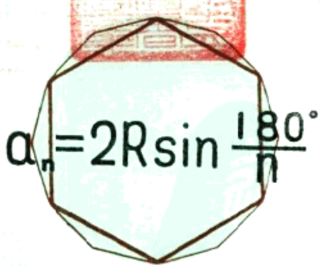
全日制十年制学校初中课本

数学

SHUXUE

第五册



人民教育出版社

全日制十年制学校初中课本
（试用本）
数　学
第五册
中小学通用教材数学编写组编
*
人民教育出版社出版
北京出版社重印
北京市新华书店发行
北京新华印刷厂印刷
*
1979年3月第1版　　1979年6月第1次印刷
书号 K7012·0112　　定价 0.36元

目　　录

第一章　直角坐标系

1.1　平面直角坐标系

我们知道，在直线上规定了原点、正方向和长度单位，就构成了数轴．在数轴上，每一个点的位置都能用一个实数来表示．那么，用什么方法表示平面内点的位置呢？

要在一块矩形板上钻一个孔，只要给出孔的中心到板的左缘的距离 30 毫米和到下缘的距离 20 毫米（图 1-1），孔心M的位置就确定了．可见，用两个实数就可以表示平面内点的位置．

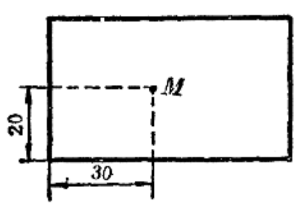


图　1-1

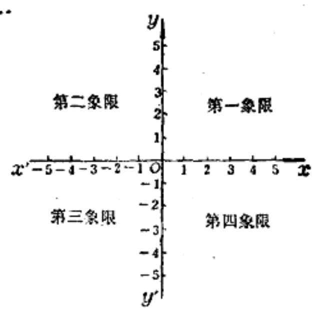


图　1-2

在平面内画两条互相垂直而且交于它们的原点O的数轴$x'x$和$y'y$（图 1-2）．$x'x$通常画成水平的，叫做 **x 轴或横轴**，取向右的方向为正方向；$y'y$画成铅直

的，叫做 y **轴**或**纵轴**，取向上的方向为正方向．两条数轴上的长度单位一般取相同的．x 轴和 y 轴统称**坐标轴**，它们的交点 O 叫做**坐标原点**．这样，在平面内有公共原点而且互相垂直的两条数轴，就构成了**平面直角坐标系**．建立了坐标系的平面，称为**坐标平面**．

x 轴和 y 轴把坐标平面分成 xOy、yOx'、$x'Oy'$ 和 $y'Ox$ 四个部分，依次叫做第一象限、第二象限、第三象限和第四象限．

在平面内建立了直角坐标系以后，对于平面内的任意一点，都有一对有序实数和它对应．例如，对于点 M（图 1-3），过 M 作 y 轴的平行线，交 x 轴于 M_1；再过 M 作 x 轴的平行线，交 y 轴于 M_2．在 x 轴上对应点 M_1 的数是 3，在 y 轴上对应点 M_2 的数是 2．这样，点 M 就有 3 和 2 这对实数和它对应．我们把和点 M 对应的有序实数对，称为点 M 的**坐标**，记作 $M(3, 2)$．其中第一个数（如 3）叫做点 M 的**横坐标**，第二个数（如 2）叫做点 M 的**纵坐标**．横坐标写在纵坐标的前面，中间用逗号隔开．同样，点 N 的坐标是 $(2, 3)$．从这里我们看到，M 与 N 是坐标平面内不同的两个点，和它们对应的 $(3, 2)$ 与 $(2, 3)$ 是两对不同的有序实数．

想一想，图 1-3 中点 P 和点 Q 的坐标各是什么？

反过来，对于任意一对有序实数，在坐标平面内就有一个确定的点和它对应．例如，对有序实数对

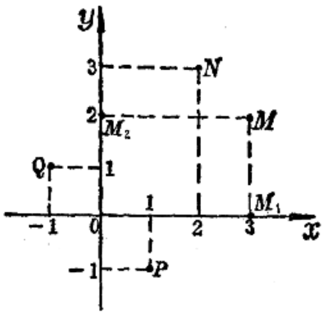


图 1-3

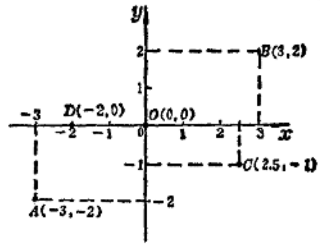


图 1-4

$(-3, -2)$，我们就可以过 x 轴上对应 -3 的点作 y 轴的平行线，过 y 轴上对应 -2 的点作 x 轴的平行线，这两条线的交点 A 就是和有序实数对$(-3, -2)$对应的点(图1-4). 同样，和有序实数对$(3, 2)$、$(2.5, -1)$、$(-2, 0)$、$(0, 0)$对应的点分别是 B、C、D、O.

