$y - y_0 \sim N(0,\ \sigma_y^2)$，由 x，y 的独立性，$(x - x_0,\ y - y_0) \sim N(0,\ 0,\ \sigma_x^2,\ \sigma_y^2,\ 0)$。根据式(43)近似地有

$$z_{ij} \sim N(f(x_0,\ y_0),\quad \alpha_x^2\sigma_x^2 + \alpha_y^2\sigma_y^2)$$

即测量结果 z_{ij} 仍近似服从正态分布，但不独立。

2. 关于求间接测量方差估计的两种方法

在实验误差教学中，常涉及到求间接测量方差估计的两种方法的问题，即用误差传递公式的方法和将间接测量结果当作直接测量结果来处理而直接运用 Bessel 公式来求其方差估计的方法。由前面的讨论可知，后者实际上只适用于 x 和 y 不独立的情况，否则将遇到直接测量和间接测量结果的不确定度的自由度不同的问题，事实上，当 x，y 独立时，合成方差估计相当于折合成 z 的 $\nu+1$ 次测量所得的子样方差[2]，且 ν 由式(33)决定。

3. 间接测量平均值的方差估计的自由度

对于 z 的最佳估计(即平均值) $\bar{z}=f(\bar{x},\bar{y})$，其合成方差估计应为

$$S_{\bar{z}}^2=\alpha_x^2S_{\bar{x}}^2+\alpha_y^2S_{\bar{y}}^2,\quad \text{当 } x,\ y \text{ 独立时，} \tag{47}$$

$$S_{\bar{z}}^2=\alpha_x^2S_{\bar{x}}^2+\alpha_y^2S_{\bar{y}}^2+2\alpha_x\alpha_y rS_{\bar{x}}S_{\bar{y}},\ \text{当 } x,\ y \text{ 不独立时。} \tag{48}$$

式中 $S_{\bar{x}}^2=\dfrac{S_x^2}{n}$，$S_{\bar{y}}^2=\dfrac{S_y^2}{m}$，且式(48)中的 $m=n$。因 $S_{\bar{x}}^2$，$S_{\bar{y}}^2$ 的自由度与 S_x^2，S_y^2 的一样[1]，所以 x，y 不独立时即式(48)中的 $S_{\bar{z}}^2$ 的自由度仍为 $n-1$，而 x，y 独立时即式(47)中的 $S_{\bar{z}}^2$ 的自由度则应为[2]

$$\nu'=\sigma_{\bar{z}}^4\Big/\left(\frac{\alpha_x^4\sigma_{\bar{x}}^4}{\nu_x}+\frac{\alpha_y^4\sigma_{\bar{y}}^4}{\nu_y}\right)\approx S_{\bar{z}}^4\Big/\left(\frac{\alpha_x^4S_{\bar{x}}^4}{\nu_x}+\frac{\alpha_y^4S_{\bar{y}}^4}{\nu_y}\right) \tag{49}$$

对照式(33)可见仅当 $m=n$ 时才有 $\nu'=\nu$，但即使这时 ν' 一般也并不等于 $n-1$。

4. 直接测量量多于两个时的情况

可以把上面所讨论的结果推广至多于两个变量的情形，例如设

$$z=f(x,\ y,\ u,\ v) \tag{50}$$

并假定除 x 和 y 相关外其余皆独立，则

$$S_z^2=\alpha_x^2S_x^2+\alpha_y^2S_y^2+2\alpha_x\alpha_y rS_xS_y+\alpha_u^2S_u^2+\alpha_v^2S_v^2 \tag{51}$$

而

$$S_{\bar{z}}^2=\alpha_x^2S_{\bar{x}}^2+\alpha_y^2S_{\bar{y}}^2+2\alpha_x\alpha_y rS_{\bar{x}}S_{\bar{y}}+\alpha_u^2S_{\bar{u}}^2+\alpha_v^2S_{\bar{v}}^2 \tag{52}$$

