

稳定理论

下 卷

〔德意志民主共和国〕G·毕尔格麦斯特 H·斯托依普 等著

中国建筑工程出版社

稳 定 理 論

下 卷

〔德意志民主共和国〕G·毕尔格麦斯特 H·斯托依普 等 著

王生傳 陈醒輝 赵其昌 張庆彬 譯

俞載道 校



中国建筑工程出版社

本书主要介绍建筑结构稳定性的基本理论和实际设计计算问题,包括多跨连续压杆、框架和桁架、拱、板、壳以及褶皱结构的稳定问题。对这些問題均詳細地討論了用直接解微分方程法和能量法进行运算的途径,同时介绍了德意志民主共和国稳定规范中有关上述结构计算的规定。

本书可供建筑结构设计人员、研究人员以及高等学校师生参考。

本书上卷中译本由中国工业出版社于1964年出版。

GUSTAV BÜRGERMEISTER, HERBERT STEUP
HORST KRETZSCHMAR
STABILITÄTSTHEORIE
TEIL II
AKADEMIE-VERLAG·BERLIN-1963

* * *

稳 定 理 论

下 卷

王 生 传 陈 醒 辉 译
赵 其 昌 张 庆 彬

俞 载 道 校

*

中国建筑工业出版社出版(北京西郊百万庄)
新华书店北京发行所发行·各地新华书店经售
中国建筑工业出版社印刷厂印刷

*

开本: 787×1092毫米^{1/16} 印张: 19¹/₄ 字数 454 千字

1974年4月第一版·1974年4月第一次印刷

印数: 1—9,955册 定价: 1.90元

统一书号: 15040·3087

前 言

上卷中讨论了直杆的稳定问题，本卷将讨论杆系以及平面承载结构的稳定问题。

近几年来，轴向荷载作用下的连续杆、框架、桁架以及薄壁结构的精确计算成了很重要的问题。看来，即使这些问题有很大的局限性，我们专门把它们归入为一卷还是恰当的。在此，仍然尽量使力学-数学的关系从计算好的数据和表格中突出出来。这样，就是不太内行的读者也可以在极其繁多的文献中很快地找到途径，并且了解每种解法的原理。在本书的每一节中，总是由浅显的特例出发，论述比较普遍的原理，并把平衡分枝问题纳入变形原理中去。因为杆系及平面承载结构的弹塑性极限荷载二阶理论取得的进展还太少，所以就将这样的稳定问题当作弹性变形范围内应力理论的特殊情况来处理了。在平板及壳体方面也大致描述了临界区域的问题和塑性极限荷载的问题。至于一般的曲线座标和张量计算等就不去讨论了，因为这些数学辅助方法对于工程人员不一定都有用，而且壳体凸屈这一章篇幅也应有所限制。

象在上卷一样，给从事实际工作的设计人员和学生解释了规范 DIN 4114 以及后来生效的德意志民主共和国规范 TGL 0-4114 中的公式，并举出了应用实例。

大量计算例题将使理论的应用易于掌握，并使大家明瞭哪些解法适宜于哪一工作范围。

我们谨在此向科学出版社表示感谢，感谢它为本书作了精心的装璜，并尽力满足了我们的特殊要求。

著 者

1963年春于德累斯顿城

目 录

第七章 多跨受压杆件	1	第八章 框架和桁架结构	52
7-1 概论	1	8-1 概论	52
7-2 平衡法	2	8-2 平衡法	52
7-21 两跨連續杆件	2	8-21 基本考察	52
7-211 刚性的中間支承	2	8-211 半框架的变形問題	52
7-212 弹性的中間支承	3	8-212 双杆桁架的变形問題	54
7-213 简单杆件連接	5	8-22 平面杆系结构的屈曲	56
7-22 任意多跨的杆件	9	8-221 力法-变形法	57
7-221 力法-变形法	9	8-222 变形法	61
7-222 变形法	13	8-23 杆系结构空間屈曲問題的严密試解	65
7-223 应力問題上的变形法	17	8-231 空間桁架的不稳定性	65
7-224 利用矩陣的簡化法	19	8-232 空間杆系結構的不稳定性	68
7-225 差分方程法	26	8-24 非保向力的作用	75
7-226 在不可移动支承情况下应用 迭代法	29	8-241 弹性固定压杆	75
7-3 能量法	32	8-242 桁架桥上的端部框架	75
7-31 变分問題	32	8-3 能量法	77
7-311 主要問題的基本能量方程	32	8-31 概論	77
7-312 輔助問題的基本能量方程	33	8-32 杆系结构的能量試解	77
7-313 輔助問題的欧拉方程	33	8-321 弹性位势	77
7-314 正交关系的引入	33	8-322 随遇平衡条件	78
7-32 李茲(Ritz)近似解	34	8-323 半框架的屈曲	79
7-321 李茲試解	34	8-4 近似法	79
7-322 屈曲条件	35	8-41 利用校正弯矩的挠度法	80
7-323 简单的应用例題	36	8-411 双鉸框架	80
7-324 方法的具体应用	37	8-412 多肢多层框架	81
7-4 对理论的实际应用的说明	37	8-42 有校正弯矩的挠度法	83
7-41 受压弦杆的側向刚度	37	8-421 双鉸框架	83
7-411 一般考察	37	8-422 多肢多层框架	84
7-412 对問題的精确处理的說明	39	8-43 逐次近似法	85
7-413 按规范 TGL 0-4114 的簡化 解法	39	8-431 迭代規則的建立	86
7-42 格子式桅杆和桁架式柱	42	8-432 簡化应用例題	88
7-421 交变支承的压杆	43	8-44 弯矩传播法	89
7-422 按规范 TGL 0-4114 的屈曲 长度	44	8-441 随遇判別式	89
7-43 拉线桅杆	45	8-442 杆系结构中的弯矩传播	90
7-431 綽索的变形	46	8-443 刚度判別式	91
7-432 线性化的弹簧法則	46	8-444 序列判別式	92
7-433 桅杆的设计計算	48	8-445 关于判別式的应用問題	93
		8-45 固定区域内弯矩线性化的能量近似法	93
		8-451 弹性固定杆件	94
		8-452 閉合框架	95

