大学数学复习指导丛书

名校 名师 名作

线性代数复习指导

——思路、方法与技巧

陈文灯 黄先开
曹显兵 施明存 编著

清华大学出版社

大学数学复习指导丛书

线性代数复习指导

——思路、方法与技巧

陈文灯　黄先开
曹显兵　施明存　编著

清华大学出版社
北京

内 容 简 介

本书主要包括行列式、矩阵、向量、线性方程组、矩阵的特征值和特征向量、二次型等内容，在概括讲述基本理论的基础上，对各种题型进行了深入浅出的分析讲解，并对历年全国硕士研究生考试中线性代数的部分试题进行分析和解答，使读者在短期内掌握各种解题方法和技巧，做到知识的融会贯通和触类旁通。

本书适用于理工科专业本科学生扩大课堂的信息量，扎实掌握相关知识点和解题技巧，同时也是一本全面而又系统精炼的考研辅导用书。

图书在版编目(CIP)数据

线性代数复习指导：思路、方法与技巧/陈文灯等编著．－北京：清华大学出版社，
(大学数学复习指导丛书)
ISBN 7-302-06417-2

Ⅰ．线… Ⅱ．陈… Ⅲ．线性代数-研究生-入学考试-自学参考资料 Ⅳ．O151.2

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2003)第 018521 号

出 版 者：清华大学出版社(北京清华大学学研大厦，邮编 100084)
http://www.tup.com.cn
责任编辑：杜春杰
印 刷 者：北京鑫丰华彩印有限公司
发 行 者：新华书店总店北京发行所
开　　本：787×1092 1/16　**印张**：14　**字数**：320 千字
版　　次：2003 年 5 月第 1 版　2003 年 5 月第 1 次印刷
书　　号：ISBN 7-302-06417-2/O・287
印　　数：0001～8000
定　　价：18.00 元

前　言

本书是《高等数学复习指导——思路、方法、技巧》的姊妹篇。自1996年3月问世以来，深受广大读者的欢迎和支持。这次修订就是根据读者所提意见及多年来我们教学经验的积累进行的。新增加了“8种解题思维定势”,“历年研究生入学考试试题及题解”等新内容。

本书特点：

(1)对重要的概念、定理、公式进行剖析，增强了读者对这些内容的理解和记忆，避免犯概念性及错用公式、定理的错误。

(2)以题型为纲深入分析探究，总结出解题方法、技巧，使读者胸有成竹，有“法”可依，有路可“循”。

(3)用“举题型讲方法”的方式代替同类书普遍采用的“讲方法套题型”的方法，使读者做题时思路畅通、有的放矢。

(4)广泛采用表格法，使读者对要点一目了然，记忆深刻。本书是面向在读本科生的，但对于电大、夜大生以及专科生也很有参考价值，尤其对参加考研和参加专升本的考生具有“指点江山”的作用。

由于作者的水平有限，定有不当及错误之处，敬请读者和数学同仁批评指正。

作者

2003.2

目　录

第1章　行　列　式

1.1　行列式的概念

1.1.1　排列与逆序

1. n 级排列

由 n 个自然数 $1,2,\cdots,n$ 组成的一个无重复的有序数组 $i_1i_2\cdots i_n$ 称为一个 n 级排列. n 级排列共有 $n!$ 个.

2. 逆序

在一个 n 级排列中,如果一个较大数排在一个较小数之前,就称这两个数构成一个逆序.一个排列中逆序的总数,称为这个排列的逆序数,用 $\tau(i_1i_2\cdots i_n)$ 或 τ 表示排列 $i_1i_2\cdots i_n$ 的逆序数.

如果排列 $i_1i_2\cdots i_n$ 的逆序数为偶数,则称它为偶排列;如果排列的逆序数为奇数,则称它为奇排列.

3. 对换

排列 $i_1i_2\cdots i_n$ 中,交换任意两数 i_t 与 i_s 的位置,称为一次对换.对换改变排列的奇偶性.任何一个排列都可经过若干次对换变成自然顺序,并且所作对换的次数与这个排列有相同的奇偶性.

【解题提示】　任一排列 $i_1i_2\cdots i_n$ 的逆序数可计算如下:

$$\tau(i_1i_2\cdots i_n) = i_1\text{ 后边比 } i_1 \text{ 小的数的个数} + i_2 \text{ 后边比 } i_2 \text{ 小的数的个数} + \cdots + i_{n-1} \text{ 后边比 } i_{n-1} \text{ 小的数的个数}$$

【例 1.1】　求下列排列的逆序数,并确定它们的奇偶性.

(1) 5 3 2 1 4　(2) $n(n-1)\cdots 2\cdot 1$　(3) $1\ 3\ 5\cdots(2n-1)2\ 4\ 6\cdots(2n)$

【解】　(1) $\tau(5\ 3\ 2\ 1\ 4) = 4+2+1+0 = 7$ 为奇排列.