设 S_x^2，S_y^2，S_u^2 和 S_v^2 的自由度分别为 $\nu_x(=n_x-1)$，$\nu_y(=n_y-1)$，$\nu_u(=n_u-1)$ 和 $\nu_v(=n_v-1)$，这里的 n_x，n_y，n_u 和 n_v 分别为直接测量量 x，y，u 及 v 的测量次数，x，y 相关要求 $n_y=n_x$，从而 $\nu_y=\nu_x$，于是 S_z^2 和 $S_{\bar{z}}^2$ 的自由度 ν_z 和 $\nu_{\bar{z}}$ 应分别为

$$\nu_z=S_z^4\Big/\left(\frac{(\alpha_x^2S_x^2+\alpha_y^2S_y^2+2\alpha_x\alpha_y rS_xS_y)^2}{\nu_x}+\frac{\alpha_u^4S_u^4}{\nu_u}+\frac{\alpha_v^4S_v^4}{\nu_v}\right) \tag{53}$$

$$\nu_{\bar{z}}=S_{\bar{z}}^4\Big/\left(\frac{(\alpha_x^2S_{\bar{x}}^2+\alpha_y^2S_{\bar{y}}^2+2\alpha_x\alpha_y rS_{\bar{x}}S_{\bar{y}})^2}{\nu_x}+\frac{\alpha_u^4S_{\bar{u}}^4}{\nu_u}+\frac{\alpha_v^4S_{\bar{v}}^4}{\nu_v}\right) \tag{54}$$

参考文献

1 刘智敏．误差分布论．北京：原子能出版社，1988．211，404～406，408

2 何国伟．误差分析方法．北京：国防工业出版社，1978．108，129

五、组合测量列方差公式的证明

对直接测量列 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 的标准差估计，可以用 Bessel 公式估算

$$S_x = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}{n-1}} \tag{55}$$

前面曾经以偶然误差的抵偿性和方差的定义

$$\sigma^2 = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{\delta_i^2}{n} \tag{56}$$

(δ_i 是测量列的误差）给出了一个直接的证明方法。对于组合测量列 y_1、y_2, $\cdots$, y_n 的标准差估算公式

$$S_y = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}V_i^2}{n-t}} \tag{57}$$

(式中 V_i 是组合测量列的剩余误差即残差，t 是未知参数的数目)仍可从偶然误差的抵偿性及方差定义式(56)来证明。为此首先要对式(56)作一些分析。显然，要使式(56)在数学上成立，应该加一个假定，即极限存在，但对实际情况，这一点是无法用数学来证明的，然而式(56)却给了我们一个直观的图像：即 $\sum_{i=1}^{n}\frac{\delta_i^2}{n}$ 是各测量列误差平方的平均值，当测量次数 n 很大，可用这一平均值来估算方差 σ^2。进一步，我们便可以作一等价的假定：当一个表达式中同时存在 δ_1^2, δ_2^2, $\cdots$, δ_n^2，当 n 很大时，它们实际上皆可用 σ^2 来近似代替。这一假定与偶然误差的抵偿性一起，便构成了式(57)成立的前提条件。

下面以有两个未知参数 a, b 的线性函数

$$y = ax_1 + bx_2 \tag{58}$$

的组合测量为例来证明式(57)。

设对(y, x_1, x_2)测量 n 次得到 n 组测量值(y_i, x_{1i}, x_{2i})($i = 1, 2, \cdots, n$)，令 $\bar{a}$, $\bar{b}$ 为 a, b 的最佳值，代入式(58)可得组合测量列 y_i 的残差为

$$V_i = y_i - (\bar{a}x_{1i} + \bar{b}x_{2i}) \tag{59}$$

则有

$$\sum_{i=1}^{n}V_i^2 = \sum_{i=1}^{n}y_i^2 + \sum_{i=1}^{n}(\bar{a}x_{1i} + \bar{b}x_{2i})^2 - 2\sum_{i=1}^{n}y_i(\bar{a}x_{1i} + \bar{b}x_{2i}) \tag{60}$$

