学化简的钥匙

內容提要

高中代数和初中代数相比，不但在計算上比較复杂，某些概念也更加抽象。这对于自学者来説，困难是較多的。

这本書除全面輔导外，重点解釋高中代数中比較难懂的部分，指出解題的窍門，以及一些关鍵性的問題，使自学者可以少走弯路，减少在自学过程中的困难。

本書可配合教科書閱讀。

总号：053

自学代数的鑰匙（高中組）

組　　稿：上海市中学教师进修学院科普工作組

著　　者：余逸时　潘应河

封面設計：蔡振华

出 版 者：上海科学普及出版社
（上海市南昌路47号）

上海市書刊出版業營業許可証出字第085号

發 行 者：新华書店上海發行所

印 刷 者：商务印書館上海印刷厂
上海天通菴路190号

开本：787×1092 耗 1/32　　印張：5 3/16

字数：144,000　　統一書号：T 70128 12

印数：105,000　　定　价：4角6分

1957年12月第一版　　1957年12月第一次印刷

目　　录

第一章　实数

一、無理数的概念

在初中代数里，根据相反的方向量，扩充到有理数。任何一个有理数，都可写成有限小数或無限循环小数的形式。比如說-5，可以写成-5.0，$\frac{1}{4}$可以写成0.25，$-\frac{4}{11}$可以写成$-0.\dot{3}\dot{6}$。同时有限小数或無限循环小数都可以化成分数来表示，因此，一切有理数都可以用分数来代表。

但是，單用有理数，是不是能滿足一切度量的需要呢？比如說量綫段的長度，是不是任何一条綫段，用單位長度去量它时，它的量数都能用有理数来表示呢？現在我們来看下面的实际問題。

有一个正方形，它的面积等于2个平方公尺，問它的边長是多少？如果用x代表正方形的边長，根据正方形的面积公式得

$$x^2=2$$

这样，正方形的边長x，就是2的算术平方根。即$\sqrt{2}$。这个$\sqrt{2}$是不是有理数呢？

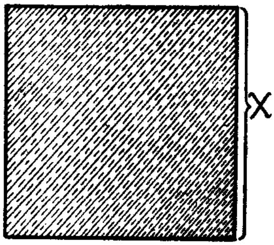

圖 1.

根据算术根的性質，我們知道

$$\sqrt{1}<\sqrt{2}<\sqrt{4}。$$

因此
$$1<\sqrt{2}<2$$

如果$\sqrt{2}$是介于1和2之間的有理数，那末，它可以用既約分数$\frac{q}{p}$来表示，这里p和q是互为質数的正整数。

列成式子是:

$$\frac{p}{q}=\sqrt{2}$$

兩边平方得:

$$\frac{q^2}{p^2}=2,\quad q^2=2p^2$$

从这里看出，$q^2=2p^2$，即 q^2 是偶数，因此 q 必定也是偶数。

設 $q=2m$，代入上式得

$$(2m)^2=2p^2,\quad 4m^2=2p^2$$

兩边同除以 2 得:

$$p^2=2m^2$$

这样一来，p 也是偶数了。这跟前面說的 p 和 q 互为質数相矛盾，因此 $\sqrt{2}$ 不能用分数表示，它当然不是有理数了。

由此可見，在 1 和 2 之間确实存在着不是有理数的数。它究竟是怎样的数呢？为了說明这个問題，我們利用綫段的度量来說明它。这里，先看下面一些重要的概念。

（1）**兩条綫段的公度和最大公度**　如果綫段 AB 和 CD，都是第三条綫段 l 的整倍数。这时，l 就叫做綫段 AB 和 CD 的公度。如圖 2，$AB=5l$，$CD=3l$。如果把 l 分成 2、3、4…等份，AB 和 CD 也必是其中任何一份的整倍数。因此，如果兩条綫段有公度 l，那末 $\frac{l}{n}$ $(n=2、3、4\cdots)$ 也必定是它們的公度。因为 $AB=5l=5n\left(\frac{l}{n}\right)$；$CD=3l=3n\left(\frac{l}{n}\right)$。所以我們知道兩条綫段如有公度，必定有無限个。其中最長的叫做兩条綫

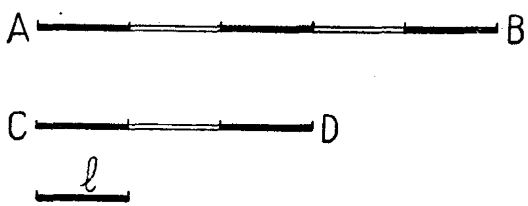

圖 2.

