

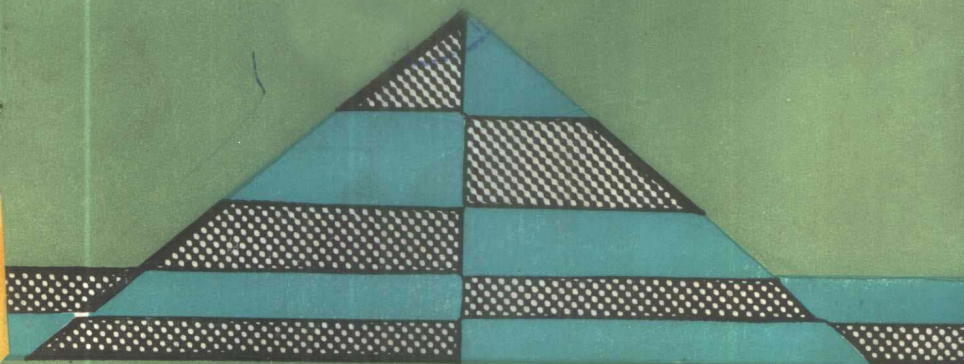
912440

高等学校试用教材

高等数学

下 册

大连理工大学应用数学系 肖义珣 等编



高等教育出版社

高等学校试用教材

高等数学

下 册

大连理工大学

应用数学系 肖义珣 等编

高等教育出版社

内 容 提 要

本书系在编者多年使用的讲义的基础上,参照高等工业学校《高等数学课程教学基本要求》编写而成,全书分上、下两册出版。

下册包括微分方程,向量与空间解析几何,多元函数及其微分法,重积分,曲线积分与曲面积分等五章。本书结构、体例比较新颖,叙述方法颇有特色。本书各章的附录部分是超出基本要求的内容,可供优秀学生选择学习。

本书经全国工科数学课程教学指导委员会评选审定,由陆庆乐,王福楹教授复审,最后审定作为教材出版。本书可供高等工科院校各专业使用,也可作为函授大学,夜大学教材及工程技术人员参考用书。

高等学校试用教材

高 等 数 学

下 册

大连理工大学应用数学系 肖义珣 等编

*

高等教育出版社出版

新华书店北京发行所发行

人民教育出版社印刷厂印装

*

开本 850×1168 1/32 印张 14.125 字数 340 000

19 80 年 10 月第 1 版 19 89 年 10 月第 1 次印刷

印数 0001—6 155

ISBN 7-04-002329-6/O·792

定价 3.20 元

目 录

第六章 微分方程	1
第一节 微分方程的基本概念	1
1.1 应用问题举例	1
1.2 微分方程的解	3
习题 6-1	6
第二节 一阶微分方程	7
2.1 可分离变量的微分方程	7
2.2 一阶线性微分方程	12
习题 6-2	17
第三节 高阶线性微分方程	19
3.1 高阶线性微分方程的概念	19
3.2 朗斯基行列式	23
3.3 高阶线性微分方程的通解结构	26
习题 6-3	28
第四节 常系数线性微分方程的解法	29
4.1 常系数齐次线性微分方程的解法	29
4.2 常系数非齐次线性微分方程的解法	33
4.3 应用举例	42
4.4 欧拉方程	47
习题 6-4	49
第五节 可降阶的高阶微分方程	51
习题 6-5	55
第六节 微分方程的幂级数解法	56
习题 6-6	60
附录	61
第七节 常系数线性微分方程组解法举例	61

习题 6-7	67
第八节 常系数线性微分方程的算子解法	68
8.1 算子及其性质	68
8.2 运算符及其性质	70
8.3 微分方程算子解法举例	73
习题 6-8	78
杂题	78
第七章 向量与空间解析几何	81
第一节 向量及其基本运算	81
1.1 向量的概念	81
1.2 向量的加法	82
1.3 数与向量的乘法	83
1.4 向量的线性组合与向量的分解	86
1.5 有序向量的定向	88
习题 7-1	90
第二节 空间直角坐标系 向量的坐标	91
2.1 空间直角坐标系	91
2.2 向量的坐标	93
2.3 用坐标作向量运算	95
习题 7-2	98
第三节 向量的数量积与向量积	99
3.1 向量的数量积	99
3.2 向量的向量积	103
3.3 混合积与三重向量积	107
习题 7-3	110
第四节 空间直线与平面	112
4.1 空间直线的方程	112
4.2 平面的方程	114
4.3 有关平面与直线的问题举例	119
习题 7-4	124
第五节 曲面与空间曲线	127

