大学数学应用与提高丛书

GAODENG SHUXUE YINGYONG YU TIGAO

蔡光兴　李子强　主编

# 高等数学应用与提高

蔡光兴　郑列　主编

科学出版社

大学数学应用与提高丛书

# 高等数学应用与提高


蔡光兴　郑　列　主　编

李逢高　方　瑛　副主编





科学出版社

2002

# 内 容 简 介

本书为《大学数学应用与提高丛书》之一，是根据全国工科院校高等数学教学大纲和研究生入学考试高等数学大纲要求编写的，是与高等数学通用教材同步的辅助教材.本书共十三章，除第十三章外每章含有教学基本要求、内容提要、典型例题、疑难解答、应用与提高、练习题与自测题.第十三章为数学实验内容.书末附有习题参考答案，以及2001、2002年全国硕士研究生入学考试数学试题.因2003年研究生入学考试将变为150分，我们提供了一套2003年考研数学样卷.

本书具有丛书共同特点：重视数学方法、注重学生应用能力的培养与提高，通过典型例题介绍各种解题思路、方法和计算技巧，通过内容提要、疑难解答帮助读者把高等数学中的概念予以融会贯通，通过应用与提高、练习题训练、数学实验训练进一步拓宽解题思路，提高综合应用能力.

本书为高等院校本、专科学生的高等数学课程辅助教材，也可供成人教育和自学高等数学的学生学习使用，对报考硕士研究生的考生来说，本书无疑具有重要的参考价值.

**图书在版编目(CIP)数据**

高等数学应用与提高/蔡光兴主编.-北京:科学出版社，2002.9
(大学数学应用与提高丛书)
ISBN 7-03-010857-4

Ⅰ.高… Ⅱ.蔡… Ⅲ.高等数学-高等学校-教学参考资料 Ⅳ.O13

中国版本图书馆CIP数据核字(2002)第063227号

科学出版社 出版
北京东黄城根北街16号
邮政编码:100717
http://www.sciencep.com
湖北京山金美印刷有限责任公司印刷
新华书店北京发行所发行 各地新华书店经售
*
2002年9月第 一 版 开本:787×1092 1/16
2002年9月第一次印刷 印张:19 1/2
印数:1~10 000 字数:480 000

定价:28.00元

# 《大学数学应用与提高丛书》编委会

# 前　言

《大学数学应用与提高丛书》是与高等院校学生必修的三门大学数学课程：高等数学、线性代数、概率统计相配套的辅助教材.编写这套丛书主要基于三大方面的原因：第一，高等教育改革的实施，这三门大学数学课程授课时数在减少，受到时间的限制，概念的深入探讨、知识的融会贯通、知识面的扩展必受到一定影响，因此，学生们渴望有一套弥补上述不足、切合实际的辅助教材；第二，后续课程及研究生入学考试对三门大学基础数学课程在教学大纲范围内有深化趋势，因此，对大批报考硕士研究生的学生而言，他们渴望有一套针对性强的考研复习资料；第三，进入21世纪，社会对人才提出了更高要求，大学数学教育的作用不再仅仅是学习基础知识，为后续课程或其他科学打基础、提供工具，更重要的是传授数学思路、数学方法，培养学生的创新意识，提高学生的数学素养、数学思维能力、计算数学能力和应用数学能力.为此，我们组织了一批有着丰富教学经验和开拓创新精神的教师编写了这套辅助教材.丛书分三册：《高等数学应用与提高》、《线性代数应用与提高》、《概率统计应用与提高》，丛书主编为蔡光兴、李子强，副主编为郑列、朱永松.在内容上，丛书各册每章含有：

(1) 教学基本要求.是每章教学的基本要求.

(2) 内容提要.是每章基本概念、理论、方法的归纳，在学习或复习中起提纲挈领的作用.

(3) 典型例题.根据章节知识点，给出若干典型例题，介绍各种解题思路、方法和计算技巧.通过例题，使读者做到举一反三，提高独自解题能力.

(4) 疑难解答.提出若干疑难问题，并给予解答，帮助读者正确理解概念、理论与方法，培养学生正确思考问题、解决问题的能力.