段的最大公度，但是它的長度不会超过 AB 和 CD 两条綫段中較短的那条。

如果被量綫段和單位綫段有公度的时候，那末它的量数可以用有理数来表示，它有下面三种情形：

（1）如果被量綫段 AB 是單位長度 l 的整数倍，那么，$AB=3$ 个單位長度（圖 3）。

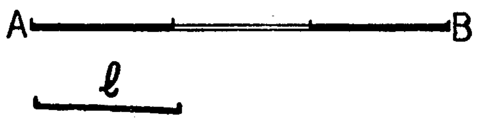

圖 3.

（2）如果用 l 去量 AB（圖 4），截取兩次后，余下小于 l 的 CB；这时，再用 CB 去量 l，截取一次后，余下小于 CB 的 DE，再用 DE 去量 CB，結果恰好三次量完。如果这次还有剩余，可以这样繼續量下去，最后还是量完，这最后一次剩余，就是这兩綫段的最大公度。像这里的 DE 就是 AB 和 l 的最大公度。这种求最大公度的方法，叫做輾轉相截法。

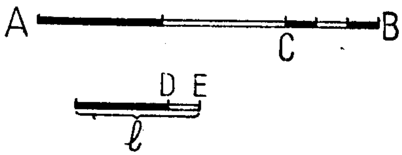

圖 4.

根据上面的做法，我們得到：

$$AB=2l+CB \qquad (1)$$

$$l=CB+DE \qquad (2)$$

$$CB=3DE \qquad (3)$$

把（3）代入（2）

$$l=3DE+DE=4DE \tag{4}$$

將(3)和(4)代入(1)

$$AB=2(4DE)+3DE=11DE \tag{5}$$

由(4)和(5)知道，l 和 AB 的最大公度是 DE。

以 l 做單位長度，AB 的量数是:

$$AB=2l+CB=2l+3DE=2l+3\cdot\left(\frac{l}{4}\right)=\frac{11}{4}l=2.75 \text{ 單位長度}$$

(3)如果用 l 去量 AB(圖5)，截取三次后，余下小于 l 的CB；再用CB 去量l，截取二次后，余下小于CB 的DE；再用DE 去量CB，結果恰好四次量完。根据这样的做法，我們得到:

$$AB=3l+CB \tag{1}$$

$$l=2CB+DE \tag{2}$$

$$CB=4DE \tag{3}$$

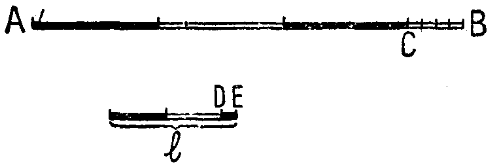

圖 5.

由(3)得

$$DE=\frac{1}{4}CB$$

代入(2)得到

$$l=2CB+\frac{1}{4}CB=\frac{9}{4}CB$$

因此，
$$CB=\frac{4}{9}l$$

代入(1)得到

$$AB=3l+\frac{4}{9}l=3\frac{4}{9}l=3.\dot{4} \text{ 單位長度}$$

以上是單位綫段和被量綫段有公度的情形，度量的結果总可以用有理数来表示。

(2)沒有公度的綫段　任何兩条綫段都有公度嗎?这并不一定。但是，在我們的想像中，好像兩条綫段总可以有公度，認为取無限縮短的綫段时，总可以把兩条綫段同时整数次量完。其实，并不是这样，沒有公度的兩条綫段是存在的，通过下面的例子，我們就可以清楚地看到了。

正方形的对角綫和它的一边是沒有公度的(圖 6)。对角綫 AC 把正方形 $ABCD$ 分成兩个全等的等腰直角三角形，所以这个問題也可以变成这样一句話:“等腰直角三角形的斜边和直角边是沒有公度的”。現在我們来証明一下。

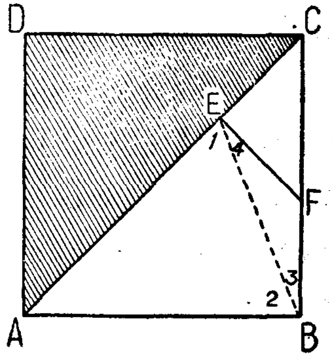

圖 6.