5.1 曲面与空间曲线的方程	127
5.2 柱面与锥面	130
5.3 空间曲线在坐标面上的投影	135
5.4 二次曲面	136
习题 7-5	141
第六节 向量值函数及其导数与积分 空间曲线的切线	143
6.1 向量值函数的概念	143
6.2 向量值函数的极限与连续性	146
6.3 向量值函数的导数与积分	147
6.4 空间曲线的切线	151
习题 7-6	152
第七节 曲线的弧长 曲率	153
7.1 曲线的弧长 光滑曲线	153
7.2 曲率	159
7.3 向径与切线的夹角	162
习题 7-7	163
附录	165
第八节 曲线运动	165
8.1 速度和加速度	165
8.2 单位向量的导数	167
8.3 速度向量与加速度向量的分解	167
8.4 切向加速度与法向加速度	170
习题 7-8	172
第九节 坐标变换	173
9.1 平移变换	173
9.2 旋转变换	175
9.3 正交变换	180
习题 7-9	181
杂题	183
第八章 多元函数及其微分法	187
第一节 多元函数的极限与连续性	187

1.1 多元函数的概念	187
1.2 二元函数的图形	188
1.3 二元函数的极限与连续性	192
习题 8-1	196
第二节 偏导数	196
2.1 偏导数的概念 开集	196
2.2 偏导数的几何意义	200
2.3 高阶偏导数	203
习题 8-2	205
第三节 复合函数的微分法	207
3.1 复合函数的全导数	207
3.2 曲面的切平面与法线	209
3.3 方向导数与梯度	211
3.4 复合函数的偏导数	216
习题 8-3	221
第四节 隐函数的微分法 曲面的参数方程	224
4.1 一个方程的情形	224
4.2 方程组的情形	226
4.3 曲面的参数方程 光滑曲面	229
习题 8-4	235
第五节 全微分	237
5.1 全微分的概念	237
5.2 全微分形式的不变性	241
习题 8-5	245
第六节 多元函数的极值与条件极值	247
6.1 多元函数的极值 区域	247
6.2 条件极值	251
习题 8-6	255
附录	256
第七节 二元函数的泰勒公式	256
7.1 二元函数的一阶泰勒公式	256

7.2 极值充分条件的证明	260
7.3 二元函数的 n 阶泰勒公式	265
习题 8-7	267
杂题	267
第九章 重积分	271
第一节 二重积分及其计算	271
1.1 二重积分的概念与性质	271
1.2 平面区域的表示法	274
1.3 二重积分的计算	276
习题 9-1	280
第二节 二重积分的换元法	282
2.1 极坐标系的情形	282
2.2 曲线坐标系的情形	288
习题 9-2	297
第三节 二重积分的应用	299
3.1 物理应用	299
3.2 曲面的面积	302
习题 9-3	306
第四节 三重积分	308
4.1 三重积分的概念	308
4.2 三重积分的计算	309
4.3 利用柱面坐标计算三重积分	312
4.4 利用球面坐标计算三重积分	315
4.5 三重积分的一般换元公式	318
习题 9-4	322
附录	324
第五节 广义二重积分 含参量的积分	324
5.1 广义二重积分举例	324
5.2 含参量的积分	326
5.3 Γ 函数与 B 函数	331
习题 9-5	334