(2) $\tau(n(n-1)\cdots 2\cdot 1) = (n-1)+(n-2)+\cdots+2+1 = \dfrac{n(n-1)}{2}$

由于$\dfrac{n(n-1)}{2}$的奇偶性需根据 n 而定,故讨论如下:

当 $n=4k$ 时,$\dfrac{n(n-1)}{2} = 2k(4k-1)$ 是偶数;

当 $n=4k+1$ 时,$\dfrac{n(n-1)}{2} = 2k(4k+1)$ 是偶数;

当 $n=4k+2$ 时,$\dfrac{n(n-1)}{2} = (2k+1)(4k+1)$ 是奇数;

当 $n=4k+3$ 时,$\dfrac{n(n-1)}{2} = (2k+1)(4k+3)$ 是奇数.

综上所述,当 $n=4k$ 或 $4k+1$ 时,此排列为偶排列;当 $n=4k+2$ 或 $4k+3$ 时,此排列为奇排列,其中 k 为任意非负整数.

(3) 该排列中前 n 个数 $1,3,5,\cdots,(2n-1)$ 之间不构成逆序，后 n 个数 $2,4,6,\cdots,(2n)$ 之间也不构成逆序，只有前 n 个数与后 n 个数之间才构成逆序.

$$\tau(1\ 3\ 5\cdots(2n-1)2\ 4\ 6\cdots(2n)) = 0+1+2+\cdots+(n-1) = \frac{n(n-1)}{2}$$

奇偶性情况与(2) 完全一致.

1.1.2 n 阶行列式的定义

由 n^2 个元素 $a_{ij}(i,j=1,2,\cdots,n)$ 组成的记号

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

称为 n 阶行列式. 其值是所有取自不同行不同列的 n 个元素的乘积 $a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}$ 的代数和，各项的符号由 n 级排列 $j_1j_2\cdots j_n$ 决定. 当 $j_1j_2\cdots j_n$ 为偶排列时，对应项取正号；当 $j_1j_2\cdots j_n$ 为奇排列时，对应项取负号. 即

$$D = \sum_{j_1j_2\cdots j_n} (-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)} a_{1j_1}a_{2j_2}a_{nj_n}$$

其中，$D = \sum\limits_{j_1j_2\cdots j_n}$ 表示对所有 n 级排列求和，$\tau(j_1j_2\cdots j_n)$ 为排列 $j_1j_2\cdots j_n$ 的逆序数.

注：n 阶行列式 $D = |a_{ij}|$ 的项可以写成

$$(-1)^{\tau(i_1i_2\cdots i_n)+\tau(j_1j_2\cdots j_n)} a_{i_1j_1}a_{i_2j_2}\cdots a_{i_nj_n}$$

其中 $i_1i_2\cdots i_n$ 和 $j_1j_2\cdots j_n$ 都是 n 级排列.

【例 1.2】 填空题

(1) 在五阶行列式中，项 $a_{12}a_{31}a_{54}a_{43}a_{25}$ 的符号应取________；

(2) 四阶行列式中，带负号且包含因子 a_{23} 和 a_{31} 的项为________；

(3) 如果 n 阶行列式中负项的个数为偶数，则 $n \geqslant$ ________；

(4) 如果 n 阶行列式中等于零的元素个数大于 n^2-n，那么此行列式的值为________；

(5) 在函数

$$f(x) = \begin{vmatrix} x & x & 1 & 0 \\ 1 & x & 2 & 3 \\ 2 & 3 & x & 2 \\ 1 & 1 & 2 & x \end{vmatrix}$$

中，x^3 的系数是________.

【解】 (1) 正 (2) $a_{14}a_{23}a_{31}a_{42}$ (3) 3 (4) 0 (5) -1

【分析】 (1) 适当调整该项元素位置，使第一个下标按自然顺序排列，则第二个下标排列为 25134，其逆序数为 4，故取正号. 或由 $\tau(13542)+\tau(21435)=6$ 也知该项符号为正.

(2) 由行列式的定义可知，包含因子 a_{23} 和 a_{31} 的项必为 $a_{1i}a_{23}a_{31}a_{4j}$，其中 i,j 为 2,4 或 4,2，又此项符号为负，所以 $i31j$ 为奇排列，从而 $i=4,j=2$.

(3) n 阶行列式中，共有 $n!$ 项，其中正、负项各占一半，若负项的个数为偶数，必有 $n \geqslant 3$.

(4) n 阶行列式中,共有 n^2 个元素,若等于零的元素个数大于 $n^2 - n$,那么不等于零的元素个数就小于 n,又 n 阶行列式的每一项是 n 个不同元素的乘积,所以必定为零,从而此行列式的值也为零.