在 AC 上取 $AE=AB$，作 $EF\perp AC$，交 BC 于 F

在 $\triangle CEF$ 中，

$\because\quad \angle CEF=90^\circ,\quad \angle ECF=45^\circ$

$\therefore\quad \angle EFC=45^\circ,\quad EF=EC$

$\therefore$　$\triangle CEF$ 也是一个等腰直角三角形。

連 EB，因为 $AB=AE$，所以 $\angle 1=\angle 2$

$\therefore\quad 90^\circ-\angle 1=90^\circ-\angle 2$　即 $\angle 4=\angle 3$

因此　$BF=FE=EC$

又因为　$\triangle ABC$ 中，$AB<AC<AB+BC$

所以　$AB<AC<2AB$

因此用 AB 去量 AC，只能截取一次，而余下小于 AB 的 EC。假如再用 EC 去量 AB，就相当于去量和 AB 相等的綫段 BC。先量得 $BF=$ $=EC$，再用 EC 量 FC。但 $\triangle CEF$ 是一个等腰直角三角形，EC 是直角

边，FC是斜边，恰巧和用AB去量AC的情况相同。这样繼續下去，每次都会产生一个新的等腰直角三角形。很明显，这样的度量下去是永远有剩余的。虽然这个等腰直角三角形在不断的縮小，但是它的三个頂点永远不能重合成一点。这表明了綫段AC和AB是沒有公度的。

如果被量綫段和單位綫段沒有公度，它的量数就不能用有限小数表示出来。假設能用有限小数3.74来表示，就說明它們有公度，公度單位是$\frac{1}{100}$的單位綫段，这和原来的假設相矛盾。同时，它也不能用無限循环小数来表示。假設能用循环小数$3.1\dot{6}$来表示，它們的公度是$\frac{1}{6}$的單位長度，这也和原来的假設相矛盾。因此它只能用無限不循环小数来表示。这种無限不循环小数是不能化成分数的，我們叫它做無理数。有理数和無理数的总称叫做实数。

在初中代数理，我們遇到有理数开方有不能开尽的情形，好比$\sqrt{2}=1.4142\cdots$，$\sqrt{3}=1.7320\cdots$等都是無理数。但是，不能錯誤地認为無理数就是由有理数的开方不尽而产生。無理数的产生应該是以沒有公度的綫段为根据。有理数的不尽根，仅是無理数中的一种；比如园周率$\pi=3.14159\cdots$也是一个無理数；另外我們也可按照某一法則写出無理数，例如5.04004000400004…，这个数在第一个4前有一个零，第二个4前有兩个零，第三个4前有三个零……，这样繼續下去。

在有理数里，相反方向的量，可以用正負有理数来表示，这也同样适用于正負無理数。因此，每一个不等于零的实数，都有一个和它相反的实数。比如$1.\dot{4}$和$-1.\dot{4}$，$\sqrt{3}$和$-\sqrt{3}$，5.040040004…和$-5.040040004\cdots$等等都是相反的数。至于实数絕对值的意义，也和有理数里絕对值的意义完全一样，比如$|\sqrt{5}|=\sqrt{5}$，$|-\pi|=\pi$等等。

我們已經把有理数扩充到实数，从下表可以清楚地看出实数的系統。

分数可以化成有限小数或無限循环小数，其中，有限小数也可以看成零循环的無限小数，好比2.7可以看成$2.7\dot{0}$，这样一来，所有的有

- 实数
  - 有理数（能用分数表示的数。）
    - 整数
      - 正整数
      - 零
      - 負整数
    - 分数
      - 正分数
      - 負分数
  - 無理数——不循环的無限小数，不能用分数表示的数。