8-453 对称多层双肢框架	96
8-5 框架结构的二阶应力问题	99
8-51 概論	99
8-52 二阶理論平面应力問題的解	99
8-521 迪辛格尔(Dischinger)方法的 迭代解	99
8-522 用变形法求解	100
8-523 机构图形导論	101
8-524 按规范 TGL 0-4114 的簡化方 式計算框架豎杆	104
第九章 拱	109
9-1 概論	109
9-2 平衡法	109
9-21 引言	109
9-211 压力线荷载作用下的双鉸圓 弧拱	110
9-212 径向荷载作用下的圓环	111
9-22 平面問題的一般試解	112
9-221 几何尺寸和变形	112
9-222 截面力和平衡条件	113
9-223 屈曲問題的微分方程	113
9-23 空間問題的一般試解	115
9-231 几何尺寸和变形	115
9-232 截面力	118
9-233 平衡条件	118
9-234 側屈問題解答一覽	119
9-3 能量法	120
9-31 压力线荷载作用下的拋物线拱	120
9-311 內力的位勢	120
9-312 外力的位勢	122
9-313 基本能量方程	122
9-32 屈曲条件	122
9-321 欧拉(Euler)方程	122
9-322 拱的临界推力	123
9-323 李茲(Ritz)近似解	123
9-33 具有加勁梁的拋物线拱	124
9-331 求解問題的試解式	124
9-332 屈曲条件的計算	124
9-333 加勁梁在上面(上承式)的拱	125
9-4 迭代近似法	125
9-41 平面問題的迭代处理	125
9-411 拱微元上的連續关系	126
9-412 变形弯矩与两个变位座标之 間的关系	126
9-413 变形弯矩与一个变位座标之間的	

关系	127
9-414 变形对应力的影响	129
9-42 用迭代法解平面拱的弯-扭問題	132
9-421 几何表示	132
9-422 截面力	133
9-423 弯扭曲线及弹性荷重	134
9-424 迭代步驟	136
9-425 側屈荷载与截面尺寸的关系	137
9-5 屈曲試驗	137
9-51 加貝尔(Gaber)試驗	137
9-52 赫瓦拉-科尔勃魯納(Chwalla- Kollbrunner)和科尔勃魯納 Kollbrunner試驗	138
9-6 德意志民主共和国稳定规范(TGL0-4114) 公式的实际应用	139
9-61 平面內的屈曲	139
9-611 按施图西(Stüssi)的結果进行 計算	139
9-612 按加貝尔(Gaber)的結果进行 計算	140
9-62 拱的側屈	141
第十章 板的凸屈	145
10-1 概論	145
10-2 平衡法	146
10-21 基本考察	146
10-211 平板凸屈的微分方程	146
10-212 凸屈条件	147
10-213 在横向荷载作用下的一边受 压板	148
10-22 各向同性矩形板的微分方程	149
10-221 变形状态	149
10-222 应力状态	150
10-223 分量方程	150
10-224 略去基本状态的变形	151
10-225 引入有限变位理論的应力和 变形	152
10-226 引入弹性法則	153
10-23 各向異性板的微分方程	154
10-231 按一阶理論在横向荷载作用 下的正交板的微分方程	155
10-232 凸屈正交板的微分方程	155
10-233 基本状态的应力	156
10-24 径向受压圓板的微分方程	156
10-241 一阶理論的微分方程	156
10-242 板凸屈的微分方程	157

10-25 特殊荷載情形和边界条件	157	10-532 受拉区格理論	198
10-251 在常量边缘压力作用下的各 向同性板	157	10-6 塑性范围内的凸屈	199
10-252 一边受压的正交板	159	10-61 概論	199
10-253 周边受压的圓板	160	10-62 依留辛(Iljuschin)理論	200
10-254 加劲矩形板	161	10-621 塑性屈服的試解方程	200
10-255 固定边界的矩形板	164	10-622 弹性和塑性范围的界限面	201
10-256 在常量压力作用下的封閉截面	165	10-623 开始凸屈时的截面力	201
10-257 薄壁截面的凸屈	168	10-624 弹塑性位势	203
10-258 在非线性基本应力作用下 的板	169	10-625 变分問題的欧拉方程	203
10-259 第一、二和三类的最小刚度	169	10-626 一边受压的具有自由旋轉边 界的板	204
10-3 能量法	170	10-63 近似法	205
10-31 概論	170	10-631 具有折減系数的板凸屈微分 方程	205
10-32 各向同性矩形板的試解	171	10-632 微分方程的积分	205
10-321 內力的位势	171	10-633 按屈曲应力曲线的方式折減 理想凸屈应力	206
10-322 外力的位势	172	10-7 凸屈試驗	206
10-323 能量基本方程	172	10-71 科尔勃魯納(Kollbrunner)試驗	206
10-324 变分問題的欧拉方程	172	10-72 馬桑納特(Massonnet)試驗	207
10-4 近似法	173	第十一章 壳的凸屈	215
10-41 概論	173	11-1 概論	215
10-42 李茲(Ritz)法	173	11-2 平衡法	216
10-421 线性变化的边界应力作用下 的板	174	11-21 簡化的凸屈問題	216
10-422 常剪力作用下的板	176	11-22 各向同性的圓柱壳	217
10-423 加劲板	178	11-221 变位和角变形状态	217
10-424 組合荷載	180	11-222 弹性法則	218
10-43 差分法	184	11-223 应力状态和截面力	219
10-431 差分表达式的建立	184	11-224 变形后壳体微元上的平衡 条件	220
10-432 差分方程的建立	185	11-225 微分方程的积分	222
10-433 基本状态的应力	187	11-226 凸屈条件的計算	223
10-434 簡化例題	188	11-23 靜水外压力作用下的各向同性球 壳	225
10-44 其他近似解法的概述	189	11-231 变位及角变形状态	225
10-441 逐次漸近法	189	11-232 应力状态和截面力	226
10-442 迦略金(Galerkin)法	189	11-233 平衡条件	226
10-443 积分方程法	189	11-234 微分方程的积分	227
10-444 結構靜力学法	190	11-235 凸屈条件	227
10-5 超临界范围	194	11-24 关于其他壳体的解的簡介	228
10-51 概論	194	11-241 錐壳	228
10-52 弹性范围内的非线性凸屈理論	194	11-242 負高斯曲率的壳体	228
10-521 应力函数的試解	195	11-243 变曲率的圓柱壳	229
10-522 凸屈面的微分方程	195	11-244 拋物壳	229
10-523 凸屈問題的迦略金(Galerkin) 方程	196	11-245 壳帶及加劲壳	229
10-524 簡化的应用例題	196	11-3 能量法	229
10-53 超临界范围内的应力重分布	197		
10-531 受压板的有效寬度	197		