从上面我们看到：对于坐标平面内任意一点M，都有一对有序实数(x, y)和它对应；反过来，对于任意一对有序实数(x, y)，在坐标平面内就有一点M和它对应. 这样，我们就建立了坐标平面内所有的点与所有有序实数对之间的一一对应关系.

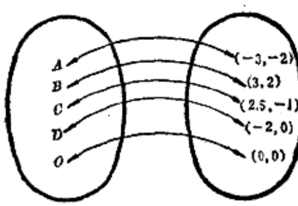
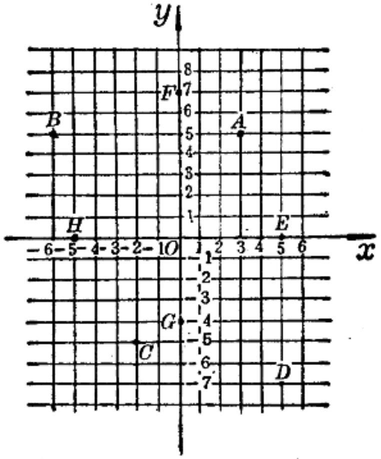


图 1-5

图 1-4 中的五个点和五个实数对之间的一一对应关系可以用图 1-5 来表示.

练 习

1. 写出图中 A、B、C、D、E、F、G、H、O 各点的坐标



(第 1 题)

2. 在直角坐标系中作出下列各点:

$A(3,6)$, $B(-1.5,3.5)$, $C(-4,-1)$, $D(2,-3)$,

$E(3,0)$, $F(-2,0)$, $G(0,5)$, $H(0,-4)$.

3. (口答)在 x 轴上,点的坐标有什么特点? 在 y 轴上呢?

例 1 正方形 $ABCD$ 的边长等于 4, 建立如图 1-6 所示的直角坐标系, 求四个顶点的坐标.

解: 四个顶点的坐标为:

$A(0,0)$, $B(4,0)$, $C(4,4)$, $D(0,4)$.

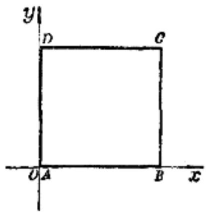


图 1-6

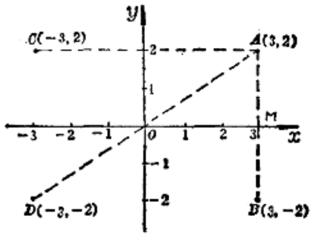


图 1-7

例 2 已知点A的坐标是(3, 2), 分别求出点A关于x轴、y轴和原点对称的点的坐标.

解: 过点A作AM垂直于x轴, 延长AM到点B, 使线段$BM=MA$(图 1-7), 点B就是点A关于x轴的对称点. 点B的坐标是(3, −2).

同样可以求出点A关于y轴的对称点C的坐标是(−3, 2).

连结AO, 延长AO到D, 使线段$DO=OA$, 点D就是点A关于原点的对称点. 点D的坐标是(−3, −2).

练 习

1. 写出例 1 中正方形的各边中点的坐标.
2. 正方形的边长等于 4, 对角线的交点在原点, 边与坐标轴平行, 求它的各顶点的坐标.
3. 已知点P的坐标是(5, −3), 分别写出点P关于x轴、y轴和原点对称的点的坐标.
4. (口答)关于x轴对称的两个点的坐标有什么关系? 关于y轴呢? 关于原点呢?