(5) 应用与提高.结合本章知识内容，给出在实际应用中的实例及本章中难度较高的综合题或研究生考试题.

(6) 练习题.作为基本训练，训练学生各种能力.

(7) 自测题.用于自我检测，及时了解自己的水平.

(8) 上机实验.上机实验都集中放在书末，学生可在教师指导下上机练习，或自学用，以增强学生计算应用能力.

本套丛书具有如下共性：

(1) 立足基础.通过教学要求、内容提要、典型例题、疑难解答，使学生对本章所要求掌握的基本概念、基本方法做到融会贯通.

(2) 重视数学思想方法、综合应用数学能力的训练与培养.通过典型例题、提高题、训练题来培养学生的数学解题能力和数学知识的综合运用能力.

(3) 突出应用与数学建模思想.通过实例，培养学生将实际问题转化为数学问题的数学建模能力，并运用数学知识加以解决的应用能力.

(4) 设置了数学实验，注重数学软件在高等数学、线性代数、概率统计中操作与应用，以提高学生学习兴趣，培养学生运用软件与数学知识解决实际问题能力.

《高等数学应用与提高》作为《大学数学应用与提高丛书》之一，具有丛书的共同特点与章节编写体系，每章含教学基本要求、内容提要、典型例题、疑难解答、应用与提高、练习题与自测

题，并在书末专门用一章讲述高等数学实验．通过这些内容的教学，使学生对基本概念、基本方法做到融会贯通，并能将实际问题转化为数学模型，再运用数学知识与数学软件解决实际问题的能力及综合运用能力．

本书由蔡光兴、郑列主编，李逢高、方瑛任副主编．参加编写工作的有：郑列（第一章），蔡光兴（第二章），陈水林（第三章），方瑛（第四章），胡汉儒（第五章），李子强（第六章），柯云（第七章），周启元（第八章），杨策平（第九章），黄斌（第十章），刘磊（第十一章），李逢高（第十二章），朱永松、许松林（数学实验）．最后由蔡光兴、胡汉儒、杨策平统稿，蔡光兴定稿．

由于编者水平有限，时间仓促，书中难免有不妥甚至错误之处，恳请广大读者提出批评指正，以便再版时予以修订．

编　者

2002 年 6 月

# 目　　录

# 第一章　函数与极限

## 一、教学基本要求

(1) 理解函数的概念,包括反函数、复合函数、初等函数的概念;了解函数的四种特性,掌握基本初等函数及其图形.

(2) 深刻理解极限的定义,掌握极限的有关性质、极限存在的夹逼准则和单调有界数列收敛准则,并能熟练运用极限运算法则求数列与函数的极限.

(3) 了解无穷小与无穷大的定义及其性质,掌握无穷小的运算法则.

(4) 理解函数连续性概念以及连续函数的性质,了解函数的间断点及其类型及闭区间上连续函数的分析性质.

## 二、内容提要

### (一) 函数的概念与性质

**1. 函数**

设 $x$ 和 $y$ 为两个变量,$D$ 是一个给定的数集,若对于 $D$ 中任意一个 $x$ 变量,变量 $y$ 按照一定法则总有确定的数值与它对应,则称 $y$ 是 $x$ 的函数. 记作 $y=f(x)$,其中 $D$ 称为函数的定义域,$x$ 为自变量,$y$ 为因变量,$w=\{y|y=f(x),x\in D\}$ 称为函数的值域.

**2. 函数的特性**

(1) 函数的有界性. 若函数 $y=f(x)(x\in D)$ 存在 $M>0$ 使得对于 $D$ 内任意一点 $x$,有 $|f(x)|\leqslant M$,则称函数 $y=f(x)$ 在 $D$ 上有界,否则称函数 $y=f(x)$ 在 $D$ 上无界,即对于任意的 $M>0$,在 $D$ 内至少存在一点 $x_0$,有 $|f(x_0)|\geqslant M$.

(2) 函数的单调性. 若函数 $y=f(x)(x\in D)$ 对于 $D$ 内的区间 $I$ 上任意两点 $x_1$、$x_2$:当 $x_1<x_2$ 时必有 $f(x_1)<f(x_2)$,则称函数 $y=f(x)$ 在区间 $I$ 上单调增加;当 $x_1<x_2$ 时必有 $f(x_1)>f(x_2)$,则称函数 $y=f(x)$ 在区间 $I$ 上单调减少.