11-31 圆柱壳的非线性变形理论	229	杆的屈曲	242
11-311 变位和角变形状态	230	例题二 实腹主梁受压翼缘的屈曲验算	255
11-312 薄膜应力	230	例题三 具有横向荷载的连续压杆	257
11-313 弹性位势	231	例题四 简单杆件体系的塑性屈曲	260
11-314 李兹(Ritz)试解	231	例题五 用不同方法确定多层框架的屈曲 长度系数 β	262
11-315 多奈耳(Donnell)方程的积 分	231	例题六 用弯矩传播法计算无侧移框架的 屈曲长度系数	279
11-316 弹性位势的推导	232	例题七 单跨多层框架的屈曲验算	280
11-317 平衡判别式	233	例题八 按二阶应力理论验算单肢框架的 承载安全度	283
11-318 方程式的数值计算	233	例题九 箱形截面的摆式框架(Pendelrahmen) 的屈曲及凸屈验算	285
11-4 理论的实际应用	234	例题十 加劲腹板的凸屈验算	290
11-41 凸屈试验及经验公式	234	例题十一 有拉杆三铰框架的跃越	295
11-411 圆柱壳	234		
11-412 球壳	236		
第十二章 褶折结构	241		
计 算 例 题			
例题一 用不同方法验算开式桁架桥上弦			

第七章 多跨受压杆件

7-1 概 论

在钢结构中常常会遇到具有横向荷载或没有横向荷载的轴心受力的连续杆件或连续梁。例如当受压与受拉腹杆以一种格子式桁架的形式相互交叉时，就成了两跨连续杆件。

开式桁架桥的弦杆可以看作多跨弹性支承的杆列。这时，在多数情况下，作下述理想的假定是适用的，即：在到达屈曲荷载之前，压杆轴线保持理想挺直；而且描述回弹力和水平挠度之间关系的支承规律是线性的。具有横向荷载的轴心受力的梁，有时会在象吊车桁架等结构中出现。

严格说来，对于同样承受压力和水平风荷载的拉线式无线电桅杆，力与缆索变形之间的关系是一个非线性的弹性法则。

由于在节点上的斜腹杆连接相互错开，支柱的或格子式桅杆的角肢受到一个在两个相互斜交方向上交变着的支撑作用。

如果说，仅受横向荷载的刚性或弹性支承的连续梁，在静力学问题上，其应力及变形状态准许用一阶理论来描述的话，那末，在以上所描述的情况中，把轴向力的共同作用加以考虑以后的状态，就可单独地用变形理论正确地表达出来。这时，稳定问题又表现为二阶理论的一般应力问题、或也是极限荷载问题的一个特殊情况。

只有弄清连续压杆的稳定问题以后，才能建立起将横向力计算在内的这种普遍理论。在这一方面可举出恩格塞 (Engesser)^[11]、齐莫曼 (Zimmermann)^[4]、密勒-勃莱斯劳 (Müller-Breslau)^[7]、勃莱希 (Bleich)^[15] 等人的奠基性的著作。赫瓦拉 (Chwalla) 和约基舒 (Jokisch)^[47] 已将古典理论中熟知的转角法推广到稳定问题上来。

消去所有的变形量，将力法一般性地推广到二阶理上去是有困难的，因为计算系数 (Vorzahlen) 和荷载项 (Belastungszahlen) 时，一般都要对整个系统的所有各跨进行考虑。如果对于刚性支承上的连续杆列可以成功地仿照一阶理论的方式列出三项弹性方程式的话，那末，在弹性可移动支承情况下古典理论中熟知的五项方程式就不能引用到变形问题上来。

将转角方程推广应用到任意支承的轴心受力和横向加载的连续杆件上去，是没有什么困难的，因为在常量轴力的假定下，对于截面力的“有限”叠加法则仍可保持。

与这一组在实际应用上具有重大意义的平衡法对比，能量法却是由弹性位势的最小原理出发的。就在系统的支承点上有很多的过渡条件这一点来说，在李兹 (Ritz) 法的含义上来估计合适的试解函数是比较困难的。F. 和 H. 勃莱希^[41] 曾指出，可以通过引入一个没有中间支承的辅助系统来简化求解。

通过舒耐尔 (Schnell) 在参考文献[67]所提出的方法，借助于矩阵计算的简化法得出了一条消去力及变形量的特殊途径。矩阵乘法可使这些量值的变换方程相当容易地在整个系统长度上建立起来。然后，根据问题的边界条件，以简明的形式导出屈曲方程式。

7-2 平 衡 法

7-21 两跨连续杆件

7-211 刚性的中间支承

设有一两跨、轴心受压的直杆(图1), 在荷载强度 $P_{ab} = \nu_{ki} \cdot N_{ab}$ 、 $P_{bc} = \nu_{ki} \cdot N_{bc}$ 作用下发生屈曲式的弯曲。首先假定材料是无限弹性的, 那末, 当弹性应变和剪切变形都略而不计时, 杆段 ab 的挠度曲线微分方程为

$$EI_{ab} \cdot v'''' + P_{ab} v'' = 0 \quad (1)$$

$$v'''' + \kappa^2 v'' = 0$$

$$\kappa^2 = \frac{P_{ab}}{EI_{ab}}, \quad \varepsilon = \kappa l.$$

由试解式 $v = C \cdot e^{\lambda z}$, 可得

$$\lambda^2 (\lambda^2 + \kappa^2) = 0$$

从而导出屈曲挠度曲线方程为

$$v = K_1 (\cos \kappa z + i \cdot \sin \kappa z) + K_2 (\cos \kappa z - i \cdot \sin \kappa z) + K_3 z + K_4$$