(5) 根据行列式的定义,仅当 $a_{12}a_{21}a_{33}a_{44}$ 四个元素相乘才能出现 x^3 项,这时该项排列的逆序数为 $\tau(2134) = 1, (-1)^{\tau(2134)}a_{12}a_{21}a_{33}a_{44} = -x^3$,故含 x^3 项的系数为 -1.

【例 1.3】 选择题

(1) 若 $a_{1i}a_{23}a_{35}a_{5j}a_{44}$ 是五阶行列式中带有正号的一项,则 i, j 的值为[　　].

(A) $i = 1, j = 3$　　(B) $i = 2, j = 3$

(C) $i = 1, j = 2$　　(D) $i = 2, j = 1$

(2) 下列各项中,[　　]为某五阶行列式中带有正号的项.

(A) $a_{13}a_{44}a_{32}a_{41}a_{55}$　　(B) $a_{21}a_{32}a_{41}a_{15}a_{54}$

(C) $a_{31}a_{25}a_{43}a_{14}a_{52}$　　(D) $a_{15}a_{31}a_{22}a_{44}a_{53}$

(3) 设 $D = |a_{ij}|$ 为 n 阶行列式,则第二对角线上元素的乘积 $a_{1n}a_{2n-1}\cdots a_{n1}$ 在行列式中的符号为[　　].

(A) 正　　(B) 负　　(C) $(-1)^n$　　(D) $(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}$

【解】 (1) (C)　(2) (D)　(3) (D)

【分析】 (1) 由行列式的定义知,每一项应取自不同行不同列的五个元素之积,因此 i, j 只能取 1,2, 故可立即排除(A), (B), 当 $i = 1, j = 2$ 时, $a_{11}a_{23}a_{35}a_{52}a_{44} = a_{11}a_{23}a_{35}a_{44}a_{52}$,且 $\tau(13542) = 4$ 为偶排列,故(C) 为正确答案.当 $i = 2, j = 1$ 时,此项应取负号,故不正确.

(2)(A) 中有取自同一行的元素 a_{44}, a_{41};(B) 中有取自同一列的元素,均不是行列式的项,(C),(D) 虽均为五阶行列式的一项,但(C) 应取负号,故只有(D) 正确.

(3) 因为 $\tau(n(n-1)\cdots 21) = (n-1) + (n-2) + \cdots + 2 + 1 = \dfrac{n(n-1)}{2}$

故(D) 为正确答案.

1.2 性质、定理与公式

1.2.1 行列式的基本性质

性质 1 行列式的行和列互换后,行列式的值不变.

性质 2 行列式的两行(列) 互换,行列式改变符号.

推论 如果行列式有两行(或两列) 完全相同,则行列式的值等于零.

性质 3 数乘行列式等于用这个数乘该行列式中的某一行(或列).

推论 若行列式中有一行(或列) 元素全为零,则该行列式的值为零.

性质 4 行列式中若有两行(或两列) 元素对应成比例,则该行列式的值为零.

性质 5 如果行列式的某一行(或列) 的所有元素都可表示为两项之和,则该行列式等于两个行列式的和,这两个行列式的这一行(或列) 的元素分别为对应的两个加数之一,其余各行(列) 的元素与原行列式相同,即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{i1}+b_{i1} & a_{i2}+b_{i2} & \cdots & a_{in}+b_{in} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ b_{i1} & b_{i2} & \cdots & b_{in} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

性质 6 将行列式某行(或列)的 k 倍加到另一行(或列),其值不变.

注:(1) 设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 均为 n 阶矩阵,一般地

$$|\boldsymbol{A} \pm \boldsymbol{B}| \neq |\boldsymbol{A}| \pm |\boldsymbol{B}|$$

(2) 设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 均为 n 阶矩阵,一般地,$\boldsymbol{AB} \neq \boldsymbol{BA}$,但 $|\boldsymbol{AB}| = |\boldsymbol{BA}| = |\boldsymbol{A}|\cdot|\boldsymbol{B}|$.

(3) 设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶矩阵,则 $|k\boldsymbol{A}| = k^n|\boldsymbol{A}|$,请特别注意 $|k\boldsymbol{A}| \neq k|\boldsymbol{A}|$.

(4) $|\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}| = |\boldsymbol{A}|$,特别地,若 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶反对称矩阵,即 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}} = -\boldsymbol{A}$,则当 n 为奇数时,$|\boldsymbol{A}| = 0$.

【例 1.4】 填空题

(1) 设 $\boldsymbol{A}$ 为 3×3 矩阵,$\boldsymbol{B}$ 为 4×4 矩阵,且 $|\boldsymbol{A}| = 1$, $|\boldsymbol{B}| = -2$,则 $||\boldsymbol{B}|\boldsymbol{A}| =$ ________.