(3) 函数的奇偶性. 若函数 $y=f(x)$ 的定义域 $D$ 关于原点对称(即 $x\in D$)时,必有 $-x\in D$),且对于 $D$ 内任意一点 $x$,恒有 $f(-x)=f(x)$,则称 $y=f(x)$ 为偶数;反之,若恒有 $f(-x)=f(x)$,则称 $y=f(x)$ 为奇函数.

(4) 函数的周期性. 若函数 $y=f(x)$ 在 $D$ 上有定义且存在一个非零常数 $l$,使得对 $D$ 中任意 $x$,有 $x+l\in D$,而且 $f(x+l)=f(x)$ 恒成立,则称 $f(x)$ 为周期函数,$l$ 称为 $f(x)$ 的周期. 函数的周期边常是指最小正周期,但有些周期函数不一定存在最小正周期.

**3. 反函数**

函数 $y=f(x)$ 的定义域为 $D$,值域为 $W$,对 $W$ 中任意的 $y$,至少可以确定一个 $x\in D$(适合 $f(x)=y$)与之对应,由此构成的函数 $x=\varphi(y)$ 称为 $y=f(x)$ 的反函数.

**4. 基本初等函数**

幂函数、指数函数、对数函数、三角函数及反三角函数称为基本初等函数.

**5. 复合函数**

设函数 $y=f(u)$的定义域为 $D_1$，函数 $u=\varphi(x)$的定义域为 $D$，值域为 $W$，若 $W\subset D_1$，则对 $D$ 内任意一点 $x$，有确定的值 $u=\varphi(x)$与之对应，由于 $u=f(x)\in W\subset D_1$，又有确定的值 $y$ 与之对应，由此确定的函数称为 $y=f(u)$与 $u=\varphi(x)$的复合函数，记作 $y=f[\varphi(x)]$.

## （二）函数的极限

**1. 数列及其极限**

(1) 数列. 数列是无穷有序的数组，而其第 $n$ 项称为一般项，数列 $a_n$ 中取无穷且保持原有次序而构成的数列称为 $a_n$ 的子列.

(2) 数列的极限. 对于数列 $a_n$，若存在数 $a$，满足：$\forall\ \varepsilon>0$，$\exists\ N\in N$，当 $n>N$，有

$$|a_n-a|<\varepsilon$$

则称数列 $a_n$ 极限存在或收敛，并把 $a$ 称为数列 $a_n$ 的极限，记作

$$\lim_{n\to\infty}a_n=a$$

若数列 $a_n$ 的极限不存在，则称数列 $a_n$ 发散.

(3) 几何意义. 数列 $a_n$ 的极限为 $a$，则 $a$ 的任一邻域内含有数列 $a_n$，几乎所有的项，即除至多有限项外的所有项都在该邻域中.

**2. 函数极限(当 $x\to x_0$ 时)定义**

设函数 $y=f(x)$在 $x_0$ 的某一去心邻域内有定义，若存在数 $A$，满足：$\forall\ \varepsilon>0$，$\exists\ \delta>0$，对于满足 $0<|x-x_0|<\delta$ 的任意 $x$，都有

$$|f(x)-A|<\varepsilon$$

则称当 $x\to x_0$ 时函数 $y=f(x)$的极限存在且极限为 $A$，记作

$$\lim_{x\to x_0}f(x)=A$$

**3. 单侧极限(左、右极限)**

设函数 $y=f(x)$在某区间$(x_0-r,x_0)$($(x_0,x_0+r)$)$(r>0)$有定义，若存在数 $A$，满足：$\forall\ \varepsilon>0$，$\exists\ \delta>0$ $(\delta<r)$，对于满足 $0<x_0-x<\delta$ $(0<x-x_0<\delta)$的任意 $x$，都有

$$|f(x)-A|<\varepsilon$$

则 $A=\lim\limits_{x\to x_0^{-0}}f(x)=f(x_0-0)$ $(A=\lim\limits_{x_0^{+0}}f(x)=f(x_0+0))$称作$f(x)$当 $x\to x_0$ 时的左极限(右极限).