由最小二乘法原理，$\bar{a}$, $\bar{b}$ 的选择应使 $\sum_{i=1}^{n}V_i^2$ 为最小，则

$$\frac{\partial\sum_{i=1}^{n}V_i^2}{\partial\bar{a}} = 0 \quad 即 \quad \sum_{i=1}^{n}V_ix_{1i} = 0 \tag{61}$$

$$\frac{\partial\sum_{i=1}^{n}V_i^2}{\partial\bar{b}}=0 \quad 即 \quad \sum_{i=1}^{n}V_i x_{2i}=0$$

由式(61)即可求解出 $\bar{a}$，$\bar{b}$(n 须大于 2)。

设 $\bar{a}$，$\bar{b}$ 的误差分别为 δ_a，δ_b，则 y_i 的误差 δ_i 为

$$\delta_i=y_i-[(\bar{a}-\delta_a)x_{1i}+(\bar{b}-\delta_b)x_{2i}]=V_i+\delta_a x_{1i}+\delta_b x_{2i} \tag{62}$$

将上式两边乘以 V_i 可得

$$\delta_i V_i=V_i^2+\delta_a x_{1i}V_i+\delta_b x_{2i}V_i \tag{63}$$

将式(63)求和有

$$\sum_{i=1}^{n}\delta_i V_i=\sum_{i=1}^{n}V_i^2+\delta_a\sum_{i=1}^{n}x_{1i}V_i+\delta_b\sum_{i=1}^{n}x_{2i}V_i \tag{64}$$

利用式(61)有

$$\sum_{i=1}^{n}\delta_i V_i=\sum_{i=1}^{n}V_i^2 \tag{65}$$

同样，将式(62)两边乘以 δ_i 并求和可得

$$\sum_{i=1}^{n}\delta_i^2=\sum_{i=1}^{n}V_i\delta_i+\delta_a\sum_{i=1}^{n}x_{1i}\delta_i+\delta_b\sum_{i=1}^{n}x_{2i}\delta_i \tag{66}$$

利用式(65) 有

$$\sum_{i=1}^{n}\delta_i^2=\sum_{i=1}^{n}V_i^2+\delta_a\sum_{i=1}^{n}x_{1i}\delta_i+\delta_b\sum_{i=1}^{n}x_{2i}\delta_i \tag{67}$$

将式(62)两边分别乘以 x_{1i} 和 x_{2i} 分别相加并利用式(61)可得

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n}\delta_i x_{1i}&=\delta_a\sum_{i=1}^{n}x_{1i}^2+\delta_b\sum_{i=1}^{n}x_{2i}x_{1i}\\ \sum_{i=1}^{n}\delta_i x_{2i}&=\delta_a\sum_{i=1}^{n}x_{1i}x_{2i}+\delta_b\sum_{i=1}^{n}x_{2i}^2\end{aligned} \tag{68}$$

由此可解出 δ_a，δ_b 为

$$\begin{aligned}\delta_a&=\frac{\sum_{i=1}^{n}\delta_i x_{1i}\sum_{i=1}^{n}x_{2i}^2-\sum_{i=1}^{n}x_{2i}x_{1i}\sum_{i=1}^{n}\delta_i x_{2i}}{\sum_{i=1}^{n}x_{1i}^2\sum_{i=1}^{n}x_{2i}^2-\left(\sum_{i=1}^{n}x_{1i}x_{2i}\right)^2}=\sum_{j=1}^{n}\alpha_j\delta_j\\ \delta_b&=\frac{\sum_{i=1}^{n}\delta_i x_{2i}\sum_{i=1}^{n}x_{1i}^2-\sum_{i=1}^{n}x_{1i}x_{2i}\sum_{i=1}^{n}\delta_i x_{1i}}{\sum_{i=1}^{n}x_{1i}^2\sum_{i=1}^{n}x_{2i}^2-\left(\sum_{i=1}^{n}x_{1i}x_{2i}\right)^2}=\sum_{j=1}^{n}\beta_j\delta_j\end{aligned} \tag{69}$$