(2) 设 $\boldsymbol{A}$ 为 3×3 矩阵,$|\boldsymbol{A}| = -2$,把 $\boldsymbol{A}$ 按列分块为 $\boldsymbol{A} = (\boldsymbol{A}_1,\boldsymbol{A}_2,\boldsymbol{A}_3)$,其中 $\boldsymbol{A}_j(j = 1,2,3)$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的第 j 列,则 $|\boldsymbol{A}_3 - 2\boldsymbol{A}_1, 3\boldsymbol{A}_2, \boldsymbol{A}_1| =$ ________.

(3) 设 α,β,γ 是方程 $x^3 + px + q = 0$ 的三个根,则行列式 $\begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \gamma & \alpha & \beta \\ \beta & \gamma & \alpha \end{vmatrix} =$ ________.

【解】 (1) -8 (2) 6 (3) 0

【分析】 (1) 因为 $||\boldsymbol{B}|\boldsymbol{A}| = |\boldsymbol{B}|^3|\boldsymbol{A}| = (-2)^3\cdot1 = -8$,注意 $||\boldsymbol{B}|\boldsymbol{A}| = |\boldsymbol{B}||\boldsymbol{A}| = (-2)\cdot1 = -2$ 是错误的.

(2) 此题需要综合应用行列式的性质.

$|\boldsymbol{A}_3 - 2\boldsymbol{A}_1, 3\boldsymbol{A}_2, \boldsymbol{A}_1| = |\boldsymbol{A}_3, 3\boldsymbol{A}_2, \boldsymbol{A}_1| + |-2\boldsymbol{A}_1, 3\boldsymbol{A}_2, \boldsymbol{A}_1|$,对于 $|-2\boldsymbol{A}_1, 3\boldsymbol{A}_2, \boldsymbol{A}_1|$,第一列和最后一列对应元素成比例,故其值为零,而

$$|\boldsymbol{A}_3, 3\boldsymbol{A}_2, \boldsymbol{A}_1| = -|\boldsymbol{A}_1, 3\boldsymbol{A}_2, \boldsymbol{A}_3| = -3|\boldsymbol{A}_1, \boldsymbol{A}_2, \boldsymbol{A}_3| = -3|\boldsymbol{A}| = 6$$

(3) 由根与系数的关系知 $\alpha + \beta + \gamma = 0$,于是

$$\begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \gamma & \alpha & \beta \\ \beta & \gamma & \alpha \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \alpha+\beta+\gamma & \beta & \gamma \\ \alpha+\beta+\gamma & \alpha & \beta \\ \alpha+\beta+\gamma & \gamma & \alpha \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & \beta & \gamma \\ 0 & \alpha & \beta \\ 0 & \gamma & \alpha \end{vmatrix} = 0.$$

【例 1.5】 选择题

(1) 设四阶矩阵 $\boldsymbol{A} = [\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\gamma}_2, \boldsymbol{\gamma}_3, \boldsymbol{\gamma}_4]$,$\boldsymbol{B} = [\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\gamma}_2, \boldsymbol{\gamma}_3, \boldsymbol{\gamma}_4]$,其中 $\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\gamma}_2, \boldsymbol{\gamma}_3, \boldsymbol{\gamma}_4$ 均为 4 维列向量,且已知行列式 $|\boldsymbol{A}| = 4$, $|\boldsymbol{B}| = 1$,则行列式 $|\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B}| =$ [ ].

(A) 5 (B) 4 (C) 50 (D) 40

(2) 设 $\boldsymbol{A}$ 为四阶矩阵,且 $|\boldsymbol{A}| = 2$,把 $\boldsymbol{A}$ 按列分块为 $\boldsymbol{A} = [\boldsymbol{A}_1, \boldsymbol{A}_2, \boldsymbol{A}_3, \boldsymbol{A}_4]$,其中 $\boldsymbol{A}_j(j = 1,2,3,4)$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的第 j 列,则 $|-\boldsymbol{A}_2, -\boldsymbol{A}_1, -\boldsymbol{A}_4, -\boldsymbol{A}_3| =$ [ ].

(A) -2 (B)2 (C)1 (D)0

(3) 设$|A|$是三阶矩阵A的行列式,A中3个列向量以A_1,A_2,A_3表示,即$|A|=|A_1,A_2,A_3|$,则$|A|$等于[　　].

(A) $|A_3,A_2,A_1|$　　(B) $|-A_1,-A_2,-A_3|$

(C) $|A_1+A_2,A_2+A_3,A_3+A_1|$　　(D) $|A_1,A_1+A_2,A_1+A_2+A_3|$

(4) 设A是三阶方阵且$|A|=2$,则$|-|A|A|=$[　　].