或者

$$v = C_1 \sin \kappa z + C_2 \cos \kappa z + C_3 z + C_4. \quad (2)$$

由于边界条件

$$v(0) = v''(0) = v(l) = 0$$

故从 $C_2 = C_4 = 0$ 得到

$$v = C_1 \left(\sin \kappa z - \frac{z}{l} \sin \kappa l \right)$$

$$v'(l) = \frac{C_1}{l} (\kappa l \cos \kappa l - \sin \kappa l)$$

$$v''(l) = -C_1 \kappa^2 \sin \kappa l.$$

如用反向的坐标系, 如图1所示, 在 b 点的连续性要求杆件 bc 段有下列关系:

$$v'(l_{bc}) = -v'(l_{ab})$$

$$\left[\frac{C_1}{l} (\varepsilon \cdot \cos \varepsilon - \sin \varepsilon) \right]_{ab} + \left[\frac{C_1}{l} (\varepsilon \cdot \cos \varepsilon - \sin \varepsilon) \right]_{bc} = 0$$

此外还要求在该处弯矩的和为零, 即

$$[EI \cdot C_1 \kappa^2 \sin \kappa l]_{ab} + [EI \cdot C_1 \kappa^2 \sin \kappa l]_{bc} = 0.$$

这两个对于系数 C_1^{ab} 及 C_1^{bc} 的线性齐次方程式, 给出屈曲条件:

$$\left[\frac{EI \cdot \varepsilon^2 \sin \varepsilon}{l(\varepsilon \cdot \cos \varepsilon - \sin \varepsilon)} \right]_{ab} + \left[\frac{EI \varepsilon^2 \cdot \sin \varepsilon}{l(\varepsilon \cdot \cos \varepsilon - \sin \varepsilon)} \right]_{bc} = 0. \quad (3)$$

只有当理想屈曲应力低于比例极限时, 这个结果对于有限弹性材料才是可用的。否则, 就必须引用一个与每一相应杆段的屈曲应力相适应的实效模量 E^e , 大致按照恩格塞-山雷 (Engesser-Shanley) 理论的精神, 通过试凑办法来求出屈曲安全度 ν_K 。因为这样的塑性模量不是事先就知道的, 所以最好通过迭代途径来达到目的 (见计算例题4)。

如果右跨不加荷载, 则可由极限值

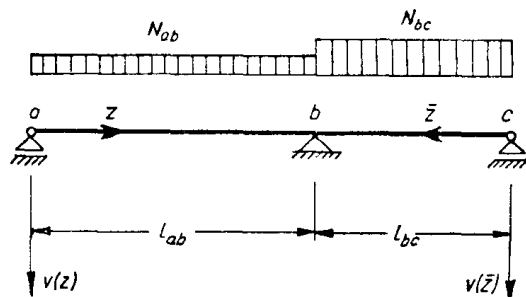


图1 两跨压杆

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\varepsilon^2 \cdot \sin \varepsilon}{\sin \varepsilon - \varepsilon \cdot \cos \varepsilon} = 3$$

得到屈曲条件

$$\kappa l_{ab} \cdot \operatorname{ctg} \kappa l_{ab} = 1 + \frac{1}{3} (\kappa l_{ab})^2 \frac{I_{ab}}{I_{bc}} \cdot \frac{l_{bc}}{l_{ab}}. \quad (4)$$

在一般情况下，屈曲挠度曲线的拐点（反弯点）并不与中间支点重合。若设想右跨杆段的刚度为无限大，则按欧拉情况Ⅲ，左跨的拐点必位于跨内；而当右跨刚度为零时，则拐点正好与支点重合。因此，在刚度特性不是特殊的情况下，弯矩零点囿于这两个极限位置之间。

7-212 弹性的中间支承

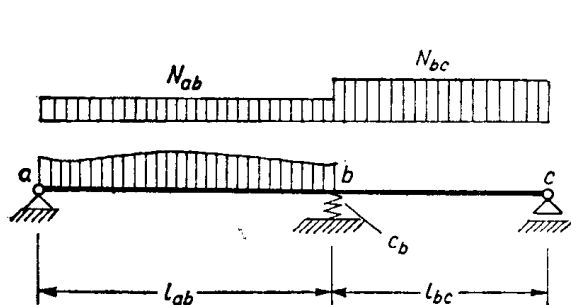


图 2 同时有横向荷载作用的连续压杆

假设与图 1 所示的系统不同：中间支承为弹性的，而梁同时又受横向荷载，如图 2 所示。因为这里出现了初弯矩，故在弹性变形范围内是一个二阶理论的应力问题。这个问题在 $q(z)=0$ 的特殊情况下转化为一个具有平衡分枝的稳定问题。

在变形法的意义上我们将通过荷载情况的迭加来寻求解答；当然，这时和一阶理论相反，轴向力必须假定为常数。在杆端作用的弯矩规定以顺时针旋转的为正，并相应地用脚标 ab 或 ba 表明（图 3）。