$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$存在的充分必要条件为其左右极限存在且相等.

**4. 函数极限(当 $x\to\infty$时)定义**

设函数 $y=f(x)$在$|x|>X_0$(其中 $X_0>0$)内有定义，若存在数 $A$，满足$\forall\ \varepsilon>0$，$\exists\ X>0$($X>X_0$)，对于满足$|x|>X$ 的任意 $x$，都有

$$|f(x)-A|<\varepsilon$$

则称当 $x\to\infty$时，函数 $y=f(x)$的极限存在且极限为 $A$，记作

$$\lim_{x\to\infty}f(x)=A$$

设函数 $y=f(x)$在 $x>X_0$($x<-X_0$) (其中 $X_0>0$)内有定义，若存在数 $A$ 满足：$\forall\ \varepsilon>0$，$\exists\ X>0$($X>X_0$)，对于满足 $x>X$($x<-X$)的任意 $x$，都有

$$|f(x)-A|<\varepsilon$$

则称当 $x\to+\infty$($x\to-\infty$)时函数 $y=f(x)$的极限存在且极限为 $A$，记作

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=A\left(\lim_{x\to-\infty} f(x)=A\right)$$

**注 1** 给定的一个数列 $a_n$ 可以看做定义在自然数集 $N$ 上的函数 $f(n)$，因此数列极限 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n$就是函数极限 $\lim\limits_{\substack{x\to+\infty\\ x\in(N)}} f(x)$，从而数列极限与函数极限都具有下面的性质.

**5. 极限的性质**

(1) 惟一性. 若极限存在，则极限惟一.

(2) 有界性. 若极限存在，则函数有界（所谓有界，对函数来说是指局部有界，即在自变量变化过程中的某邻域或某无穷区间内函数有界）.

(3) 归并性.

① 数列收敛于 $A$ 的充分必要条件为其任一子列收敛于 $A$.

② 函数 $y=f(x)$ 当 $x\to x_0$（或 $x\to\infty$）的极限为 $A$ 的充分必要条件是：对任意数列 $x_n$，若 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=x_0$（其中 $x_n\neq x_0$）（或 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\infty$），则数列 $f(x_n)$收敛于 $A$.

(4) 若 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$，而且 $A>0$（或 $A<0$），则存在 $x_0$ 的某个去心领域，在此去心领域内，有 $f(x)>A/2$（或 $f(x)<A/2$）. 若在 $x_0$ 的某一去心邻域内 $f(x)\geqslant 0$（或 $f(x)\leqslant 0$），且极限 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$，则 $A\geqslant 0$（或 $A\leqslant 0$）.

**注 2** 此性质也适用于其他极限过程和 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)$等（包括单侧极限，其结论只需根据过程改动使不等式成立的自变量范围即可）.

**6. 极限运算法则**

设在自变量同一变化过程中 $\lim f(x)$，$\lim g(x)$存在，则：

(1) $\lim[f(x)\pm g(x)]=\lim f(x)\pm\lim g(x)$

(2) $\lim[f(x)g(x)]=\lim f(x)\cdot\lim g(x)$

(3) $\lim\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{\lim f(x)}{\lim g(x)}$ （其中 $\lim g(x)\neq 0$）

(4) $\lim f(x)=0$，$g(x)$有界，则 $\lim f(x)g(x)=0$

(5)（复合函数） 若 $\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x)=a$，且在 $x_0$ 的某一去心邻域内$\varphi(x)\neq a$，$\lim\limits_{u\to a}f(u)=A$，则 $\lim\limits_{x\to x_0}f(\varphi(x))=A$.

**7. 极限存在的两个准则及两个重要极限**

(1) 准则 Ⅰ：数列$\{x_n\}$，$\{y_n\}$，$\{z_n\}$满足：(i) $y_n\leqslant x_n\leqslant z_n$，(ii) $\lim\limits_{n\to\infty}y_n=\lim\limits_{n\to\infty}z_n=a$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 存在，且 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$.