杂题.....	335
第十章 曲线积分与曲面积分.....	338
第一节 曲线积分.....	338
1.1 对弧长的曲线积分.....	338
1.2 对坐标的曲线积分.....	343
1.3 两类曲线积分之间的联系.....	350
习题 10-1	352
第二节 格林公式.....	353
习题 10-2	359
第三节 曲线积分与路径无关的条件.....	360
3.1 曲线积分与路径无关的条件.....	360
3.2 全微分方程.....	370
习题 10-3	372
第四节 曲面积分.....	374
4.1 对面积的曲面积分.....	374
4.2 对坐标的曲面积分.....	379
习题 10-4	386
第五节 高斯公式 通量与散度.....	387
5.1 高斯公式.....	387
5.2 通量与散度.....	391
习题 10-5	393
第六节 斯托克斯公式 旋度与环量.....	395
6.1 斯托克斯公式.....	395
6.2 旋度与环量.....	398
习题 10-6	404
杂题.....	405
习题答案.....	409

第六章 微分方程

第一节 微分方程的基本概念

函数是客观事物的内部联系在数量方面的反映, 利用函数关系可以对客观事物的规律性进行研究. 因此如何寻找函数关系, 在实践中具有重要意义. 但是在很多实际问题中, 往往不能直接找出所求的函数关系, 却容易建立这些函数、自变量与函数的导数或微分之间的关系. 这样, 我们就得到含有未知函数及其导数或微分的方程, 称为微分方程. 例如:

$$\begin{array}{ll} 1. \frac{dy}{dx} + y^2 = 0, & 2. \frac{d^2y}{dx^2} + \frac{dy}{dx} - 2y = \sin x, \\ 3. xydx - e^x dy = 0, & 4. \frac{ds}{dt} - s = t^2 \end{array}$$

都是微分方程. 在本章的论述中, 遇到前后文不会引起混淆时, 也常把微分方程简称为方程.

1.1 应用问题举例

例1 单摆

用一根长为 l 的细线 (其质量忽略不计), 把质量为 m 的摆锤结在它的一端, 另一端拴在 O 点上 (见图 6-1). 设该摆锤仅受重力的作用, 且细线的瞬间位置与垂线偏离的角度为 $\theta = \theta(t)$ (规定以反时针方向为正). 要确定单摆的运动规律就要求出函数

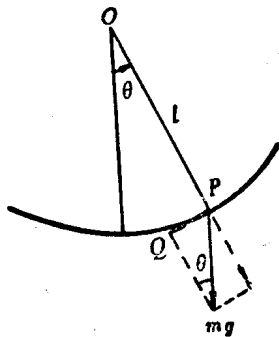


图 6-1

$\theta = \theta(t)$. 按力的平行四边形法则, 可知作用于单摆的重力 mg 沿 PQ 方向 (PQ 为在 P 点对弧的切线) 的分力为 $mg \sin \theta$, 其方向与偏离角方向相反, 即此分力 $f = -mg \sin \theta$. 而重力 mg 沿摆线方向的分力与张力互相抵消. 摆的线速度为 $l \frac{d\theta}{dt}$, 加速度为 $l \frac{d^2\theta}{dt^2}$. 因此, 由牛顿第二定律 $F = ma$, 得到

$$ml \frac{d^2\theta}{dt^2} = -mg \sin \theta,$$

即
$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{g}{l} \sin \theta.$$

这就是单摆运动所满足的微分方程.

例 2 生物总数的数学模型

任何生物的总数都是按整数变化的, 因此它都不会是时间的可微函数, 但是如果给定的总数非常大, 并且它突然增加一个, 这时发生的变化与给定的总数相比是很小的. 这时我们可以近似地认为: 当总数很大时, 它是随时间连续地、甚至可微地变化的.