式中 $\alpha_j=\dfrac{\left(\sum\limits_{i=1}^{n}x_{2i}^2\right)x_{1j}-\left(\sum\limits_{i=1}^{n}x_{1i}x_{2i}\right)x_{2j}}{\sum\limits_{i=1}^{n}x_{1i}^2\sum\limits_{i=1}^{n}x_{2i}^2-\left(\sum\limits_{i=1}^{n}x_{1i}x_{2i}\right)^2}$，交换 α_j 式中的下标 1，2 即得 β_j。于是

$$\delta_a\sum_{i=1}^{n}x_{1i}\delta_i=\sum_{j=1}^{n}\alpha_j\delta_j\sum_{i=1}^{n}x_{1i}\delta_i=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i x_{1i}\delta_i^2+\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(\alpha_i x_{1j}+\alpha_j x_{1i})\delta_i\delta_j \tag{70}$$

当 n 很大时，由于偶然误差的抵偿性，$\delta_i\delta_j$ 项等于零，所以

$$\delta_a\sum_{i=1}^{n}x_{1i}\delta_i=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i x_{1i}\delta_i^2=\sum_{i=1}^{n}\frac{\left(\sum\limits_{i=1}^{n}x_{2i}^2\right)x_{1i}^2-\left(\sum\limits_{i=1}^{n}x_{1i}x_{2i}\right)x_{2i}x_{1i}}{\sum\limits_{i=1}^{n}x_{1i}^2\sum\limits_{i=1}^{n}x_{2i}^2-\left(\sum\limits_{i=1}^{n}x_{1i}x_{2i}\right)^2}\delta_i^2 \tag{71}$$

又当 n 很大时，上式中的 δ_1^2，δ_2^2，…，δ_n^2 皆可用 y_i 的方差 σ^2 代替，于是有

$$\delta_a\sum_{i=1}^{n}x_{1i}\delta_i=\sigma^2 \tag{72}$$

同理可得

$$\delta_b\sum_{i=1}^{n}x_{2i}\delta_i=\sigma^2 \tag{73}$$

将上两式代入式(67)有

$$\sum_{i=1}^{n}\delta_i^2=\sum_{i=1}^{n}V_i^2+\sigma^2+\sigma^2 \tag{74}$$

亦即

$$n\sigma^2=\sum_{i=1}^{n}V_i^2+2\sigma^2 \tag{75}$$

所以

$$\sigma^2\approx\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}V_i^2}{n-2}=S_y^2 \tag{76}$$

这就是用 y_i 的残差 V_i 来估算其方差 σ^2 的计算公式。上式可推广到有 t 个未知参数的一般情况

$$S_y^2=\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}V_i^2}{n-t} \tag{77}$$

式中的 n 须大于 t。

从以上证明过程可见，公式(57)和公式(55)一样，与误差分布无关，前提仅仅是偶然误差的抵偿性和等精度测量列方差的定义。

基本实验

实验 16　薄透镜焦距的测量

由各种光学元件组成的光学仪器中透镜是最基本的成像元件，所以了解透镜的重要参量——焦距，并熟悉透镜成像规律，是分析光学成像系统的基础。

一、实验目的

1. 学习简单光路的"等高共轴"调节。
2. 用自准直法、共轭法测量凸透镜焦距；用自准直法、物距像距法测量凹透镜焦距。
3. 加深对凸、凹透镜成像规律的感性认识。