5. 以点(3,0)为圆心，以5为半径作一圆，写出圆与坐标轴交点的坐标。

1.2 两点间的距离

在坐标平面内，我们用点的坐标表示点的位置．现在来研究怎样用两点的坐标来计算这两点间的距离．

1. 同一数轴上两点间的距离

我们知道，数轴是一条有方向的直线．在数轴上的一条线段也有两个相反的方向．例如，在 x 轴上的线段 AB(图 1-8)，从点 A 到点 B 是一个方向；反过来，从点 B 到点 A 又是一个方向．和数轴方向一致的方向是正方向，相反的方向是负方向．规定了方向的线段叫**有向线段**．

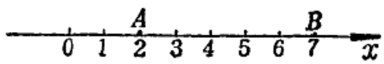


图 1-8

一条有向线段的长度，连同表示它的方向的正负号，叫做这条有向线段的**数量**．如图 1-8，有向线段 AB 的数量是 $+5$，记作 $AB=+5$(或 $\overline{AB}=+5$)；有向线段 BA 的数量是 -5，记作 $BA=-5$(或 $\overline{BA}=-5$)．

下面我们来研究，怎样用 A、B 两点的坐标来表示有向线段 AB 的数量．

在图 1-8 中，有向线段 AB 的数量是 $AB=+5$．它的起点 A 的坐标是 $x_A=+2$，终点 B 的坐标是 $x_B=+7$，而 $x_B-x_A=(+7)-(+2)=+5$．两相比较，有

$$AB = x_B - x_A.$$

通过下面的练习第 1 题，可以验证，不管A、B两点在数轴上什么位置，上面的关系式都是对的．就是说，

在数轴上一条有向线段的数量等于终点的坐标减去起点的坐标.

我们要计算数轴上 A、B 两点间的距离，只要在求出 AB 或 BA 的数量后，再取绝对值就可以了．因此，A、B 两点间的距离（或线段 AB 的长度）是

$$|AB| = |x_B - x_A| \quad 或 \quad |BA| = |x_A - x_B|.$$

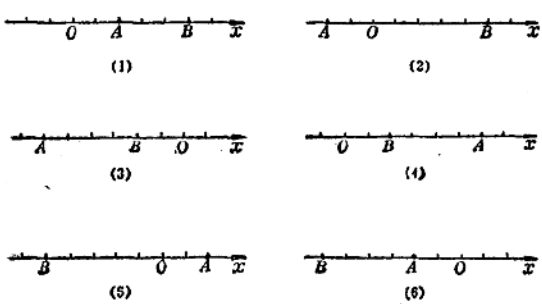
很明显，图 1-8 中 A、B 两点间的距离是

$$|AB| = |x_B - x_A| = |7-2| = 5,$$

$$或 \quad |BA| = |x_A - x_B| = |2-7| = |-5| = 5.$$

练　习

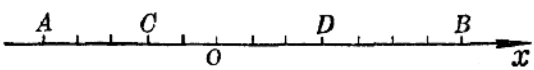
1. 就(1)到(6)各图（数轴上每一格等于一个长度单位），对有向线段 AB 填写下表：



(第 1 题)

图　号	AB	x_A	x_B	x_B-x_A
(1)				
(2)				
(3)				
(4)				
(5)	-7	$+2$	-5	-7
(6)				

2. 如图的数轴上，每一格等于一个长度单位，写出有向线段 AB、BC、CD、CA 的数量和长度.



(第 2 题)

2. 平面内任意两点间的距离

设 $P_1(x_1, y_1)$和 $P_2(x_2, y_2)$是坐标平面内的任意两点(图 1-9)，从点P_1、P_2分别作 y 轴的平行线 P_1M_1、P_2M_2，与 x 轴交于点 $M_1(x_1, 0)$、$M_2(x_2, 0)$. 再从点 P_1、P_2 分别作 x 轴的平行线 P_1N_1、P_2N_2，与 y 轴交于点$N_1(0, y_1)$、$N_2(0, y_2)$. 直线 P_1N_1 与 P_2M_2

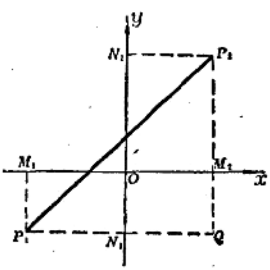


图　1-9

相交于点 Q.