理数都可以用無限循环小数来表示了。因此，所有的实数都是無限小数，而有理数和無理数的区别仅在循环和不循环了。

無理数是不循环的無限小数，我們就不能把它的精确值写出来，好比説$\sqrt{2}=1.4142\cdots$，因为它小数点后有無限位而又不循环，这样写下去是没有止境的。因此，我們一般用它的近似値来表示。我們常用精确到 1、0.1、0.01、0.001、…的不足近似値或过剩近似値来表示它。好比$\pi=3.14159\cdots$，精确到 1、0.1、0.01、0.001、…的不足近似値是 3、3.1、3.14、3.141、…等；精确到 1、0.1、0.01、0.001、…的过剩近似値是 4、3.2、3.15、3.142、…等。在任何一个不足近似値的末位数字上加 1，就可以得到相同精确度的过剩近似値。

在初中代数里，我們講过，每一个有理数，可以用数軸上的点来表示。但是，反过来，数軸上任何一点，是不是都能代表一个有理数呢？也就是説，代表有理数的点，能不能把整个数軸都填滿而没有空的地方呢？现在我們看下面的事实：在数軸上取O做原点，OA当做單位長度。以OA做边作一个正方形，作出对角綫OC。我們以O为中心，OC做半徑划弧，交数軸于P点，这样$OP=OC$(圖 7)。

因为OC与OA没有公度，所以OP和OA也没有公度。因此，用OA做單位長度时，OP就不能用有理数来表示，也就是説数軸上的P点不能代表一个有理数。像这种不能代表有理数的点，在数軸上有無限多个。因为在数軸上随便取一个点，如果由这点到原点O的距离与OA有公度的話，这点就能代表有理数；如果是没有公度的話，这点就不能

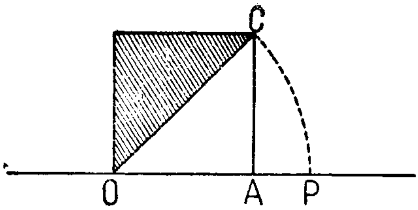

圖 7.

代表有理数，而只能代表一个無理数。但是这两种情形中，必定有一种成立。因此，数軸上任何一点，都可以代表一个实数；反过来，任何一个实数，都可以用数軸上的点表示出来。这样，所有代表实数的点，就把整个的数軸填满了。

二、实数的順序

有理数是有順序的，初中代数里，我們已經講过比較它們大小的方法，现在用比較有理数大小的方法做基础，来确定比較实数大小的方法。因为实数都可以表示成無限小数，因此，我們只要比較無限小数的大小，而不必再去比較两个無理数或一个有理数和一个無理数之間的大小。現在，从下面三方面来談。

1．比較两个正实数的方法；

（1）两个正实数都用無限小数表示时，如果它們对应位上的数字都相同那末这两个正实数相等。

比如 $\alpha=2.3076\cdots$，$\beta=2.3076\cdots$；那末，$\alpha=\beta$。

（2）如果整数部分不等，那末整数部分大的正实数較大；如果整数部分相同，而小数第一位不等，那末小数第一位大的正实数較大；如果小数第一位也相等，那末小数第二位大的正实数較大，用这样的方法类推下去。

比如：　$\alpha=3.00134\cdots$，　$\beta=2.987\cdots$　时，　$\alpha>\beta$

　　　　$\alpha=7.05279\cdots$，　$\beta=7.05280\cdots$时，　$\alpha<\beta$

但是，遇到 0 循环和 9 循环的时候，有一种情形要除外。比如：$\alpha=2.379999\cdots$，$\beta=2.380000\cdots$，这时，我們認为 $\alpha=\beta$。