准则 Ⅰ′：若函数 $f(x)$，$g(x)$，$h(x)$在同一极限过程中满足：(i) $g(x)\leqslant f(x)\leqslant h(x)$，(ii) $\lim g(x)=\lim h(x)=A$，则$\lim f(x)=A$.

(2) 准则 Ⅱ：单调有界数列必收敛.

(3) 两个重要极限：

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1 \qquad \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e$$

## （三）无穷小与无穷大

(1) 若 $\lim f(x)=0$，则称在这极限过程中 $f(x)$为无穷小（量）；若 $\lim f(x)=\infty$，则称在这极限过程中 $f(x)$为无穷大（量）.

(2)（无穷小与无穷大关系）在同一极限过程中，若 $f(x)$ 为无穷小，且 $f(x)\neq 0$，则 $\frac{1}{f(x)}$ 为无穷大；若 $f(x)$ 为无穷大，则 $\frac{1}{f(x)}$ 为无穷小.

(3)（无穷小与极限的关系）在某一极限过程中，$\lim f(x)=A$ 的充分必要条件为 $f(x)=A+\alpha$，其中 $\alpha$ 为同一过程中的无穷小量.

(4)（无穷小的比较）设在同一极限过程中，$\alpha,\beta$ 为无穷小量：

若 $\lim\frac{\beta}{\alpha}=0(\alpha\neq 0)$ 或 $\lim\frac{\alpha}{\beta}=\infty\ (\beta\neq 0)$，则称 $\beta$ 为 $\alpha$ 的高阶的无穷小量，记作 $\beta=o(\alpha)$，或称 $\alpha$ 是 $\beta$ 的低阶无穷小量；

若 $\lim\frac{\beta}{\alpha}=c\neq 0$，则称 $\beta$ 和 $\alpha$ 为同阶无穷小量，特别若 $c=1$ 时，则称 $\beta$ 与 $\alpha$ 是等价无穷小量，记作 $\beta\sim\alpha$；

若 $\lim\frac{\beta}{\alpha^k}=c\neq 0\ (k>0)$，则称 $\beta$ 是关于 $\alpha$ 的 $k$ 阶无穷小.

(5)（无穷小的运算法则）在同一极限过程中，有限多个无穷小的和与积仍是无穷小，有界变量与无穷小量之积仍是无穷小.

(6)（无穷小的替换性质）设 $\alpha,\beta$ 为同一极限过程的无穷小量，且 $\alpha\sim\alpha'$、$\beta\sim\beta'$，$\lim\frac{\beta'}{\alpha'}$ 存在 $(\alpha\neq 0,\alpha'\neq 0)$，则 $\lim\frac{\beta}{\alpha}$ 存在，且 $\lim\frac{\beta}{\alpha}=\lim\frac{\beta'}{\alpha'}$.

(7) 几个重要等价无穷小：

当 $x\to 0$ 时

$$x\sim\sin x\sim\tan x\sim\arcsin x\sim\arctan x$$

$$\ln(1+x)\sim x\qquad e^x-1\sim x\qquad 1-\cos x\sim\frac{x^2}{2}$$

$$(1+x)^a-1\sim ax\quad a^x-1\sim x\ln a\ (a>0,a\neq 1)$$

## （四）函数的连续性与间断点

(1) 设函数 $f(x)$ 在 $x_0$ 的某邻域内有定义，函数 $f(x)$ 在 $x_0$ 点连续的几个等价定义：

① $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$（极限值等于函数值）；

② $\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)=f(x_0)$（左极限＝右极限＝函数值）；

③ 当自变量增量为 $\Delta x$，相应地函数增量为 $\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$，则 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta y=0$；

④ $\forall\ \varepsilon>0,\exists\ \delta>0$，对于满足 $|x-x_0|<\delta$ 的任意 $x$，都有 $|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$.

(2) 若函数 $y=f(x)$ 在点 $x_0$ 处不连续，则 $x_0$ 是函数 $y=f(x)$ 的间断点；若 $\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)$ 与 $\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)$ 均存在，而 $y=f(x)$ 在 $x_0$ 间断，则称 $x_0$ 为第一类间断点，特别当 $\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)$ 即 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ 存在时，把 $x_0$ 称为可去间断点；当 $\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)\neq\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)$ 时，把 $x_0$ 称为跳跃间断点. 若 $f(x)$ 的间断点 $x_0$ 不是第一类的，则称点 $x_0$ 为 $y=f(x)$ 的第二类间断点，特别当 $\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)$ 或 $\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)$ 为无穷大时，把 $x_0$ 称为 $y=f(x)$ 的无穷间断点，当 $x\to x_0$ 时，对应的函数值无限次地在两个固定的不同数值间变动，就把 $x_0$ 称为 $y=f(x)$ 的振荡间断点.

