高等学校试用教材

高等数学

下册

大连理工大学应用数学系　肖义珣　等编

高等教育出版社

高等学校试用教材

高等数学

下册

大连理工大学
应用数学系 肖义珣 等编

高等教育出版社

内容提要

本书系在编者多年使用的讲义的基础上，参照高等工业学校《高等数学课程教学基本要求》编写而成，全书分上、下两册出版.

下册包括微分方程，向量与空间解析几何，多元函数及其微分法，重积分，曲线积分与曲面积分等五章．本书结构、体例比较新颖，叙述方法颇有特色．本书各章的附录部分是超出基本要求的内容，可供优秀学生选择学习．

本书经全国工科数学课程教学指导委员会评选审定，由陆庆乐，王福楹教授复审，最后审定作为教材出版．本书可供高等工科院校各专业使用，也可作为函授大学，夜大学教材及工程技术人员参考用书.

高等学校试用教材

高 等 数 学

下 册

大连理工大学应用数学系 肖义珣 等编

*

高等教育出版社出版

新华书店北京发行所发行

人民教育出版社印刷厂印装

*

开本 850×1168 1/32 印张 14.125 字数340 000

1989 年10月第1版 1989 年10月第1次印刷

印数 0001—6 155

ISBN 7-04-002329-6/O·792

定价3.20元

目 录

第六章 微分方程

第一节 微分方程的基本概念

函数是客观事物的内部联系在数量方面的反映，利用函数关系可以对客观事物的规律性进行研究．因此如何寻找函数关系，在实践中具有重要意义．但是在很多实际问题中，往往不能直接找出所求的函数关系，却容易建立这些函数、自变量与函数的导数或微分之间的关系．这样，我们就得到含有未知函数及其导数或微分的方程，称为**微分方程**．例如：

1. $\dfrac{dy}{dx}+y^2=0$，　　　2. $\dfrac{d^2y}{dx^2}+\dfrac{dy}{dx}-2y=\sin x$，

3. $xydx-e^x dy=0$，　　　4. $\dfrac{ds}{dt}-s=t^2$

都是微分方程．在本章的论述中，遇到前后文不会引起混淆时，也常把微分方程简称为方程．

1.1 应用问题举例

例1 单摆

用一根长为 l 的细线（其质量忽略不计），把质量为 m 的摆锤结在它的一端，另一端拴在 O 点上（见图6-1）．设该摆锤仅受重力的作用，且细线的瞬间位置与垂线偏离的角度为$\theta=\theta(t)$（规定以反时针方向为正）．要确定单摆的运动规律就要求出函数

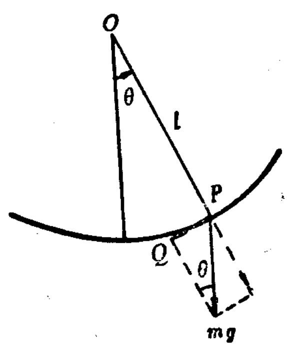

图 6-1

$\theta=\theta(t)$. 按力的平行四边形法则，可知作用于单摆的重力 mg 沿 PQ 方向(PQ 为在 P 点对弧的切线)的分力为 $mg\sin\theta$, 其方向与偏离角方向相反，即此分力 $f=-mg\sin\theta$. 而重力 mg 沿摆线方向的分力与张力互相抵消. 摆的线速度为 $l\frac{d\theta}{dt}$，加速度为 $l\frac{d^2\theta}{dt^2}$. 因此，由牛顿第二定律 $F=ma$，得到

$$ml\frac{d^2\theta}{dt^2}=-mg\sin\theta,$$

即

$$\frac{d^2\theta}{dt^2}=-\frac{g}{l}\sin\theta.$$

这就是单摆运动所满足的微分方程.

例 2　生物总数的数学模型

任何生物的总数都是按整数变化的，因此它都不会是时间的可微函数，但是如果给定的总数非常大，并且它突然增加一个，这时发生的变化与给定的总数相比是很小的. 这时我们可以近似地认为：当总数很大时，它是随时间连续地、甚至可微地变化的.