设横向受荷压杆的固定弯矩为 M_{ab}^0 和 M_{ba}^0 ，并令

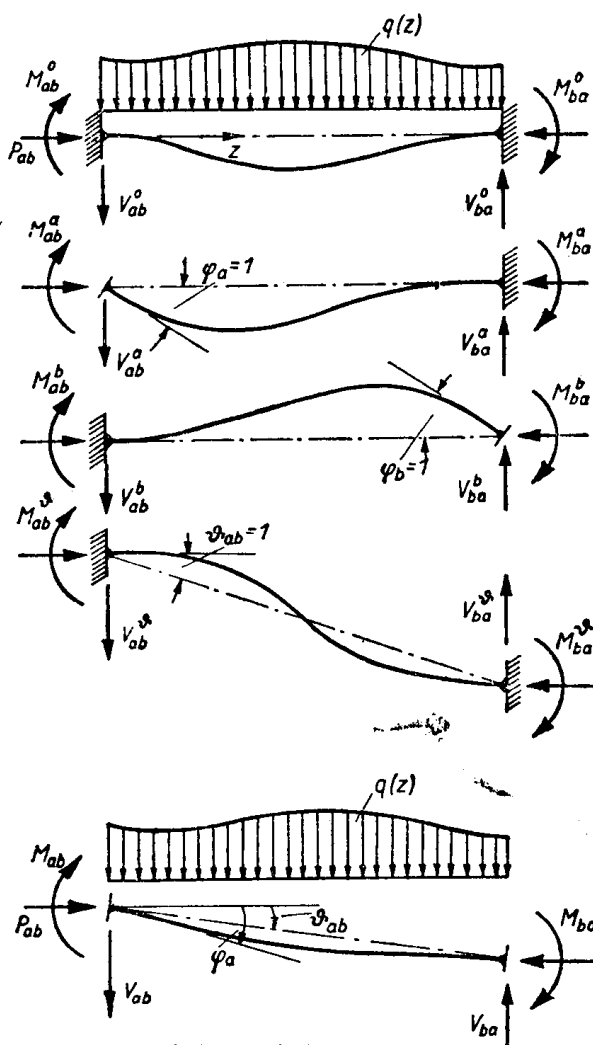


图 3 在常量轴向力作用下的迭加

$$\varepsilon = l_{ab} \sqrt{\frac{P_{ab}}{EI_{ab}}}. \quad (5)$$

当 $\varphi_b=0$ 及 $\vartheta_{ab}=0$ 时，由于转角 $\varphi_a=1$ 所出现的联接弯矩为

$$\left. \begin{aligned} M_{ab}^a &= \frac{EI_{ab}}{l_{ab}} \cdot \frac{\varepsilon \sin \varepsilon - \varepsilon^2 \cos \varepsilon}{2(1 - \cos \varepsilon) - \varepsilon \sin \varepsilon} \\ M_{ba}^a &= \frac{EI_{ab}}{l_{ab}} \cdot \frac{\varepsilon^2 - \varepsilon \cdot \sin \varepsilon}{2(1 - \cos \varepsilon) - \varepsilon \cdot \sin \varepsilon} \end{aligned} \right\} \quad (6a, b)$$

相应地, 荷载状态 $\varphi_b=1$, $\varphi_a=0$, $\vartheta_{ab}=0$ 给出

$$\left. \begin{aligned} M_{ab}^b &= M_{ba}^a \\ M_{ba}^b &= M_{ab}^a \end{aligned} \right\} \quad (7a, b)$$

对应于杆件变形 $\vartheta_{ab}=1$, $\varphi_a=0$, $\varphi_b=0$, 联接弯矩为

$$\left. \begin{aligned} M_{ab}^a &= -(M_{ab}^a + M_{ab}^b) \\ M_{ba}^a &= -(M_{ab}^a + M_{ab}^b) \end{aligned} \right\} \quad (8a, b)$$

对于常量轴向荷载, 将这些荷载情况迭加后可得杆端弯矩为:

$$\left. \begin{aligned} M_{ab} &= M_{ab}^0 + M_{ab}^a \varphi_a + M_{ab}^b \varphi_b + M_{ab}^{\vartheta} \vartheta_{ab} = 0 \\ M_{ba} &= M_{ba}^0 + M_{ba}^a \varphi_a + M_{ba}^b \varphi_b + M_{ba}^{\vartheta} \vartheta_{ab}, \end{aligned} \right\} \quad (9a, b)$$

或按规范 TGL0-4114 的写法为

$$\left. \begin{aligned} M_{ab}^a &= M_{ba}^b = A_{ab} \\ M_{ab}^b &= M_{ba}^a = B_{ab} \\ M_{ab} &= M_{ab}^0 + A_{ab} \varphi_a + B_{ab} \varphi_b - (A_{ab} + B_{ab}) \vartheta_{ab} = 0 \\ M_{ba} &= M_{ba}^0 + B_{ab} \varphi_a + A_{ab} \varphi_b - (A_{ab} + B_{ab}) \vartheta_{ab}, \end{aligned} \right\} \quad (10a, b)$$

或在消去 φ_a 后, 可得

$$\left. \begin{aligned} M_{ab} &= M_{ba}^0 + C_{ab} (\varphi_b - \vartheta_{ab}) \\ C_{ab} &= \frac{EI_{ab}}{l_{ab}} \cdot \frac{\varepsilon^2 \sin \varepsilon}{\sin \varepsilon - \varepsilon \cdot \cos \varepsilon} \end{aligned} \right\} \quad (10c, d)$$

通过同样的迭加方式, 得出跨端的垂直力为

$$\left. \begin{aligned} V_{ab} &= V_{ab}^0 + V_{ab}^a \varphi_a + V_{ab}^b \varphi_b + V_{ab}^{\vartheta} \vartheta_{ab} \\ V_{ba} &= V_{ba}^0 + V_{ba}^a \varphi_a + V_{ba}^b \varphi_b + V_{ba}^{\vartheta} \vartheta_{ab} = V_{ab} + \int_0^l q(z) dz, \end{aligned} \right\} \quad (11a, b)$$

或按规范 TGL0-4114 的记法

$$\left. \begin{aligned} V_{ab} &= V_{ab}^0 + P_{ab} \vartheta_{ab} + \frac{1}{l_{ab}} (A_{ab} + B_{ab}) (\varphi_a + \varphi_b - 2\vartheta_{ab}) \\ V_{ba} &= V_{ba}^0 + P_{ab} \vartheta_{ab} + \frac{1}{l_{ab}} (A_{ab} + B_{ab}) (\varphi_a + \varphi_b - 2\vartheta_{ab}), \end{aligned} \right\} \quad (12a, b)$$

或在消去 φ_a 之后, 因 $M_{ab}=0$, 可得

$$\left. \begin{aligned} V_{ab} &= V_{ab}^0 + P_{ab} \vartheta_{ab} + \frac{C_{ab}}{l_{ab}} (\varphi_b - \vartheta_{ab}) \\ V_{ba} &= V_{ba}^0 + P_{ab} \vartheta_{ab} + \frac{C_{ab}}{l_{ab}} (\varphi_b - \vartheta_{ab}). \end{aligned} \right\} \quad (13a, b)$$

若从弹性支承 b 的联接弯矩和垂直力的平衡条件出发, 则由

$$\left. \begin{aligned} M_{ba} + M_{bc} &= 0 \\ V_{ba} - V_{bc} - v_b \cdot c_b &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (14a, b)$$