设 $p(t)$ 表示在时间 t 给定的生物总数, $r(t, p)$ 表示其出生率和死亡率之差. 如果这种生物是孤立的, 即既无迁出也无移入, 则总数的变化率 $\frac{dp}{dt}$ 等于 $rp(t)$. 在最简单的数学模型中, 我们假设 r 是常数 a , 这时就得到总数增长所遵循的微分方程.

$$\frac{dp}{dt} = ap(t) \quad (a \text{ 是常数}), \quad (1)$$

这个方程称为马尔萨斯 (Malthus, 1766~1834) 生物总数增长定律. 如果在时间 t_0 给定生物的总数是 p_0 . 容易验证满足条件 $p(t_0) = p_0$ 且使 (1) 成为恒等式的函数为

$$p(t) = p_0 e^{a(t-t_0)}. \quad (2)$$

因此, 遵循马尔萨斯总数增长定律的任何生物都随时间按指数函

数方式增长。

上面建立的数学模型是非常简单的。然而，如果把 $p(t)$ 看作地球上的人口总数，用过去的人口数来检验这个公式，它却非常准确地反映了在 1700—1961 年期间估计的人口总数。在这期间地球上的人口大约每 35 年增加一倍，而上述方程断定每 34.6 年增加一倍。

但是如果用它来考察一下未来，即使今后的人在船上生活同在陆地上一样，到 2635 年每人也仅有 0.0929 平方米（一平方呎）的立足地，而到 2670 年，只好一个人站在另一个人的肩上排成两层了。这是不可能的，因为当生物总数非常大时，各个生物成员之间为了有限的生活场所、自然资源和食物而正在进行着竞争，而上述数学模型没有反映这一事实。为此在建立微分方程时必须考虑加上一个竞争项。竞争项的一种适当的选择方法是把它取为 $-bp^2$ ，其中 b 是常数，因为单位时间内两个成员相遇次数的统计平均值与 p^2 成正比。所以，经过修正的微分方程是

$$\frac{dp}{dt} = ap - bp^2 \quad (a, b \text{ 是常数}),$$

这个方程称为生物总数增长统计筹算律，数 a 和 b 称为生物总数的生命系数。一般说来 b 同 a 相比是很小的，因此当 p 不太大时，竞争项 $-bp^2$ 同 ap 相比可以略去，而当 p 很大时就不能忽略了。

为了利用上述方程来断定地球上未来的人口总数，必须估计出生命系数 a 和 b 。显然，工业技术的发展、环境污染状况以及社会风尚，都对生命系数 a 和 b 有重大影响，因此这些系数每过几年都需要重估一次。

1.2 微分方程的解

设 x 是自变量， y 是 x 的未知函数，微分方程的一般形式是

$$F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0. \quad (3)$$

在方程中出现的各阶导数的最高阶数 n ，叫做这个微分方程的阶。如果一个函数 $y = \phi(x)$ 代入微分方程，使方程成为恒等式，我们叫这个函数 $y = \phi(x)$ 为微分方程的解。微分方程的解通常也称为微分方程的积分。微分方程的求解过程也称为求微分方程的积分。如果微分方程的解能表达为初等函数的有限组合或初等函数的积分，则说这微分方程是可积的。

在微分方程的解中往往包含了任意常数，如 $y = x^2$ 是微分方程 $y' = 2x$ 的解， $y = x^2 + C$ 也是它的解，又如 $y = e^x$ ， $y = e^{-x}$ 是微分方程 $y'' - y = 0$ 的解， $y = Ce^x$ ， $y = C_1 e^x + C_2 e^{-x}$ 也都是它的解。微分方程的解中所包含的独立的任意常数^① 的个数恰好与微分方程的阶数相等时，我们称这样的解为方程的通解。例如 $y = x^2 + C$ 与 $y = C_1 e^x + C_2 e^{-x}$ 便分别是一阶微分方程 $y' = 2x$ 与二阶微分方程 $y'' - y = 0$ 的通解。一般 n 阶微分方程 (3) 的通解就可记为 $y = \phi(x, C_1, C_2, \dots, C_n)$ 或 $\Phi(x, y, C_1, C_2, \dots, C_n) = 0$ ，其中 $C_1, C_2, \dots, C_n$ 为 n 个独立的任意常数。