(3) 连续函数的代数运算性质：

① 若函数 $f(x)$，$g(x)$ 均在点 $x_0$ 处连续，则 $f(x)\pm g(x)$，$f(x)\cdot g(x)$ 都在点 $x_0$ 处连续，在 $g(x_0)\neq 0$ 条件下函数 $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ 在点 $x_0$ 处也连续；

② 若函数 $f(x)=g$ 在区间 $I_x$ 上单调增加(减少)且连续，则其反函数 $x=\varphi(y)$ 也在区间 $I_y=\{y|y=f(x),x\in I_x\}$ 上单调增加(减少)且连续；

③ 函数 $y=f(u)$ 在 $u=a$ 点处连续，函数 $u=\varphi(x)$ 在 $x=x_0$ 点处连续，且 $a=\varphi(x_0)$，则复合函数 $y=f[\varphi(x)]$ 在 $x=x_0$ 点处连续；

④ 初等函数(即由常数与基本初等函数经过有限次四则运算及有限次复合过程而成的函数)在定义区间内连续.

(4) 闭区间上连续函数的性质：

① 若函数 $y=f(x)$ 在区间 $I$ 上存在 $x_0$，使得对于 $I$ 上任意一点 $x$，满足 $f(x)\leqslant f(x_0)$ (或 $f(x)\geqslant f(x_0)$)，则称 $x_0$ 为函数 $y=f(x)$ 在区间 $I$ 上的最大值点(或最小值点)，$f(x_0)$ 称为函数 $y=f(x)$ 在区间 $I$ 上的最大值(或最小值).

② 最大值、最小值存在与函数有界定理. 若函数 $y=f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，则有：

(i) $y=f(x)$ 在 $[a,b]$ 上必可取到最大值及最小值，即 $\exists\ \xi,\eta\in[a,b]$，使得 $f(\xi)=\max\limits_{x\in[a,b]}f(x)$，$f(y)=\min\limits_{x\in[a,b]}f(x)$；

(ii) $y=f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有界，即 $\exists\ M>0$，使得 $|f(x)|\leqslant M$，$\forall\ x\in[a,b]$.

③ 零点定理与介值定理. 设 $y=f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，则：

(i) 若 $f(a)\cdot f(b)<0$，则在 $(a,b)$ 至少有一点 $\xi$，使得 $f(\xi)=0$ (零点定理)；

(ii) 若 $f(a)\neq f(b)$，则对于 $f(a)$ 与 $f(b)$ 之间的任意值 $\mu$，在 $(a,b)$ 内至少有一点 $\xi$，使得 $f(\xi)=\mu$ (介值定理).

**推论：**

(i) 若 $y=f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，设 $m$、$M$ 分别为 $y=f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的最小值和最大值，则对介于 $m$ 和 $M$ 之间的任意值 $\mu$，在 $[a,b]$ 上至少有一点 $\xi$，使得 $f(\xi)=\mu$；

(ii) 闭区间上的不恒为常数的连续函数，其值域为闭区间.

## 三、典型例题

### (一) 函数定义域及其简单性质

**例 1** 求 $f(x)$ 的定义域：

(1) $f(x)=\sqrt{\dfrac{x^2(1-x^2)}{6-x-x^2}}$　　(2) $f(x)=\arcsin(x^2-x-1)+\sqrt{\lg x}$