设 $p(t)$ 表示在时间 t 给定的生物总数，$r(t, p)$ 表示其出生率和死亡率之差. 如果这种生物是孤立的，即既无迁出也无移入. 则总数的变化率 $\frac{dp}{dt}$ 等于 $rp(t)$. 在最简单的数学模型中，我们假设 r 是常数 a，这时就得到总数增长所遵循的微分方程.

$$\frac{dp}{dt}=ap(t)\quad(a\text{ 是常数}),\tag{1}$$

这个方程称为马尔萨斯(Malthus, 1766～1834)生物总数增长定律. 如果在时间 t_0 给定生物的总数是 p_0. 容易验证满足条件 $p(t_0)=p_0$ 且使(1)成为恒等式的函数为

$$p(t)=p_0e^{a(t-t_0)}.\tag{2}$$

因此，遵循马尔萨斯总数增长定律的任何生物都随时间按指数函

数方式增长.

上面建立的数学模型是非常简单的. 然而，如果把 $p(t)$ 看作地球上的人口总数，用过去的人口数来检验这个公式，它却非常准确地反映了在1700—1961年期间估计的人口总数. 在这期间地球上的人口大约每35年增加一倍，而上述方程断定每34.6年增加一倍.

但是如果用它来考察一下未来，即使今后的人在船上生活同在陆地上一样，到2635年每人也仅有0.0929平方米(一平方呎)的立足地，而到2670年，只好一个人站在另一个人的肩上排成两层了. 这是不可能的，因为当生物总数非常大时，各个生物成员之间为了有限的生活场所、自然资源和食物而正在进行着竞争，而上述数学模型没有反映这一事实. 为此在建立微分方程时必须考虑加上一个竞争项. 竞争项的一种适当的选择方法是把它取为 $-bp^2$，其中 b 是常数，因为单位时间内两个成员相遇次数的统计平均值与 p^2 成正比. 所以，经过修正的微分方程是

$$\frac{dp}{dt}=ap-bp^2 \quad (a,b\text{ 是常数}),$$

这个方程称为生物总数增长统计筹算律，数 a 和 b 称为生物总数的生命系数. 一般说来 b 同 a 相比是很小的，因此当 p 不太大时，竞争项 $-bp^2$ 同 ap 相比可以略去，而当 p 很大时就不能忽略了.

为了利用上述方程来断定地球上未来的人口总数，必须估计出生命系数 a 和 b. 显然，工业技术的发展、环境污染状况以及社会风尚，都对生命系数 a 和 b 有重大影响，因此这些系数每过几年都需要重估一次.

1.2 微分方程的解

设 x 是自变量，y 是 x 的未知函数. 微分方程的一般形式是

$$F(x,y,y',\cdots,y^{(n)})=0. \tag{3}$$

在方程中出现的各阶导数的最高阶数 n，叫做这个**微分方程的阶**. 如果一个函数 $y=\phi(x)$ 代入微分方程，使方程成为恒等式，我们叫这个函数 $y=\phi(x)$ 为**微分方程的解**. 微分方程的解通常也称为**微分方程的积分**. 微分方程的求解过程也称为求微分方程的积分. 如果微分方程的解能表达为初等函数的有限组合或初等函数的积分，则说这微分方程是可积的.

在微分方程的解中往往包含了任意常数，如 $y=x^2$ 是微分方程 $y'=2x$ 的解，$y=x^2+C$ 也是它的解，又如 $y=e^x$，$y=e^{-x}$ 是微分方程 $y''-y=0$ 的解，$y=Ce^x$，$y=C_1e^x+C_2e^{-x}$ 也都是它的解. 微分方程的解中所包含的独立的任意常数① 的个数恰好与微分方程的阶数相等时，我们称这样的解为方程的**通解**. 例如 $y=x^2+C$ 与 $y=C_1e^x+C_2e^{-x}$ 便分别是一阶微分方程 $y'=2x$ 与二阶微分方程 $y''-y=0$ 的通解. 一般 n 阶微分方程 (3) 的通解就可记为 $y=\phi(x,C_1,C_2,\cdots,C_n)$ 或 $\Phi(x,y,C_1,C_2,\cdots,C_n)=0$，其中 $C_1,C_2,\cdots,C_n$ 为 n 个独立的任意常数.