2. 比較正負实数和零的大小的方法，完全和有理数里的比較方法一样。

3. 算术里的基本順序律，在实数范圍里是完全适合的。

三、实数的运算

初中代数里講过，有理数可以进行加、减、乘、除四种运算，算术里的基本运算律也完全适用，現在，我們来看加了無理数以后的运算情形。

1. 两个正实数相加

(1) 加数中只有一个是無理数，它們的和还是無理数。

比如 $\pi+2.5=3.145927\cdots+2.5=5.645927\cdots$。

(2) 两个加数都是無理数，它們的和就不一定，有时是無理数，但有时却是有理数。

比如 $\sqrt{3}+\sqrt{2}=1.7320\cdots+1.4142\cdots=3.1462\cdots$，結果还是無理数。

又比如 $5.04004000400004\cdots+1.40440444044440\cdots$

$=6.4444\cdots=6.\dot{4}$，它的結果却变成有理数了。

两个正实数相加的和，是在任意一組对应的不足近似值的和与过剩近似值的和之間，可以取到任何精确程度的近似值。

任何两个正实数，都可在数軸上取得两个对应的綫段。比如正实数 α 和 β，它們对应的綫段是 OA 和 OB。我們一定可以取得 $OC=OA+OB$。

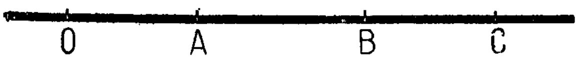

圖 8.

这里 OC 是 OA 与 OB 的和，而且都是向右的方向量，代表正数。

像这样的截取，只能取得一个唯一的C点，OC的長也是唯一的。因此，两个正实数的和是存在的，而且也是唯一的(圖8)。

2. 两个正实数相乘

(1)相乘的两个因数中只有一个是無理数，而且沒有一个因数是有理数"0"，那末它們的积总是無理数。

比如：$0\times\sqrt{2}=0$，它們的积是0。

又比如：$3.040040004000004\cdots\times3=9.12012001200012\cdots$，它們的积还是無理数。

(2)两个因数都是無理数，它們的积有时是無理数，但有时却是有理数。

比如：$\sqrt{2}\times\sqrt{3}$，按照算术平方根的运算方法，它等于$\sqrt{2\times3}=\sqrt{6}$，这还是一个無理数。

又比如：$\sqrt{2}\times\sqrt{8}=\sqrt{2\times8}=\sqrt{16}=4$，它的积却是有理数了。

总起来說，两个正实数相乘，它的积在任意一組对应的不足近似值的积与过剩近似值的积之間。但可以取到任何精确程度的近似值。

和前面一样，我們取代表正实数α和β的綫段OA和OB，把OA和OB当做寬和長作一个長方形$KLMN$。長方形$KLMN$的面积$=OA\times OB$，長方形面积的量数$=\alpha\times\beta$(圖9)。

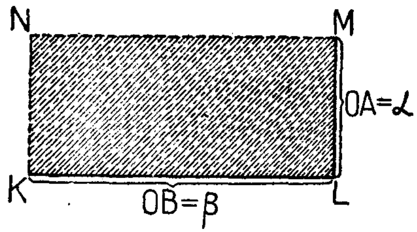

圖 9.

因为这样的長方形只能作一个，因此，它的面积是唯一的，所以，两个正实数的积是存在的，而且也是唯一的。

求正实数的n次方，就是求n个这样的正实数相乘的积。

以上各种运算的逆运算，在正实数里和在有理数里有相同的意义。

在减法中，如果被减数和减数中，有一个是無理数，它們的差一定是無理数。如果被减数和减数都是無理数。它們的差可能是有理数，也可能是無理数。比如$\sqrt{2}-\sqrt{2}=0$，就是有理数；$\sqrt{3}-\sqrt{2}=0.3178\cdots$，就是無理数。

在除法中，如果被除数和除数中，有一个是無理数，除去被除数是零外，它們的商也一定是無理数。如果被除数和除数都是無理数，它們的商可能是有理数，也可能是無理数。比如 $\sqrt{3}\div\sqrt{2}=\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}\times\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{6}}{2}$，就是無理数；又比如 $2\sqrt{3}\div\sqrt{3}=2$，就是有理数了。