**解** (1) 欲使 $f(x)$ 有意义，必须

$$u=\frac{1-x^2}{6-x-x^2}=\frac{(1-x)(1+x)}{(3+x)(2-x)}\geqslant 0$$

显然，$u$ 值的零点及分式中分母为零的点依从小到大排列为 $x=-3$，$x=-1$，$x=1$ 及 $x=2$ 四个点，将整个实数轴分成五个开区间，$(-\infty,-3)$，$(-3,-1)$，$(-1,1)$，$(1,2)$，$(2,+\infty)$，在每个区间内 $u$ 有相同符号，如下图(见图 1-1). 从此图中可以看出，当 $x\in(-\infty,-3)\cup[-1,1]\cup(2,+\infty)$ 时 $u\geqslant 0$，所以 $f(x)$ 的定义域是：

$$(-\infty,-3)\cup[-1,1]\cup(2,+\infty)$$

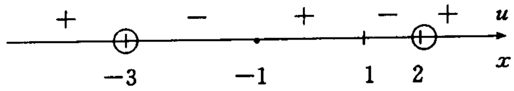


图 1-1

(2) 欲使 $f(x)$有意义,$x$ 须满足

$$\begin{cases}-1\leqslant x^2-x-1\leqslant 1\\ \lg x\geqslant 0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x^2-x\geqslant 0\\ x^2-x-2\leqslant 0\\ x\geqslant 1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x(x-1)\geqslant 0\\ (x-2)(x+1)\leqslant 0\\ x\geqslant 1\end{cases}$$

解之得 $f(x)$的定义域是 $1\leqslant x\leqslant 2$.

**例 2** 确定函数 $f(x)$的单调区间:

(1) $f(x)=x-\dfrac{1}{x}$ (2) $f(x)=\cos\dfrac{x}{2}$

**解** 为了确定 $f(x)$的单调增(或减)区间,在 $f(x)$的定义区间上取任意不同的相邻两点 $x$ 及 $x+\Delta x$,不妨令 $\Delta x>0$,即 $x<x+\Delta x$,那么,使 $\Delta f=f(x+\Delta x)-f(x)$为正的区间就是 $f(x)$的单调增区间;同样,使 $\Delta f$ 为负的区间就是 $f(x)$的单调减区间.

(1) $\Delta f=\left(x+\Delta x-\dfrac{1}{x+\Delta x}\right)-\left(x-\dfrac{1}{x}\right)=\left[1+\dfrac{1}{x(x+\Delta x)}\right]\Delta x$

当 $x$ 及 $x+\Delta x$ 都是$(-\infty,0)$或$(0,+\infty)$的点时,$\Delta f>0$,所以$f(x)$在$(-\infty,0)$,$(0,+\infty)$上单调增.

(2) $$\Delta f=\cos\frac{x+\Delta x}{2}-\cos\frac{x}{2}=-2\sin\left(\frac{x}{2}+\frac{\Delta x}{4}\right)\sin\frac{\Delta x}{4}$$

当 $4n\pi\leqslant x<x+4x\leqslant(4n+2)\pi$ 时,$\Delta f<0$;当$(4n+2)\pi\leqslant x<x+\Delta x\leqslant 4(n+1)\pi$ 时,$\Delta f>0$. 所以,$f(x)$在区间$[4n\pi,(4n+2)\pi]$上单调减;在区间$[(4n+2)\pi,4(n+1)\pi]$上单调增,其中 $n=0,\pm1,\pm2,\cdots$.

**例 3** 设 $f(x)$在$(-a,a)$有定义$(a>0)$,证明:在$(-a,a)$上必有奇函数 $g(x)$及偶函数 $h(x)$,使 $f(x)=g(x)+h(x)$.

**证** 我们只要确定 $g(x)$及 $h(x)$使以下三等式成立:

$$g(-x)=-g(x)\quad h(-x)=h(x)\quad f(x)=g(x)+h(x)\quad x\in(-a,a)$$

即得联立式
$$\begin{cases}f(x)=g(x)+h(x)\\ f(-x)=-g(x)+h(x)\end{cases}$$

解得:$g(x)=\dfrac{1}{2}[f(x)-f(-x)]$,$h(x)=\dfrac{1}{2}[f(x)+f(-x)]$. 显然,$g(x)$是奇函数,$h(x)$是偶函数,$x\in(-a,a)$,从等式 $f(x)=\dfrac{1}{2}[f(x)-f(-x)]+\dfrac{1}{2}[f(x)+f(-x)]$,$x\in(-a,a)$,就证得本题成立.