为了确定微分方程通解中的任意常数，常常需要一些附加条件. 对于一阶微分方程 $F(x,y,y')=0$，通常把条件："当自变量 $x=x_0$ 时，未知函数 $y=y_0$"叫作它的**初始条件**，又可记作 $y|_{x=x_0}=y_0$. 一般，n 阶微分方程(3)的初始条件为 $y|_{x=x_0}=y_0$，$y'|_{x=x_0}=y'_0$，$y''|_{x=x_0}=y''_0$，$\cdots$，$y^{(n-1)}|_{x=x_0}=y_0^{(n-1)}$. 往往用这组初始条件去确定其通解 $y=\varphi(x,C_1,C_2,\cdots,C_n)$ 或 $\Phi(x,y,C_1,C_2,\cdots,C_n)=0$ 中的任意常数 $C_1,C_2,\cdots,C_n$，从而得到 n 阶微分方程(3) 的一个

---

① 例如，对于 $y=C_1e^x+2C_2e^x$ 中的两个任意常数 C_1,C_2 就不是独立的，因为若令 $C=C_1+2C_2$，则可将 C_1,C_2 合并为一个任意常数 C，从而 $y=Ce^x$ 中只含有一个任意常数. 而 $y=C_1e^x+C_2e^{-x}$ 中的任意常数 C_1,C_2 则不能合并为一个，即 $y=C_1e^x+C_2e^{-x}$ 中含有两个独立的任意常数.

解. 通常把这个解叫做(3)的特解. 把求微分方程满足初始条件的特解问题叫做初值问题.

例 3 求微分方程 $y''=6x$ 满足初始条件 $y|_{x=1}=1$, $y'|_{x=1}=2$ 的特解.

解 在原方程两端积分两次，得方程的通解

$$y=x^3+C_1x+C_2,$$

以初始条件 $y|_{x=1}=1$，$y'|_{x=1}=2$ 代入，得关于 C_1，C_2 的代数方程组

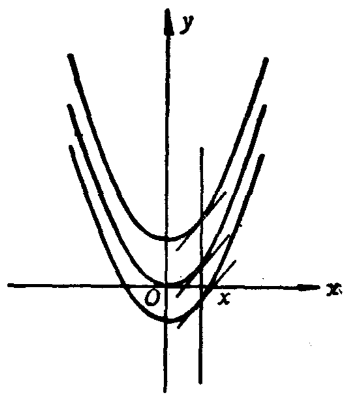

图 6-2

$$\begin{cases}C_1+C_2=0,\\ C_1=-1,\end{cases}$$

解此方程组得$C_1=-1$，$C_2=1$，故所求微分方程的特解为

$$y=x^3-x+1.$$

一阶微分方程的通解的几何意义是以任意常数 C 为参数的曲线族（其中每一条曲线都叫做微分方程的积分曲线）. 例如$y=x^2+C$ 就是以 C 为参数的抛物线族. 二阶微分方程的通解的几何意义是以任意常数 C_1，C_2 为参数的曲线族. 这些曲线族所满足的微分方程反映了各曲线族的共同性质. 例如在抛物线族 $y=x^2+C$ 中，用微分法得出 $y'=2x$，它就是 $y=x^2+C$ 满足的微分方程，它表示所有抛物线在点 x 的切线斜率相同(如图 6-2). 又如同心圆族 $x^2+y^2=C$，用微分法可得出它满足的微分方程是 $x+yy'=0$，它反映了圆的基本性质:圆周上任何一点的切线垂直于过该点的半径,因为过圆心及圆周上任一点的连线的斜率为$\dfrac{y}{x}$. 从这些例子我们还看到对于曲线族，只要设法用微分消去参数就

可以得到反映曲线族共同性质的微分方程. 例如双参数曲线族 $y=C_1e^x+C_2e^{-x}$,求两次导数并消去参数 C_1,C_2就可得到它所满足的微分方程 $y''-y=0$.

习 题 6-1

1. 说出下列各微分方程的阶数:

(1) $x(y')^2-2yy'+x=0$;

(2) $(y'')^3+5(y')^4-y^5+x^7=0$;

(3) $(x^2-y^2)dx+(x^2+y^2)dy=0$;

(4) $\dfrac{d\rho}{d\theta}+\rho=\sin^2\theta$;

(5) $xy'''+2y''+x^2y=0$.