(A) 4　　(B) -4　　(C) 16　　(D) -16

(5) A是n阶矩阵,k是非零常数,则$|(kA)^*|=$[　　].

(A) $k|A|^{n-1}$　　(B) $|k||A|^{n-1}$

(C) $k^{n(n-1)}|A|^{n-1}$　　(D) $k^{n-1}|A|^{n-1}$

(6) 行列式$\begin{vmatrix}103 & 100 & 204\\ 199 & 200 & 395\\ 301 & 300 & 600\end{vmatrix}=$[　　].

(A) 1000　　(B) -1000　　(C) 2000　　(D) -2000

【解】 (1) (D)　(2) (B)　(3) (D)　(4) (D)　(5) (C)　(6) (C)

【分析】 (1) 这里首先应区分矩阵相加是对应元素相加,而行列式相加(或拆分),只有一行(列)不同,其余各行(列)都是相同时才能相加(或拆分).另外应注意$|A+B|\neq|A|+|B|$,正确计算如下:

$$|A+B|=|\alpha+\beta,2\gamma_2,2\gamma_3,2\gamma_4|=8|\alpha+\beta,\gamma_2,\gamma_3,\gamma_4|$$
$$=8[|\alpha,\gamma_2,\gamma_3,\gamma_4|+|\beta,\gamma_2,\gamma_3,\gamma_4|]=8[4+1]=40$$

故选(D).

(2) 利用行列式的性质有

$$\begin{aligned}|-A_2,-A_1,-A_4,-A_3|&=(-1)^4|A_2,A_1,A_4,A_3|\\&=|A_2,A_1,A_4,A_3|=-|A_1,A_2,A_4,A_3|\\&=|A_1,A_2,A_3,A_4|=|A|=2\end{aligned}$$

故(B)为正确答案.

(3) 同(1),(2)题类似,有

$|A_3,A_2,A_1|=-|A_1,A_2,A_3|=-|A|$;

$|-A_1,-A_2,-A_3|=(-1)^3|A_1,A_2,A_3|=-|A|$;

$$\begin{aligned}|A_1+A_2,A_2+A_3,A_3+A_1|&=|2(A_1+A_2+A_3),A_2+A_3,A_3+A_1|\\&=2|A_1+A_2+A_3,-A_1,-A_2|\\&=2[|A_1,-A_1,-A_2|+|A_2+A_3,-A_1,-A_2|]\\&=2[|A_2,-A_1,-A_2|+|A_3,-A_1,-A_2|]\\&=2|A_3,-A_1,-A_2|\\&=2|A_3,A_1,A_2|=2|A_1,A_2,A_3|\\&=2|A|\end{aligned}$$

这里先把后两列加到第一列;提取公因子之后,又把第一列的(-1)倍加到第二、三列;最后利用行列式的加法性质.

$$|A_1,A_1+A_2,A_1+A_2+A_3|=|A_1,A_1+A_2,A_1+A_2|+|A_1,A_1+A_2,A_3|$$

$$\begin{aligned}&= |A_1,A_1+A_2,A_3|\\&= |A_1,A_1,A_3|+|A_1,A_2,A_3|\\&= |A_1,A_2,A_3| = |A|\end{aligned}$$

故(D)为正确答案.

(4) $\big| -|A|A \big| = |-2A| = (-2)^3|A| = -8\times 2 = -16$

(5) $(kA)^* = k^{n-1}A^*$, $|(kA)^*| = |k^{n-1}A^*| = (k^{n-1})^n|A^*| = k^{n(n-1)}|A|^{n-1}$

(6) 把第二列的(-1)倍加到第一列,(-2)倍加到第三列得

$$\begin{vmatrix}103 & 100 & 204\\199 & 200 & 395\\301 & 300 & 600\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}3 & 100 & 4\\-1 & 200 & -5\\1 & 300 & 0\end{vmatrix} = 100\begin{vmatrix}3 & 1 & 4\\-1 & 2 & -5\\1 & 3 & 0\end{vmatrix} = 2000$$

【例 1.6】 选择题

(1) 设 A,B 是 $n(n\geqslant 2)$ 阶方阵,则必有[ ].

(A) $|A+B| = |A|+|B|$　　(B) $|AB| = |BA|$

(C) $\big||A|B\big| = \big||B|A\big|$　　(D) $|A-B| = |B-A|$

(2) 设 A 为 n 阶方阵,则 $|A| = 0$ 的必要条件是[ ].

(A) 两行(列)元素对应成比例　　(B) 必有一行为其余行的线性组合

(C) A 中有一行元素全为零　　(D) 任一行为其余行的线性组合

【解】 (1) (B)　(2) (B)

【分析】 (1) 一般地 $|A+B| \neq |A|+|B|$; $|A-B| = |-(B-A)| = (-1)^n|B-A|$; $\big||A|B\big| = |A|^n|B|$, $\big||B|A\big| = |B|^n|A|$, 故 $\big||A|B\big| \neq \big||B|A\big|$;只有 $|AB| = |A||B| = |B||A| = |BA|$ 正确.