**例 4** 设 $f(x)$是以正数 $a$ 为周期的周期函数,且已知当 $0<x\leqslant a$ 时,$f(x)=x^3$,试求周期函数 $f(x)$.

**解** 设 $x=\bar{x}+na$,其中 $\bar{x}\in(0,a]$,$x\in(na,(n+1)a]$,$n=0,\pm1,\pm2,\cdots$.

按周期函数的定义得:$f(x)=f(\bar{x})$,其中 $\bar{x}=x-na$,且 $f(\bar{x})=\bar{x}^3$,于是求得

$$f(x)=(x-na)^3,x\in(na,(n+1)a],n=0,\pm1,\pm2\cdots$$

**例 5** 设 $f(x)=\begin{cases}x^2, & x\leqslant 0\\ \lg x, & x>0\end{cases}$, $g(x)=\begin{cases}2-\cos x, & x\leqslant 0\\ 1-\sqrt{x}, & x>0\end{cases}$，求 $f[g(x)]$ 及 $g[f(x)]$.

**解**
$$f[g(x)]=\begin{cases}[g(x)]^2, & g(x)\leqslant 0\\ \lg[g(x)], & g(x)>0\end{cases}$$

其中
$$g(x)=\begin{cases}2-\cos x>0, & x\leqslant 0\\ 1-\sqrt{x}>0, & 0<x<1\\ 1-\sqrt{x}\leqslant 0, & x\geqslant 1\end{cases}$$

所以
$$f[g(x)]=\begin{cases}\lg(2-\cos x), & x\leqslant 0\\ \lg(1-\sqrt{x}), & 0<x<1\\ (1-\sqrt{x})^2, & x\geqslant 1\end{cases}$$

又
$$g[f(x)]=\begin{cases}2-\cos f(x), & f(x)\leqslant 0\\ 1-\sqrt{f(x)}, & f(x)>0\end{cases}$$

其中
$$f(x)=\begin{cases}x^2\geqslant 0, & x\leqslant 0\\ \lg x\leqslant 0, & 0<x\leqslant 1\\ \lg x>0, & x>1\end{cases}$$

所以
$$g[f(x)]=\begin{cases}1-|x|, & x\leqslant 0\\ 2-\cos(\lg x), & 0<x\leqslant 1\\ 1-\sqrt{\lg x}, & x>1\end{cases}$$

**例 6** 设 $f(x)=\begin{cases}x\sin x-x^3, & x<0\\ 5x^3, & x\geqslant 0\end{cases}$，问 $f(x)$ 是否为初等函数？为什么？

**解** 首先考虑以下两个函数

$$g(x)=\begin{cases}x\sin x, & x<0\\ 0, & x\geqslant 0\end{cases}$$

可以化成 $g(x)=\dfrac{1}{2}(x-\sqrt{x^2})\sin x$.

$$h(x)=\begin{cases}-x^3, & x<0\\ 5x^3, & x\geqslant 0\end{cases}$$

可以化成 $h(x)=2x^3+3(\sqrt{x^2})^3$.

所以 $g(x)$ 与 $h(x)$ 都是在 $(-\infty,+\infty)$ 上的初等函数，故

$$f(x)=g(x)+h(x)=\frac{1}{2}(x-|x|)\sin x+2x^3+3|x|^3 \quad x\in(-\infty,+\infty)$$

是初等函数.

## （二）用定义证明函数极限

**例 7** 试用"$\varepsilon$-$N$"语言证明：

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}(n-\sqrt{n^2-n})=\dfrac{1}{2}$　　　(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1$

**证** (1) 由于 $\left|(n-\sqrt{n^2-n})-\dfrac{1}{2}\right|=\left|\dfrac{n}{n+\sqrt{n^2-n}}-\dfrac{1}{2}\right|=\dfrac{n}{2(n+\sqrt{n^2-n})^2}<\dfrac{1}{2n}$

对任给 $\varepsilon>0$，要 $\left|(n-\sqrt{n^2-n})-\dfrac{1}{2}\right|<\varepsilon$，只要当 $n>\dfrac{1}{2\varepsilon}$，于是得如下结论：任给定 $\varepsilon>0$，有 $N=$