可得

φ_b	ϑ_{ab}	
$C_{ab} + C_{bc}$	$C_{bc} \frac{l_{ab}}{l_{bc}} - C_{ab}$	$= -M_{ba}^0$
$\frac{C_{ab}}{l_{ab}} - \frac{C_{bc}}{l_{bc}}$	$P_{ab} + P_{bc} \frac{l_{ab}}{l_{bc}} - \frac{C_{ab}}{l_{ab}} - \frac{C_{bc}}{l_{bc}} \cdot \frac{l_{ab}}{l_{bc}} - c_b l_{ab}$	$= -V_{ba}^0$

(15)

这些方程可按旋转量解出，由此确定变形及应力状态。若以简化记号 c_{ij} 来记方程组中相应的各元，则可得

$$\varphi_b = \frac{V_{ba}^0 \cdot c_{12} - M_{ba}^0 \cdot c_{22}}{c_{11} \cdot c_{22} - c_{12} \cdot c_{21}} \quad (16)$$

$$\vartheta_{ab} = \frac{-V_{ba}^0 \cdot c_{11} + M_{ba}^0 \cdot c_{21}}{c_{11} \cdot c_{22} - c_{12} \cdot c_{21}} \quad (17)$$

于是，按照二阶理论的应力分析必须以 ν_F 倍的使用荷载来作计算基础。按规范 TGL 0-4114，这个安全系数 ν_F 规定为：

$$\nu_F = \begin{cases} 1.71 & \text{主要荷载情况} \\ 1.50 & \text{主要荷载+附加荷载情况} \end{cases}$$

只要承重结构任何部位的应力都不超过流限的话，所要求的安全度就得到了保证。

在稳定问题的特例情况下，方程组的系数行列式为零，屈曲条件即为

$$(C_{ab} + C_{bc}) \cdot \left(\frac{P_{ab}}{l_{ab}} + \frac{P_{bc}}{l_{bc}} - c_b \right) - C_{ab} \cdot C_{bc} \left(\frac{1}{l_{ab}} + \frac{1}{l_{bc}} \right)^2 = 0. \quad (18)$$

对于刚性中间支承的情况，即 $c \rightarrow \infty$ ，可按式 (3) 求解。

最后，再考察一个对称布置的弹性支承压杆，如图 4 所示。在这里弹簧刚度取各个不同的值。最小弹簧刚度 c_{min} 是这样表示的：即当 $c < c_{min}$ 时，杆在屈曲时弹簧将被压缩；而当 $c > c_{min}$ 时，弹簧保持静止，而杆则屈曲成为两个半波。在压力相同的情况下，由式 (18) 并考虑到 $C_{ab} = C_{bc} = C$ ， $l_{ab} = l_{bc} = l$ ，得

$$2C \left(\frac{2P}{l} - \frac{2C}{l^2} - c \right) = 0. \quad (19)$$

由于因子 $2C=0$ ，并且 $\sin \varepsilon=0$ ，得欧拉情况 II 的屈曲荷载，这相应于在整个杆件长度上形成两个半波的情况。若事先给出弹簧刚度 c ，则可得到相应于弹簧变形情况的屈曲荷载 P_{krit} ，这时括弧项必须为零。令 P_{ki} 与 P_{krit} 相等，于是可得出最小刚度值：

$$c_{min} = 2\pi^2 \frac{EI}{l^3}. \quad (20)$$

7-213 简单杆件连接

交叉的轴心受力杆件，例如可作为多腹杆和格子式桁架的腹杆来处理。为了减少屈曲危险，也可将较长的压杆与稳定的构件，例如和它交叉着的拉杆，用适当的方式连接起

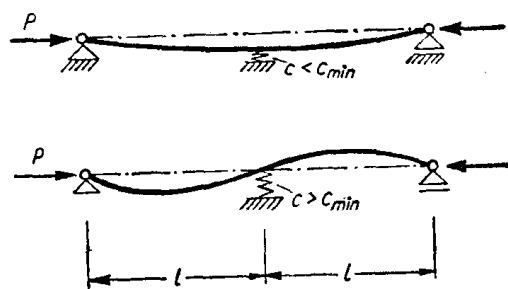


图 4 对各种不同弹簧刚度的屈曲图形

来。

在任意相互交叉的杆件的一般稳定问题中, 应从格梁理论出发, 除考虑抗弯刚度以外, 还得考虑杆件的抗扭及翘曲刚度。为了简化起见, 此时也常将节点处的弯矩及扭矩的传递略去不计。

这里我们只限于讨论在综合轴心受力下, 几根自相交叉的杆件在没有扭矩作用时的情况。将试解推广到多肢格杆虽然在形式上并无困难, 但一般已经不能建立简单的近似公式了。

设压杆在跨中与一拉杆相交(图5)。为了导出屈曲条件, 先从公式(I, 130b)着手。由此得跨中受横向荷载的压杆的挠度为:

$$v_m = \frac{K \cdot l}{2P} \left(\frac{\tan \kappa l}{\kappa l} - 1 \right), \quad \kappa^2 = \frac{P}{EI}. \quad (21)$$

当引用到拉力时, 利用记号 $\kappa^2 = -\frac{Z}{EI_z}$, 及变换式

$$\tan \sqrt{-\frac{Z}{EI_z}} l = i \cdot \Im \operatorname{un} \sqrt{\frac{Z}{EI_z}} l$$

可得相应的横向受荷拉杆(图6)的挠度公式为:

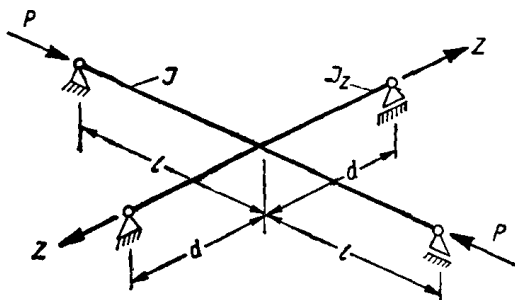


图5 交叉的压杆与拉杆

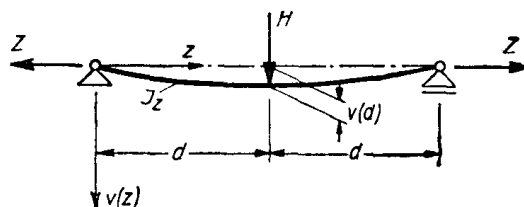


图6 横向受荷的拉杆

$$v_m = \frac{H \cdot d}{2Z} \left(1 - \frac{\Im \operatorname{an} \chi d}{\chi d} \right). \quad (22)$$