(2)(A),(C),(D) 均为 $|A| = 0$ 的充分条件,而非必要条件,故选(B).

1.2.2 行列式按行(列)展开定理

设 $D = |a_{ij}|$ 为 n 阶行列式,则有

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}A_{kj} = a_{i1}A_{k1} + a_{i2}A_{k2} + \cdots + a_{in}A_{kn} = \begin{cases}D, & i = k\\0, & i\neq k\end{cases}\quad (i = 1,2,\cdots,n)$$

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ij}A_{ik} = a_{1j}A_{1k} + a_{2j}A_{2k} + \cdots + a_{nj}A_{nk} = \begin{cases}D, & j = k\\0, & j\neq k\end{cases}\quad (j = 1,2,\cdots,n)$$

其中 A_{ij} 为元素 a_{ij} 的代数余子式.

k 阶子式:n 阶行列式中,任取 k 行 k 列,这 k 行 k 列交点处元素按原来的顺序位置组成的 k 阶行列式称为原 n 阶行列式的 k 阶子式,记为 M_s.

k 阶子式的代数余子式:划去 k 阶子式所在的 k 行 k 列元素,剩下的元素按原来的顺序位置组成的 $n-k$ 阶行列式称为 k 阶子式的余子式,记为 N_s,若 k 阶子式所在行的序数是 $i_1i_2\cdots i_k$,列的序数是 $j_1j_2\cdots j_k$,则称

$$A_s = (-1)^{i_1+i_2+\cdots+i_k+j_1+j_2+\cdots+j_k}N_s$$

为 M_s 的代数余子式.

行列式按 k 行(列)展开(又称拉普拉斯展开):

在行列式 D 中,任意取定 k 行或 k 列$(1\leqslant k\leqslant n-1)$,则这 k 行或 k 列中所有的 k 阶

子式(共有 $C_n^k = t$ 个,记为 $M_1, M_2, \cdots, M_t$)分别与它们对应的代数余子式乘积之和等于该行列式,即

$$D = \sum_{s=1}^{t} M_s A_s = M_1 A_1 + M_2 A_2 + \cdots + M_t A_t$$

注:(1) 记 $\boldsymbol{A} = (a_{ai})$ 为 $n \times n$ 矩阵,$\boldsymbol{A}^*$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵,则有

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^* = \boldsymbol{A}^*\boldsymbol{A} = |\boldsymbol{A}|\boldsymbol{E}$$

此公式对于涉及到伴随矩阵 $\boldsymbol{A}^*$ 的计算或证明题非常有用,应当牢记.

(2) 设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶可逆矩阵,则

$$|\boldsymbol{A}^{-1}| = \frac{1}{|\boldsymbol{A}|} = |\boldsymbol{A}|^{-1}$$

(3) 设 $\boldsymbol{A}^*$ 是 n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵,则

$$|\boldsymbol{A}^*| = |\boldsymbol{A}|^{n-1} \quad (n \geqslant 2)$$

(4) 设 $\boldsymbol{A}$ 为 m 阶方阵,$\boldsymbol{B}$ 为 n 阶方阵,则

$$\begin{vmatrix} \boldsymbol{A} & * \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{B} \end{vmatrix} = |\boldsymbol{A}||\boldsymbol{B}|, \quad \begin{vmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{0} \\ * & \boldsymbol{B} \end{vmatrix} = |\boldsymbol{A}||\boldsymbol{B}|$$

但应注意

$$\begin{vmatrix} \boldsymbol{0} & \boldsymbol{A} \\ \boldsymbol{B} & \boldsymbol{0} \end{vmatrix} = (-1)^{mn}|\boldsymbol{A}||\boldsymbol{B}|$$

1.2.3 克莱姆(Cramer)法则

方程
$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

称为 n 元非齐次线性方程组,当其系数行列式

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \neq 0$$

时,此方程组有惟一解,且可表示为

$$x_1 = \frac{D_1}{D}, x_2 = \frac{D_2}{D}, \cdots, x_n = \frac{D_n}{D}$$

其中 $D_j (j = 1, 2, \cdots, n)$ 是将行列式 D 中第 j 列元素换成常数 $b_1, b_2, \cdots, b_n$,其余元素不变而得到的行列式的值.

当 $b_1 = b_2 = \cdots = b_n = 0$ 时,对应方程组称为 n 元齐次线性方程组.

注:(1) 克莱姆法则只适用于方程的个数与未知量的个数相等的线性方程组.