二、实验原理

一般可用成像公式和自准直法来测量薄透镜的焦距。

由几何光学理论推导薄透镜的近轴光线成像公式为

$$\frac{1}{U}+\frac{1}{V}=\frac{1}{f}$$

所以

$$f=\frac{UV}{U+V} \tag{16-1}$$

式中 U 为物距，V 为像距，f 为透镜的焦距。如图 16-1 所示，只要测出 U 及 V 即可由式(16-1)计算焦距 f。

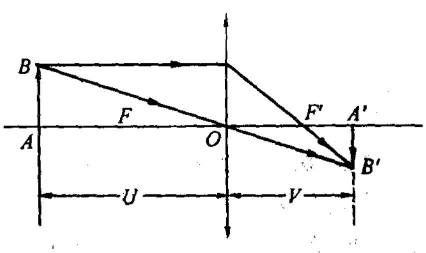

图 16-1

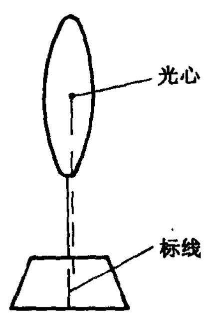

图 16-2

(一) 测凸透镜焦距

1. 用共轭法(也称二次成像法)测量凸透镜焦距

实验是在光具座上进行的。光具座包括一根长直导轨(上附标尺)、几个可在导轨上滑动的底座，底座上可装插各种光学元件，如照明光源、物屏、透镜、像屏、平面反射镜等，底座下端刻有读数标线，以读出底座在导轨上的位置。

如果光心位置不准确，光心与底座标线不共面(如图 16-2 所示)，测得 U,V 读数就会有

误差。消除这种系统误差的方法之一就是利用共轭法，或称二次成像法。

由凸透镜成像规律可知，如果物屏与像屏的相对位置 D 保持不变，而且 $D > 4f$，则在物屏与像屏间移动透镜，可得二次成像。当透镜移到 X_1 位置时，屏上得到一个倒立放大实像 A_1B_1；透镜移至 X_2 位置时，屏上得到一个倒立缩小实像 A_2B_2，光路如图 16－3 所示。

由图 16－3 可知，透镜在 X_1 位置时，有

$$U_1 = D - d - V_2$$

$$V_1 = d + V_2$$

则
$$f = \frac{(D - d - V_2)(d + V_2)}{D} \tag{16-2}$$

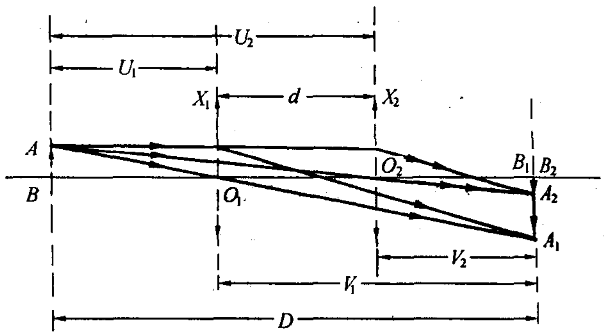

图 16－3　用共轭法测量凸透镜焦距

透镜在 X_2 位置时，有 $U_2 = D - V_2$

则
$$f = \frac{(D - V_2)V_2}{D} \tag{16-3}$$

由式(16－2)，式(16－3)可解出

$$V_2 = \frac{D - d}{2} \tag{16-4}$$

因此有

$$f = \frac{D^2 - d^2}{4D} \tag{16-5}$$

由此可知，只要找出透镜二次成像的位置和物与像之间距离，就可算得凸透镜焦距 f，但必须满足 $D > 4f$ 的条件，否则像屏上不可能有二次成像(为什么?)。这种方法不需要确切知道透镜光心在什么位置，只需要保证在二次成像过程中，确定透镜位置的标线和透镜光心之间的偏离保持恒定。

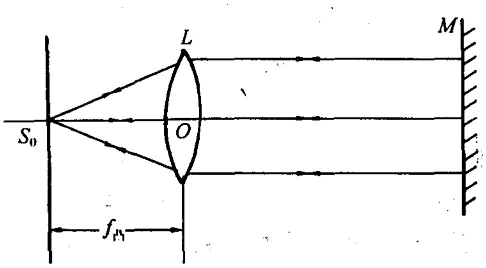

图 16－4　用自准直法测量凸透镜焦距

2. 用自准直法测量凸透镜焦距

如图 16－4 所示，狭缝光源 S_0 置于透镜 L 焦点处，发出的光经透镜后成为平行光，在透镜后面放一块与透镜主光轴垂直的平面反射镜 M，