因为 $\triangle P_1QP_2$ 是直角三角形, 根据勾股定理, 得

$$|P_1P_2|^2=|P_1Q|^2+|QP_2|^2.$$

但是 $$|P_1Q|=|M_1M_2|=|x_2-x_1|,$$

$$|QP_2|=|N_1N_2|=|y_2-y_1|,$$

所以 $$|P_1P_2|^2=|x_2-x_1|^2+|y_2-y_1|^2$$

$$=(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2.$$

由此得到两点 $P_1(x_1, y_1)$、$P_2(x_2, y_2)$间的距离公式:

$$\boxed{|P_1P_2|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}.}$$

例 1 求两点 $P_1(-3, 5)$和 $P_2(1, 2)$间的距离.

解: 这里 $x_1=-3, y_1=5$; $x_2=1, y_2=2$.

代入两点间的距离公式, 得

$$|P_1P_2|=\sqrt{[1-(-3)]^2+(2-5)^2}$$

$$=\sqrt{4^2+(-3)^2}$$

$$=5.$$

例 2 已知点 P 在 x 轴上, 它与点 $A(1, -3)$的距离等于 5, 求点 P 的坐标.

解: 因为 x 轴上的点的纵坐标都等于 0, 所以可设点 P 的坐标为$(x, 0)$. 根据题意,

$$|AP|=5.$$

由两点间的距离公式, 得

$$\sqrt{(x-1)^2+[0-(-3)]^2}=5,$$

即 $\sqrt{(x-1)^2+9}=5$.

方程的两边平方，得

$$(x-1)^2+9=25, \text{ 或 } (x-1)^2=16,$$

因此，$x-1=\pm 4$.

$\therefore \quad x_1=5, \ x_2=-3.$

经检验，这两个根都是原方程的根. 因此，所求的点P的坐标是(5, 0)或(−3, 0)，如图1-10所示.

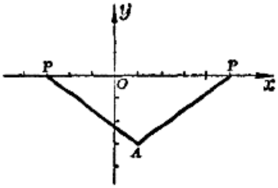


图 1-10

练 习

1. 求下列两点间的距离：

(1) $P_1(-1,0)$ 和 $P_2(2,0)$； (2) $P_1(0,6)$ 和 $P_2(0,-2)$；

(3) $A(-2,0)$ 和 $B(-4,3)$； (4) $A(2,-5)$ 和 $C(2,3)$；

(5) $M(-3,8)$ 和 $N(-1,-2)$；

(6) $O(0,0)$ 和 $P(2,-3)$.

2. 在 y 轴上有一点 P，它与点 $A(4,-6)$ 的距离是 5，求点 P 的坐标.

3. 如果点 $P_1(3,4)$ 与 $P_2(5,k)$ 间的距离是 5，求 k 的值，并画图.

例3 在图1-11的零件图上(除非特别注明，零件图上的尺寸单位都是毫米，今后不再一一说明)，选择适当的坐标系，求孔心A和B、B和C间的距离(精确到0.01毫米).

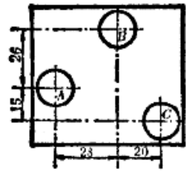


图 1-11

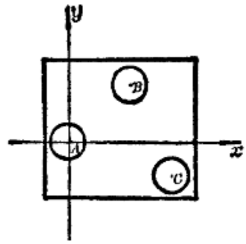


图 1-12

解: 取 A 为原点, 建立直角坐标系, 如图 1-12. 这时孔心的坐标是: $A(0, 0)$, $B(28, 26)$, $C(48, -15)$.

将点的坐标代入两点间的距离公式, 得

$$|AB| = \sqrt{(28-0)^2+(26-0)^2} = \sqrt{1460} \approx 38.21;$$

$$|BC| = \sqrt{(48-28)^2+(-15-26)^2} = \sqrt{2081} \approx 45.62.$$

即孔心 A、B 间的距离约是 38.21 毫米, B、C 间的距离约是 45.62 毫米.

例 4 $\triangle ABC$ 中, AO 是 BC 边上的中线, 求证:

$$|AB|^2+|AC|^2 = 2(|AO|^2+|OC|^2).$$

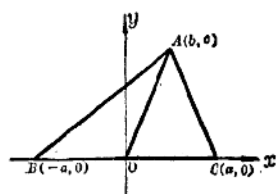


图 1-13

证明: 取线段 BC 所在的直线作 x 轴, BC 的中点 O 作原点, 如图 1-13. 设 C 点的坐标是 $(a, 0)$, 那么 B

点的坐标就是$(-a,0)$. 再设A点的坐标是(b,c)