(2) n 元非齐次线性方程组,当系数行列式 $D \neq 0$ 时有惟一解,当系数行列式 $D = 0$ 时,克莱姆法则失效,方程组可能有解也可能无解.

(3) n 元齐次线性方程组,当系数行列式 $D \neq 0$ 时,有惟一零解;当系数行列式 $D = 0$ 时,齐次线性方程组有非零解(无穷多解).

【例 1.7】 设 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1 & 1 & 1 & \cdots & 1\\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n\\ a_1^2 & a_2^2 & a_3^2 & \cdots & a_n^2\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\ a_1^{n-1} & a_2^{n-1} & a_3^{n-1} & \cdots & a_n^{n-1}\end{bmatrix}$, $\boldsymbol{X}=\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\\ \vdots\\ x_n\end{bmatrix}$, $\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}1\\ 1\\ 1\\ \vdots\\ 1\end{bmatrix}$

其中 $a_i \neq a_j (i = j;\ i,j = 1,2,\cdots,n)$.
则线性方程组 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{X} = \boldsymbol{B}$ 的解是________.

【解】 因为 $|\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}| \neq 0$

所以 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{X} = \boldsymbol{B}$ 有惟一解 $x_j = \dfrac{D_j}{D}(j = 1,2,\cdots,n)$

显然 $D_1 = |\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}| = D, D_2 = \cdots = D_n = 0$

所以有解为 $(1,0,\cdots,0)^{\mathrm{T}}$.

【例 1.8】 选择题

(1) 设线性方程组 $\begin{cases} bx - ay = -2ad \\ -2cy + 3bz = bc \\ cx + az = 0 \end{cases}$, 则[　　].

(A) 当 a,b,c 取任意实数时,方程组均有解　　(B) 当 $a = 0$ 时,方程组无解

(C) 当 $b = 0$ 时,方程组无解　　(D) 当 $c = 0$ 时,方程组无解

(2) 对于非齐次线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

以下结论中,[　　]不正确.

(A) 若方程组有解,则系数行列式 $D \neq 0$

(B) 若方程组无解,则 $D = 0$

(C) 若方程组有解,或者有惟一解,或者有无穷多解

(D) $D \neq 0$ 是方程组有惟一解的充分必要条件

【解】 (1) (A)　(2) (A)

【分析】

(1) 方程组的系数行列式 $D = \begin{vmatrix} b & -a & 0 \\ 0 & -2c & 3b \\ c & 0 & a \end{vmatrix} = -5abc$

当 $abc \neq 0$ 时,方程组有惟一解;当 $a = 0$ 或 $b = 0$ 或 $c = 0$ 时,代入方程后,易知方程组均有无穷多解,故(A) 正确.

(2) 比如方程组 $\begin{cases} x_1 + x_2 = 1 \\ 2x_1 + 2x_2 = 2 \end{cases}$

的系数行列式为零,此方程组显然有解,故(A) 是错的,应选(A). 易证明(B),(C),(D) 都是正确的.

1.3 行列式的计算

1.3.1 几种特殊行列式的计算

(1) $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$

(2) $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & 0 & \cdots & 0 \end{vmatrix} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} a_{1n}a_{2n-1}\cdots a_{n1}$

1.3.2 行列式的计算方法

(1) 直接利用行列式的定义进行计算.

(2) 利用行列式的性质化为三角形行列式计算法,包括上、下三角形行列式.

(3) 降阶法:利用按行(列)展开定理,化行列式为较低阶行列式的计算.

(4) 递推公式法:应用行列式的性质,把一个 n 阶行列式表示为具有相同结构的较低阶行列式的线性关系式,再根据此关系式递推求得所给 n 阶行列式的值.

(5) 用数学归纳法进行计算或证明.

(6) 利用已知行列式进行计算,其中最重要的已知行列式是范德蒙行列式.

$$D_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & \cdots & x_n^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{1\leqslant j<i\leqslant n}(x_i - x_j)$$

以上方法中,前三种是最基本的算法,应熟练掌握.需要指出的是,一个行列式的计算方法往往不是惟一的,有时甚至需多种方法交叉使用.

【解题提示】 由于行列式的计算方法很多,但具体到一个题目用什么方法去求解往往不是一件容易决定的事情.我们不从方法的角度去进行分析,而是从所求行列式的特征去进行归纳,掌握了行列式的特征,也就自然找到了求解方法.

特征 1 非零元素特别少(一般不多于 $2n$ 个),可以直接利用行列式的定义求解.