在开方运算中，正实数开方，总可以得出一个算术根。如果被开方数是有理数，它的方根可能是有理数，也可能是無理数；如果被开方数是無理数，它的方根总是無理数。

負实数和零的运算方法，和負有理数和零的运算方法一样。但是，在实数范圍里，負数不能开偶数次方。

有理数的运算性質，象加法的交換律和結合律，乘法的交換律和結合律，以及乘法对于加法的分配律等等，在实数范圍里还是适用的。

有理式里的不等式性質，在实数范圍里也完全有效。

第二章　根式

一、根式的产生

在有理数的范圍里，所研究的代数式是有理式。現在从有理数扩充到实数，就可以在实数的范圍里来研究根式。从下面的例子，可以看出根式是怎样产生的。

問題一、一个面积等于 A 平方單位的圓，它的半徑多少？

假設它的半徑用 x 代表，根据圓面积的公式得：

$A=\pi x^2$，即 $x^2=\frac{A}{\pi}$，（因为半徑不能用負数代表，所以取算术根）得 $x=\sqrt{\frac{A}{\pi}}$。

問題二、正立方体的体积是 a 立方單位，它的边長是多少？

用 x 代表的边長，根据立方体的体积公式得：

$x^3=a$，即 $x=\sqrt[3]{a}$ 長度單位。

像上面这兩个問題，它的結果，都要用带根号的式子才能表示出来。一般說来，式子 $\sqrt[n]{a}$ 就叫根式，它是实数范圍內研究的一种代数式，要 $\sqrt[n]{a}$ 是实数，就必須符合下面的规定：

（1）在 $a\geqslant0$ 时，n 可以是任何大于 1 的正整数。

（2）在 $a<0$ 时，n 只能是奇数。因为 n 是偶数时，$\sqrt[n]{a}$ 的值就不是实数。

比如、$\sqrt[4]{3}$、$\sqrt[3]{-71}$ 等是根式；$\sqrt{x-1}$ 在 $x\geqslant1$ 的条件下才是根式，$\sqrt[4]{-3}$，$\sqrt{-x^2-1}$ 等就不是根式。

$\sqrt[n]{a}$ 是根式的时候，根据方根的意义有：

$(\sqrt[n]{a})^n=a$　（n 是大于 1 的正整数）

但是，

当 $a\geqslant 0$，n 是大于 1 的正整数时，$\sqrt[n]{a^n}=a$；

当 $a<0$，n 是奇数时，$\sqrt[n]{a^n}=a$；

当 $a<0$，n 是偶数时，$\sqrt[n]{a^n}=-a$；

例如 $\sqrt[4]{2^4}=2$，$\sqrt[3]{(-2)^3}=-2$，

$\sqrt[4]{(-3)^4}=\sqrt[4]{81}=3=-(-3)$。

正数开方时，我們規定用算术根、做它的方根数。但是在求負数的奇次方根时，所得結果是負数，例如 $\sqrt[3]{-8}=-\sqrt[3]{8}=-2$，$\sqrt[5]{-3}=-\sqrt[5]{3}$，它可以化成和某一个算术根相反的数。因此，我們只要研究算术根的性質就可以了。以后如果没有特别声明，所有的字母都不代表負数；代表指数的字母都表示正整数；当做根指数的字母，代表大于 1 的正整数。

有时候，一个根式可以和有理式恒等，例如 $\sqrt{x^4}=x^2$。

二、根式的运算

1. 根式的基本性質 对于算术根說来，如果一个根式的根指数和被开方数的指数，都乘以一个正整数，它的值不变。

这就是 $\sqrt[n]{a^m}=\sqrt[np]{a^{mp}}$。

这里应注意的是，必須是算术根，才有这个性質。不是算术根，就不一定有这个性質。例如

$$\sqrt[3]{-27}=-3,$$

而 $$\sqrt[3\times 2]{(-27)^2}=\sqrt[6]{729}=3,$$

因此 $$\sqrt[3]{-27}\neq\sqrt[6]{(-27)^2}$$

这个性質，教本中已經清楚地証明了，这里不再重复。它和分数里的“把分子、分母同乘以不等于零的数，分数之值不变”的性質有些相似。以后在运算中，常常要运用到它。根据这个性質，我們可以得到下面的推論：

如果被开方数是一个正整数的冪，并且冪的指数和根指数有公約