为了确定微分方程通解中的任意常数，常常需要一些附加条件。对于一阶微分方程 $F(x, y, y') = 0$ ，通常把条件：“当自变量 $x = x_0$ 时，未知函数 $y = y_0$ ”叫作它的初始条件，又可记作 $y|_{x=x_0} = y_0$ 。一般， n 阶微分方程 (3) 的初始条件为 $y|_{x=x_0} = y_0$ ， $y'|_{x=x_0} = y'_0$ ， $y''|_{x=x_0} = y''_0$ ， $\dots$ ， $y^{(n-1)}|_{x=x_0} = y_0^{(n-1)}$ 。往往用这组初始条件去确定其通解 $y = \phi(x, C_1, C_2, \dots, C_n)$ 或 $\Phi(x, y, C_1, C_2, \dots, C_n) = 0$ 中的任意常数 $C_1, C_2, \dots, C_n$ ，从而得到 n 阶微分方程 (3) 的一个

① 例如，对于 $y = C_1 e^x + 2C_2 e^x$ 中的两个任意常数 C_1, C_2 就不是独立的，因为若令 $C = C_1 + 2C_2$ ，则可将 C_1, C_2 合并为一个任意常数 C ，从而 $y = Ce^x$ 中只含有一个任意常数。而 $y = C_1 e^x + C_2 e^{-x}$ 中的任意常数 C_1, C_2 则不能合并为一个，即 $y = C_1 e^x + C_2 e^{-x}$ 中含有两个独立的任意常数。

解. 通常把这个解叫做(3)的特解. 把求微分方程满足初始条件的特解问题叫做初值问题.

例3 求微分方程 $y''=6x$ 满足初始条件 $y|_{x=1}=1, y'|_{x=1}=2$ 的特解.

解 在原方程两端积分两次, 得方程的通解

$$y=x^3+C_1x+C_2,$$

以初始条件 $y|_{x=1}=1, y'|_{x=1}=2$ 代入, 得关于 C_1, C_2 的代数方程组

$$\begin{cases} C_1+C_2=0, \\ C_1=-1, \end{cases}$$

解此方程组得 $C_1=-1, C_2=1$,

故所求微分方程的特解为

$$y=x^3-x+1.$$

一阶微分方程的通解的几何意义是以任意常数 C 为参数的曲线族 (其中每一条曲线都叫做微分方程的积分曲线). 例如 $y=$

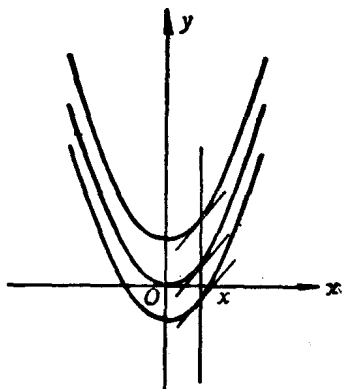


图 6-2

x^2+C 就是以 C 为参数的抛物线族. 二阶微分方程的通解的几何意义是以任意常数 C_1, C_2 为参数的曲线族. 这些曲线族所满足的微分方程反映了各曲线族的共同性质. 例如在抛物线族 $y=x^2+C$ 中, 用微分法得出 $y'=2x$, 它就是 $y=x^2+C$ 满足的微分方程, 它表示所有抛物线在点 x 的切线斜率相同 (如图 6-2). 又如同心圆族 $x^2+y^2=C$, 用微分法可得出它满足的微分方程是 $x+yy'=0$, 它反映了圆的基本性质: 圆周上任何一点的切线垂直于过该点的半径, 因为过圆心及圆周上任一点的连线的斜率为 $\frac{y}{x}$.

从这些例子我们还看到对于曲线族, 只要设法用微分消去参数就

可以得到反映曲线族共同性质的微分方程。例如双参数曲线族 $y = C_1 e^x + C_2 e^{-x}$, 求两次导数并消去参数 C_1, C_2 就可得到它所满足的微分方程 $y'' - y = 0$ 。

习 题 6-1

1. 说出下列各微分方程的阶数:

(1) $x(y')^2 - 2yy' + x = 0$;

(2) $(y'')^3 + 5(y')^4 - y^5 + x^7 = 0$;

(3) $(x^2 - y^2)dx + (x^2 + y^2)dy = 0$;

(4) $\frac{d\rho}{d\theta} + \rho = \sin^2\theta$;

(5) $xy''' + 2y'' + x^2y = 0$ 。

2. 指出下列各题中的函数是否为所给微分方程的解:

(1) $xy' = 2y, y = 5x^2$;

(2) $(x+y)dx + xdy = 0, y = \frac{C^2 - x^2}{2x}$;

(3) $y'' = x^2 + y^2, y = \frac{1}{x}$;

(4) $y'' - 2y' + y = 0, y = xe^x$ 。

3. 对下列各已知曲线族(C, C_1, C_2, C_3 都是任意参数)求出与它相应的微分方程:

(1) $(x-C)^2 + y^2 = 1$;

(2) $y = Cx + C^2$;

(3) $y = C_1 + C_2x + C_3x^2$;

(4) $xy = C_1e^x + C_2e^{-x}$ 。

4. 写出由下列条件确定的曲线所满足的微分方程:

(1) 曲线在点 (x, y) 的切线的斜率等于该点横坐标的平方;

(2) 曲线上任一点 (x, y) 的切线垂直于此点与原点的联线;

(3) 曲线上任一点的切线在两坐标轴间的线段均被切点所平分。

5. 用微分方程表示下述命题: 某种气体的气压 P 对于温度 T 的变化率与气压成正比, 与温度的平方成反比。

第二节 一阶微分方程

一阶微分方程的一般形式为

$$F(x, y, y') = 0,$$

如果可以解出导数, 则方程可改写为

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y).$$

最简单的情形是上述方程右端不显含 y , 即

$$\frac{dy}{dx} = f(x), \quad (1)$$

在积分学中已经知道: 如果 $f(x)$ 在 x 的某一区间 J 内连续, $x_0 \in J$, 则存在积分

$$y = \int_{x_0}^x f(x) dx + C (x \in J),$$

它就是微分方程(1)的解, 其中 C 为任意常数. 如果已知 $x = x_0$ 时 $y = y_0$, 则可以从中确定出 $C = y_0$ 使 $y(x_0) = y_0$, 即

$$y = \int_{x_0}^x f(x) dx + y_0,$$

这就是微分方程(1)的满足初始条件 $y|_{x=x_0} = y_0$ 的特解.

2.1 可分离变量的微分方程

如果一个一阶微分方程可以化成

$$g(y) dy = f(x) dx$$

的形式, 则称原方程为可分离变量的方程. 若 $g(y)$, $f(x)$ 连续, 两边积分就得到 x 和 y 的方程

$$\int g(y) dy = \int f(x) dx,$$

积分后有一个任意常数 C , 由上述方程所确定的函数 $y = y(x, C)$ 就是方程的通解. 这种求解微分方程的方法叫做分离变量法.

例1 求微分方程

$$x(1+y^2)dx - y(1+x^2)dy = 0$$

的通解.

解 分离变量

$$\frac{ydy}{1+y^2} = \frac{x dx}{1+x^2},$$

两边积分

$$\int \frac{ydy}{1+y^2} = \int \frac{x dx}{1+x^2},$$

得

$$\ln(1+y^2) = \ln(1+x^2) + \ln C,$$

即

$$1+y^2 = C(1+x^2),$$

这就是所求的通解的隐函数形式.

例2 试解初值问题

$$\frac{dx}{dt} = 4t\sqrt{x}, \quad x(1) = 1.$$

解 分离变量且积分,得

$$\int_1^x \frac{dx}{\sqrt{x}} = \int_1^t 4t dt,$$

$$2\sqrt{x} \Big|_1^x = 2t^2 \Big|_1^t, \quad \sqrt{x} = t^2,$$

即

$$x = t^4.$$

例3 同某一曲线族中的每一条曲线都垂直相交的曲线,称为该曲线族的正交轨线. 试求抛物线族 $x = Cy^2$ 的正交轨线.

解 把抛物线方程 $x = Cy^2$ 两端对 x 求导, 得到 $1 = 2Cyy'$. 并从两方程

$$\begin{cases} x = Cy^2, \\ 1 = 2Cyy' \end{cases}$$

中消去任意常数 C , 得抛物线族 $x = Cy^2$ 满足的微分方程

$$y' = \frac{y}{2x},$$