【例 1.9】 计算下列行列式

(1) $\begin{vmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 2 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1997 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1998 \end{vmatrix}$ (2) $\begin{vmatrix} a & b & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & a & b & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a & b \\ b & 0 & 0 & \cdots & 0 & a \end{vmatrix}$

【解】 (1) 此行列式刚好只有 n 个非零元素 $a_{1\,n-1}, a_{2\,n-2}, \cdots, a_{n-1\,1}, a_{n\,n}$,故非零项只有一项:$a_{1\,n-1}a_{2\,n-2}\cdots a_{n-1\,1}a_{n\,n}$,又 $\tau((n-1)(n-2)\cdots 1n) = \dfrac{(n-1)(n-2)}{2}$,因此

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 2 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1997 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1998 \end{vmatrix} = (-1)^{\frac{(n-1)(n-2)}{2}} 1 \cdot 2 \cdots 1997 \cdot 1998 = (-1)^{\frac{(n-1)(n-2)}{2}} 1998!$$

(2) 由行列式的定义可知,此行列式的非零项只有两项,即 $a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$ 和 $a_{12}a_{23}\cdots a_{n-1\,n}a_{n1}$,故

$$\begin{vmatrix} a & b & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & a & b & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a & b \\ b & 0 & 0 & \cdots & 0 & a \end{vmatrix} = (-1)^{\tau(12\cdots n)} a \cdot a \cdots a + (-1)^{\tau(23\cdots n1)} b \cdot b \cdots b$$

$$= a^n + (-1)^{n-1} b^n$$

特征 2 对于所有行(或列)对应元素相加后相等的行列式,可把第 2 至 n 行(或列)加到第一行(或第一列),提取公因子后再化简计算.

【例 1.10】 计算 n 阶行列式

$$D_n = \begin{vmatrix} a & b & b & \cdots & b \\ b & a & b & \cdots & b \\ b & b & a & \cdots & b \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ b & b & b & \cdots & a \end{vmatrix}$$

【分析】 所有行对应元素相加后都等于 $a+(n-1)b$,所有列对应元素相加后也都等于 $a+(n-1)b$,符合特征 2.

【解】 将第 2 列至第 n 列加到第一列,然后提出公因子 $a+(n-1)b$,则

$$D_n = \begin{vmatrix} a+(n-1)b & b & b & \cdots & b \\ a+(n-1)b & a & b & \cdots & b \\ a+(n-1)b & b & a & \cdots & b \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a+(n-1)b & b & b & \cdots & a \end{vmatrix} = [a+(n-1)b] \begin{vmatrix} 1 & b & b & \cdots & b \\ 1 & a & b & \cdots & b \\ 1 & b & a & \cdots & b \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & b & b & \cdots & a \end{vmatrix}$$

再将第一行的 (-1) 倍加到下面各行,得

$$D_n = [a+(n-1)b] \begin{vmatrix} 1 & b & b & \cdots & b \\ 0 & a-b & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & a-b & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a-b \end{vmatrix} = [a+(n-1)b](a-b)^{n-1}$$

类似地,常见的计算题,如

(1) $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 2 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & 2 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 2 \end{vmatrix}$ (2) $\begin{vmatrix} C & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & C & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & C & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & C \end{vmatrix}$

(3) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n-1 & n \\ 2 & 3 & 4 & \cdots & n & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ n-1 & n & 1 & \cdots & n-3 & n-2 \\ n & 1 & 2 & \cdots & n-2 & n-1 \end{vmatrix}$

等,均可用上述方法计算.

特征3 第一行、第一列及对角线元素除外,其余元素全为零的行列式.

典型形式及计算方法见例1.11.

【例1.11】 计算 $n+1$ 阶行列式

$$D_{n+1} = \begin{vmatrix} a_0 & b_1 & b_2 & \cdots & b_{n-1} & b_n \\ c_1 & a_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ c_2 & 0 & a_2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ c_n & 0 & 0 & \cdots & 0 & a_n \end{vmatrix} \quad (a_i \neq 0, i = 1,2,\cdots,n)$$

【解】 把所有第 $i+1(i=1,2,\cdots,n)$ 列的 $-\frac{c_i}{a_i}$ 倍加到第一列,得

$$D_{n+1} = \begin{vmatrix} a_0 - \sum_{i=1}^{n} \frac{b_i c_i}{a_i} & b_1 & b_2 & \cdots & b_{n-1} & b_n \\ 0 & a_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & a_n \end{vmatrix} = a_1 a_2 \cdots a_n \left(a_0 - \sum_{i=1}^{n} \frac{b_i c_i}{a_i}\right)$$

常见的计算题,如 $\begin{vmatrix} a_0 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & a_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & a_2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & a_n \end{vmatrix}$ 即是上述特例.

另外 $\begin{vmatrix} 1+a_1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 1+a_2 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1+a_3 & \cdots & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1+a_n \end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix} a_1 & x & x & \cdots & x & x \\ x & a_2 & x & \cdots & x & x \\ x & x & a_3 & \cdots & x & x \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x & x & x & \cdots & x & a_n \end{vmatrix}$