因为这两个集中荷载必须形成一个平衡力系, 故可以从 $K + H = 0$ 得到屈曲方程式为

$$\frac{\varepsilon}{\varepsilon - \tan \varepsilon} = -\frac{Z \cdot l}{P \cdot d} \cdot \frac{\zeta}{\zeta - \Im \operatorname{an} \zeta}. \quad (23)$$

其中简化记号 $\varepsilon = \kappa l$, $\zeta = \chi d$ 。

为了求得这个问题的一个显式近似解, 可按勃莱希^[19]将超越函数代之以:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\varepsilon}{\varepsilon - \tan \varepsilon} &\cong \frac{4}{3} - \frac{\pi^2}{3 \cdot \varepsilon^2}, \quad \frac{\pi}{2} < \varepsilon < \pi \\ \frac{\zeta}{\zeta - \Im \operatorname{an} \zeta} &\cong 1 + \frac{\pi^2}{3 \cdot \zeta^2}. \end{aligned} \right\} \quad (24a, b)$$

于是由(23)式得出

$$\frac{4}{3} - \frac{\pi^2}{3 \cdot \varepsilon^2} = -\frac{Z \cdot l}{P \cdot d} \left(1 + \frac{\pi^2}{3 \cdot \zeta^2} \right).$$

引入屈曲长度系数 β , 并将

$$P = \pi^2 \frac{EI}{(\beta \cdot 2l)^2}, \quad \beta = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{\varepsilon}$$

代入, 可得出应用公式

$$\beta = \sqrt{1 - \frac{1}{4} \frac{Z \cdot l}{P \cdot d} \left(3 + \frac{\pi^2}{\zeta^2} \right)}, \beta \geq 0.5. \quad (25)$$

在规范 TGL0-4114, Ri 6.42 中也有类似的式子。

如果加劲拉杆在交叉处与压杆铰接, 那末, 由于拉杆的抗弯刚度对于支撑压杆不起作用, 即 $\lambda \rightarrow \infty$, 得出

$$\beta = \sqrt{1 - 0.75 \frac{Z \cdot l}{P \cdot d}}, \beta \geq 0.5. \quad (26)$$

如果不考虑两个拉杆的抗弯连接的稳定作用, 按后一公式计算具有较高的安全储备。

对于两个长度各为 $2l$ 和 $2a$, 压力各为 P 和 P^* 的交叉压杆的情况, 由式 (21) 可得屈曲条件为:

$$\frac{\varepsilon}{\tan \varepsilon - \varepsilon} = \frac{P^* \cdot l}{P \cdot a} \left(\frac{\varepsilon^*}{\varepsilon^* - \tan \varepsilon^*} \right). \quad (27)$$

对此, 下式同样近似有效

$$\frac{\pi^2}{3 \cdot \varepsilon^2} - \frac{4}{3} = \frac{P^* \cdot l}{P \cdot a} \left(\frac{4}{3} - \frac{\pi^2}{3 \cdot \varepsilon^{*2}} \right)$$

以 $\beta = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{\varepsilon}$ 代入, 也可得

$$\beta = \sqrt{1 + \frac{P^* \cdot l}{P \cdot a} \left(1 - \frac{1}{4} \frac{\pi^2 EI^*}{P^* \cdot a^2} \right)}, \beta \geq 0.5. \quad (28)$$

如果引用一个实效模数, 这些结果也可相应地推广到塑性屈曲的范围中去。

若拉杆连续, 压杆在交叉处为铰接 (图 7), 只要不发生欧拉屈曲, 那末, 利用弹性

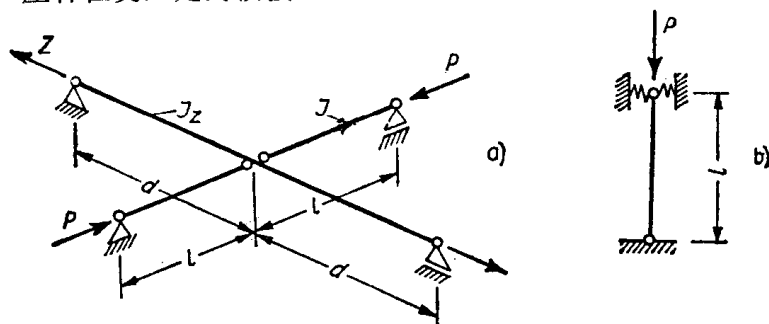


图 7 a) 具有铰接压杆的拉压; b) 部分压杆

支承部分杆段的临界荷载公式 $P = \frac{H \cdot l}{2 \cdot v_m}$, 从式 (22) 可得

$$P = \frac{Z \cdot l}{d \left(1 - \frac{\tan \zeta}{\zeta} \right)} \cong \frac{Z \cdot l}{d} \left(1 + \frac{\pi^2}{\frac{3Z}{EI_z} \cdot d^2} \right).$$

对于系统稳定所需要的拉杆抗弯刚度则为

$$EI_z \geq 3 \cdot \frac{P \cdot d^3}{\pi^2 \cdot l} \left(1 - \frac{Z \cdot l}{P \cdot d} \right) \quad (29a)$$

或按规范 TGL0-4114 中的记法:

$$P = \nu_K \cdot S, \quad Z = \nu_K \cdot S_z, \quad d = \frac{s_z}{2}, \quad l = \frac{s}{2}$$

$$EI_z \geq \frac{\nu_K \cdot S \cdot s^3}{12 \cdot s} \left(1 - \frac{S_z \cdot s}{S \cdot s_z} \right).$$

同样, 如果长度为 l 的部分压杆与长度为 $2\bar{l}$ 的连续压杆连接, 只要不发生欧拉屈曲, 利用部分杆段的临界荷载公式, 即由式 (21) 可得

$$P = \frac{K \cdot l}{2 \cdot \psi_m} = \bar{P} \cdot \frac{l}{\bar{l}} \cdot \frac{\bar{\varepsilon}}{\tan \bar{\varepsilon} - \bar{\varepsilon}} = \frac{\bar{P} l \pi^2}{3 l \bar{\varepsilon}^2} - \frac{4}{3} \bar{P} \cdot \frac{l}{\bar{l}}. \quad (30)$$

