101

C211.6-C
L63

应用随机过程

林元烈 编著

清华大学出版社

(京) 新登字 158 号

内 容 简 介

本书是现代应用随机过程教材，内容从初等入门到现代前沿，包括预备知识、泊松过程、离散时间马尔可夫链、离散鞅、连续时间马尔可夫链、随机微分方程与宽平稳过程等 8 章。本书可供高等院校高年级学生与研究生作为教材使用，也可供教师及工程技术人员参考。

图书在版编目(CIP)数据

应用随机过程/林元烈编著. —北京：清华大学出版社，2002
ISBN 7-302-05958-6
Ⅰ. 应…　Ⅱ. 林…　Ⅲ. 随机过程—高等学校—教材　Ⅳ. O211.6

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2002) 第 078695 号

出 版 者：清华大学出版社(北京清华大学学研大厦，邮编 100084)
http://www.tup.tsinghua.edu.cn
责任编辑：刘　颖
封面设计：常雪影
版式设计：刘　颖
印 刷 者：北京四季青印刷厂
发 行 者：新华书店总店北京发行所
开　　本：787×960 1/16　印张：23.25　字数：402 千字
版　　次：2002 年 11 月第 1 版　2002 年 11 月第 1 次印刷
书　　号：ISBN 7-302-05958-6/O・271
印　　数：0001～4000
定　　价：28.00 元

序　　言

《应用随机过程》一书是作者多年来在清华大学从事该门课程的教学与研究的经验基础上编著而成的研究生教材.

本教材力求突出以下几点:

1. 着眼于引发兴趣，使读者领悟其思想，感受其魅力与威力.

2. 着重于揭示概念的来源及背景，典型随机模型的提炼、特性刻画、应用背景以及发展的踪迹.

3. 主要用概率的观点与方法研究与领略若干最基本的但至今仍有旺气与潜力的随机过程的主要特征与风采.

4. 将条件数学期望作为现代随机过程的最基本的概念之一，并力求用初等的、便于直观确切理解的方法描述它的定义及重要性质. 由于现代随机过程及其应用领域常常更关心的是许多不同时刻随机变量之间的各种关系，而条件数学期望是刻画不同随机变量之间各种关系的最佳工具，因此随着现代科技的迅猛发展，条件数学期望将在其中发挥愈来愈重要的作用. 本教材力求对这种发展趋势予以及时的反映.

5. 对若干发展特别迅速，应用愈来愈广泛的分支，如鞅，布朗 (Brown) 运动与伊藤 (Itö) 随机积分，点过程等予以初步介绍.

6. 突出全概率公式（及其推广与各种变形）中所蕴含的基本思想与技巧，把它作为贯穿本教材的主导线索之一，并加以阐明和应用.

7. 反映若干新成果，可以作为教学与科研相结合的切入点.

本书是应用随机过程的入门教材，仅以初等概率论及高等数学、线性代数作为基础. 可作为高年级本科生及研究生的必修课教材，亦可作为研究生、本科生以及工程管理人员的参考书.

本书的编写与修改得到同仁和学生的鼓励、帮助与支持. 特别是汪荣鑫教授，陆璇副教授等给予了很多的鼓励、关心与支持. 研究生陈梅、刘建华、李敬逸、李必刚、康波大等为本书的打印、整理、修改与校对做了很多工作. 本

书的出版，得到了清华大学出版社的大力支持，特别是刘颖同志对稿件做了最后的校阅，花费了不少精力与时间．作者借此对以上人士表示衷心的感谢．限于作者水平，书中错误在所难免．敬请指正．

作 者

2002 年 4 月

目 录

试读结束，需要全本PDF请购买 www.ertongbook.com

第 1 章　预备知识与随机过程的基本概念

1.1　概　　率

概率论的一个基本概念是随机试验. 一个试验 (或观察), 若它的结果预先无法确定, 则称之为**随机试验**, 简称为**试验**(experiment). 所有试验的可能结果组成的集合, 称为**样本空间**, 记作 Ω. Ω 中的元素则称为**样本点**, 用 ω 表示. 由 Ω 的某些样本点构成的子集合, 常用大写字母 A, B, C 等表示, 由 Ω 中的若干子集构成的集合称为集类, 用花写字母 $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{F}$ 等表示.

由于并不是在所有的 Ω 的子集上都能方便地定义概率, 一般只限制在满足一定条件的集类上研究概率性质, 为此引入 σ 域的概念:

定义 1.1.1　设 $\mathcal{F}$ 为由 Ω 的某些子集构成的非空集类, 若满足:

(1) 若 $A \in \mathcal{F}$, 则 $A^C \in \mathcal{F}$, A^C 是 A 的补集, 即 $A^C = \bar{A} = \Omega - A$;

(2) 若 $A_n \in \mathcal{F}, n \in \mathbb{N}$, 则 $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{F}$.