那么 $|AB|^2=(-a-b)^2+(0-c)^2,$

$|AC|^2=(a-b)^2+(0-c)^2,$

$|AB|^2+|AC|^2=2(a^2+b^2+c^2).$

又 $|AO|^2=b^2+c^2, |OC|^2=a^2,$

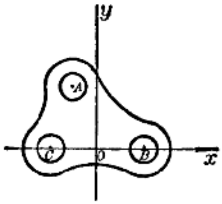
$2(|AO|^2+|OC|^2)=2(a^2+b^2+c^2).$

$\therefore$ $|AB|^2+|AC|^2=2(|AO|^2+|OC|^2).$

从上面的例子可以看到: 在平面内建立了坐标系, 可以用代数方法来研究几何图形的性质. 应用这种方法时, 如果坐标系选得适当, 就可以使计算或证明简便. 例如, 选取图形中的某一个点作原点, 就能使这点的横坐标和纵坐标都是零; 选取图形中的某一条直线作x轴或y轴, 就能使这条直线上的点的纵坐标或横坐标是零.

练 习

1. 如图, 已知零件孔心的坐标为$A(-20,50)$, $B(40,0)$, $C(-40,0)$. 求每两孔中心间的距离(精确到0.01毫米).



(第1题)

2. 甲船在某港口东50海里, 北30海里处; 乙船在同一港口东17海里, 南26海里处. 求甲、乙两船间的距离.

3. 证明: 矩形的两条对角线长相等.

1.3 线段的定比分点

已知线段 P_1P_2 的两个端点分别是 $P_1(x_1, y_1)$ 和 $P_2(x_2, y_2)$，点 P 把线段 P_1P_2 分成 P_1P 和 PP_2，且两线段的比为 $\frac{P_1P}{PP_2}=\lambda$. 那么，点 P 的坐标 (x, y) 可以用 P_1、P_2 的坐标表示. 点 P 叫做分线段 P_1P_2 为定比 λ 的**定比分点**.

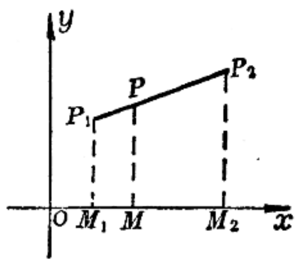


图 1-14

现在我们来求分点 P 的坐标.

如图 1-14，从 P_1、P、P_2 分别作 y 轴的平行线交 x 轴于 M_1、M、M_2. 根据平行线分线段成比例定理，得

$$\lambda=\frac{P_1P}{PP_2}=\frac{M_1M}{MM_2}.$$

$$\because\quad M_1M=x-x_1,$$

$$MM_2=x_2-x,$$

$$\therefore\quad \frac{x-x_1}{x_2-x}=\lambda.$$

解这个关于 x 的方程，得

$$x=\frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda}.$$

类似地，可以得到

$$y=\frac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda}.$$

因此，把连结 $P_1(x_1, y_1)$ 和 $P_2(x_2, y_2)$ 的线段 P_1P_2 分成定比 $\frac{P_1P}{PP_2}=\lambda$ 的点的坐标是:

$$\boxed{x=\frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda}, \quad y=\frac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda}.}$$

例 1 已知两点 $P_1(-1, -6)$和 $P_2(3, 0)$，求线段 P_1P_2 的两个三等分点 P 和 P' 的坐标(图 1-15)。

解: 这里 $x_1=-1$, $y_1=-6$; $x_2=3$, $y_2=0$.

对分点 P 来说， $\lambda=\frac{P_1P}{PP_2}=\frac{1}{2}$，代入定比分点坐标公式，得

$$x=\frac{-1+\frac{1}{2}\times 3}{1+\frac{1}{2}}=\frac{1}{3},$$

$$y=\frac{-6+\frac{1}{2}\times 0}{1+\frac{1}{2}}=-4.$$

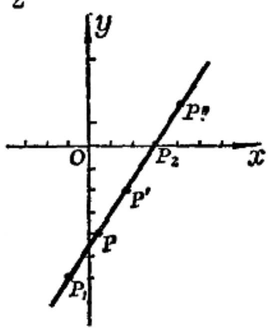


图 1-15

所以，点 P 的坐标是$\left(\frac{1}{3}, -4\right)$.

对分点 P' 来说，$\lambda=\frac{P_1P'}{P'P_2}=2$，代入定比分点坐