2. 指出下列各题中的函数是否为所给微分方程的解:

(1) $xy'=2y$, $y=5x^2$;

(2) $(x+y)dx+xdy=0$, $y=\dfrac{C^2-x^2}{2x}$;

(3) $y''=x^2+y^2$, $y=\dfrac{1}{x}$;

(4) $y''-2y'+y=0$, $y=xe^x$.

3. 对下列各已知曲线族(C,C_1, C_2, C_3 都是任意参数)求出与它相应的微分方程:

(1) $(x-C)^2+y^2=1$;

(2) $y=Cx+C^2$;

(3) $y=C_1+C_2x+C_3x^2$;

(4) $xy=C_1e^x+C_2e^{-x}$.

4. 写出由下列条件确定的曲线所满足的微分方程:

(1) 曲线在点(x,y)的切线的斜率等于该点横坐标的平方;

(2) 曲线上任一点(x,y)的切线垂直于此点与原点的联线;

(3) 曲线上任一点的切线在两坐标轴间的线段均被切点所平分.

5. 用微分方程表示下述命题: 某种气体的气压P对于温度T的变化率与气压成正比,与温度的平方成反比.

第二节　一阶微分方程

一阶微分方程的一般形式为

$$F(x,y,y')=0,$$

如果可以解出导数，则方程可改写为

$$\frac{dy}{dx}=f(x,y).$$

最简单的情形是上述方程右端不显含 y，即

$$\frac{dy}{dx}=f(x), \tag{1}$$

在积分学中已经知道：如果 $f(x)$ 在 x 的某一区间 J 内连续，$x_0\in J$，则存在积分

$$y=\int_{x_0}^{x} f(x)dx+C\,(x\in J),$$

它就是微分方程(1)的解，其中 C 为任意常数．如果已知 $x=x_0$ 时 $y=y_0$，则可以从中确定出 $C=y_0$ 使 $y(x_0)=y_0$，即

$$y=\int_{x_0}^{x} f(x)dx+y_0,$$

这就是微分方程(1)的满足初始条件 $y|_{x=x_0}=y_0$ 的特解．

2.1　可分离变量的微分方程

如果一个一阶微分方程可以化成

$$g(y)dy=f(x)dx$$

的形式，则称原方程为**可分离变量的方程**．若 $g(y)$，$f(x)$ 连续，两边积分就得到 x 和 y 的方程

$$\int g(y)dy=\int f(x)dx,$$

积分后有一个任意常数 C，由上述方程所确定的函数 $y=y(x,C)$ 就是方程的通解．这种求解微分方程的方法叫做**分离变量法**．

例 1 求微分方程

$$x(1+y^2)dx-y(1+x^2)dy=0$$

的通解.

解 分离变量

$$\frac{ydy}{1+y^2}=\frac{xdx}{1+x^2},$$

两边积分 $$\int\frac{ydy}{1+y^2}=\int\frac{xdx}{1+x^2},$$

得 $$\ln(1+y^2)=\ln(1+x^2)+\ln C,$$

即 $$1+y^2=C(1+x^2),$$

这就是所求的通解的隐函数形式.

例 2 试解初值问题

$$\frac{dx}{dt}=4t\sqrt{x},\quad x(1)=1.$$

解 分离变量且积分,得

$$\int_1^x\frac{dx}{\sqrt{x}}=\int_1^t 4tdt,$$

$$2\sqrt{x}\,\Big|_1^x=2t^2\Big|_1^t,\quad \sqrt{x}=t^2,$$

即 $$x=t^4.$$

例 3 同某一曲线族中的每一条曲线都垂直相交的曲线，称为该曲线族的**正交轨线**. 试求抛物线族 $x=Cy^2$ 的正交轨线.

解 把抛物线方程 $x=Cy^2$ 两端对 x 求导，得到 $1=2Cyy'$. 并从两方程

$$\begin{cases}x=Cy^2,\\1=2Cyy'\end{cases}$$

中消去任意常数 C，得抛物线族 $x=Cy^2$ 满足的微分方程

$$y'=\frac{y}{2x},$$