为了保证稳定, 连续压杆的抗弯刚度必须为

$$E\bar{I} \geq 3 \frac{P \cdot \bar{l}^3}{\pi^2 \cdot \bar{l}} \left(1 + \frac{4}{3} \frac{\bar{P}}{P} \cdot \frac{l}{\bar{l}} \right) \quad (30a)$$

或按规范 TGL0-4114 的记法,

$$E\bar{I} \geq \frac{\nu_K \cdot S \cdot \bar{s}^3}{12 \bar{s}} \left(1 + 1.21 \frac{\bar{S} \cdot s}{S \cdot \bar{s}} \right). \quad (30b)$$

为了求出连续杆件的屈曲长度, 将长度为 $\beta \cdot 2\bar{l}$ 的欧拉杆件的屈曲荷载代入式 (30)。

因

$$\bar{P} = \pi^2 \frac{E\bar{I}}{(\beta \cdot 2\bar{l})^2}$$

于是在两侧连接的部分杆段的临界荷载为

$$P = \frac{E\bar{I} \pi^2 \cdot l}{3 \cdot \bar{l}^3} - \frac{EI \pi^2 \cdot l}{3 \cdot \beta^2 \cdot \bar{l}^3}$$

并由此得出

$$\beta = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{3}{\pi^2} \cdot \frac{P}{E\bar{I}} \cdot \frac{\bar{l}^3}{l}}} \quad (31a)$$

或按规范 TGL0-4114, Ri 6.46 的记法:

$$\beta = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{\nu_K \cdot S \cdot \bar{s}^3}{12 E\bar{I} \cdot s}}} \quad (31b)$$

最后, 让我们再观察 K 字桁架竖杆的屈曲现象。因为一般情况竖杆的抗弯刚度是不变的, 而杆的两半轴力却不一样, 所以可按图 8 所示的系统进行研究。在 b) 情况下, 对于出桁架平面的屈曲可不考虑弹性支承作用。

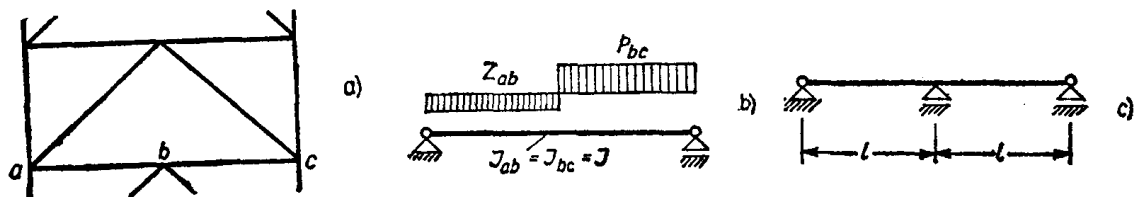


图 8 K 字桁架的竖杆屈曲

采用下列简化记号

$$\varepsilon^2 = \frac{P_{bc} l_{bc}^2}{EI}, \quad \zeta^2 = \frac{Z_{ab} l_{ab}^2}{EI}$$

$$\rho^2 = \frac{\zeta^2}{\varepsilon^2} = \frac{Z_{ab}}{P_{bc}}, \quad l_{ab} = l_{bc} = l$$

由不难导出的屈曲条件得

$$(1 - \varepsilon \cdot \operatorname{ctg} \varepsilon) + \frac{1}{\rho^2} (\rho \varepsilon \cdot \operatorname{ctg} \rho \varepsilon - 1) = \frac{4}{(1 - \rho^2)} \quad (32)$$

照勃莱希[19], 由于

$$P_{bc} = \pi^2 \frac{EI}{(\beta \cdot 2l)^2}$$

则曲屈长度系数 β 可近似地用下式表达

$$\beta = 0.75 - 0.25\rho^2 \geq 0.5. \quad (33)$$

对于在桁架平面内的屈曲, 一般可将节点看作不会移动的, 如图 8c 所示。

7-22 任意多跨的杆件

在以下几节中将对轴心受力连续杆件的屈曲问题, 以及具有弹性支承构件的横向和轴心受力梁的应力问题的一般适用的试解加以推导。

在一阶理论中, 对于在弹性可动支承上的连续梁采用力法^①, 可导出五项弹性方程式; 然而这种形式却不能推广引用到二阶理论的屈曲问题和应力问题上去。因此, 我们首先参照齐莫曼^[5]和哈特曼 (Hartmann)^[42]文献中提出的在条件方程中既包含力值, 也包含变形值的一种方法。

在变形法中最后能够消去全部力值。在由赫瓦拉 (Chwalla) 和约基舒 (Jokisch)^[47]所给出的公式中, 依靠在支承点的平衡条件即可消去杆端力矩和垂直力。

在受横向荷载的压杆情况下, 当支承是刚性时, 通过大致参照柯尔勃鲁纳-豪特 (Kollbrunner-Haueter) 的著作^[65], 并根据节点处的连续条件, 即可容易地得到一个三弯矩方程。

对于弹性可沉降的支承, 最好从转角方程式出发, 通过特定变形状态的迭加来求出结果。

7-221 力法-变形法

现在来观察一根在弹性点支承上的杆件。这根杆件各跨有时受到常量轴向压力, 有时受到常量轴向拉力 (图 9)。当杆力成比例地增加到 ν 倍时, 系统应该发生屈曲。

如果不考虑轴向延伸和剪切变形对临界荷载的影响, 并普遍引入一个实效模数 E_k^* ,

① 对于在刚性支承上的连续压杆, 屈曲方程式可按一阶理论中常用的弹性方程式的方式推导出来。如以 X_i 表示支座弯矩, 以 δ_{ik} 表示节点 i 处由于 $X_k=1$ 所产生的杆端相对转角, 则当轴力设想为常量时, 由于迭加关系, 下式有效

$$X_1 \delta_{i1} + X_2 \delta_{i2} + \cdots + X_n \delta_{in} = 0, \quad i=1 \cdots n.$$

这样, 与屈曲荷载值有关的系数可不难求出。