则称 $\mathcal{F}$ 为σ **域**(σ 代数), 称 $(\Omega, \mathcal{F})$ 为**可测空间**.

容易验证, 若 $\mathcal{F}$ 为 σ 域, 则 $\mathcal{F}$ 对可列次交、并、差等运算封闭, 即 $\mathcal{F}$ 中的任何元素经可列次运算后仍属于 $\mathcal{F}$. 例: 集类 $\mathcal{F}_0 = \{\varnothing, \Omega\}$, $\mathcal{F}_1 = \{\varnothing, A, A^C, \Omega\}$ 及 $\mathcal{F}_2 = \{A: \forall A \subset \Omega\}$ 均是 σ 域, 但集类 $\mathcal{A} = \{\varnothing, A, \Omega\}$ 不是 σ 域.

通常最关心的是包含所要研究对象的最小 σ 域. 设 $\mathcal{A}$ 为由 Ω 的某些子集构成的集类. 一切包含 $\mathcal{A}$ 的 σ 域的交, 记为 $\sigma(\mathcal{A})$, 称 $\sigma(\mathcal{A})$ 为由 $\mathcal{A}$ 生成的 σ 域, 或称为包含 $\mathcal{A}$ 的最小 σ 域. 例: $\mathcal{A} = \{\varnothing, A, \Omega\}$, 则 $\sigma(\mathcal{A}) = \{\varnothing, A, A^C, \Omega\}$.

一维博雷尔(Borel)σ 域: 包含 $\mathbb{R}$ 上所有形如集合 $(-\infty, a]$ 的最小 σ 域称为一维博雷尔 σ 域, 记为 $\mathcal{B}$, 即 $\mathcal{B} = \sigma((-\infty, a], \forall a \in \mathbb{R})$.

定义 1.1.2　设 $(\Omega, \mathcal{F})$ 为可测空间, P 是一个定义在 $\mathcal{F}$ 上的集函数, 若满足:

(1) $P(A) \geqslant 0, \forall A \in \mathcal{F}$;　　(非负性)

(2) $P(\Omega) = 1$;　　(规一性)

(3) 若 $A_i \in \mathcal{F}, i = 1, 2, \cdots$, 且 $A_i A_j = \varnothing, \forall\, i \neq j$, 有

$$P\Big(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\Big) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i). \qquad \text{(可列可加性)}$$

则称 P 为可测空间 $(\Omega, \mathcal{F})$ 上的一个**概率测度**(probability measure), 简称**概率**(probability). 称 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ 为**概率空间**(probability space), 称 $\mathcal{F}$ 为事件域. 若 $A \in \mathcal{F}$, 则称 A 为**随机事件**(random event), 简称为**事件**, 称 $P(A)$ 为事件 A 的概率.

事件的概率刻画了事件出现可能性的大小. 概率的基本性质如下:

(1) $P(\varnothing) = 0, P(A^C) = 1 - P(A)$.

(2) 若 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 互不相容, 则

$$P\Big(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\Big) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i). \qquad \text{(有限可加性)}$$

(3) 对任意两个事件 A 及 B, 有

$$P(A \bigcup B) = P(A) + P(B) - P(AB),$$
$$P(A - B) = P(A) - P(AB).$$

(4) 若 $A \subset B$, 则 $P(A) \leqslant P(B)$.

(5) (若尔当 (Jordan) 公式) 对任意 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 有

$$P\Big(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\Big) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i) - \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} P(A_i A_j) + \sum_{1 \leqslant i < j < k \leqslant n} P(A_i A_j A_k) - \cdots + (-1)^{n+1} P(A_1 A_2 \cdots A_n).$$

$$P\Big(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\Big) \leqslant \sum_{i=1}^{n} P(A_i).$$

例 1 (1) $[0,1]$ 上的博雷尔概率空间. 设 $\Omega = [0,1]$, $\mathcal{F} = \mathcal{B}[0,1]$, 即 $\mathcal{B}[0,1]$ 是 $\mathcal{B}$ 局限在 $[0,1]$ 上的博雷尔 σ- 域. 称 $(\Omega, \mathcal{F}) = ([0,1], \mathcal{B}[0,1])$ 为 $[0,1]$ 上的博雷尔可测空间. 设在可测空间 $([0,1], \mathcal{B}[0,1])$ 上定义一概率测度 P, 它满足: 当 $\forall A = [a,b] \in \mathcal{B}[0,1]$ 时, $P(A) = b - a$, 称 $(\Omega, \mathcal{F}, P) = ([0,1], \mathcal{B}[0,1], P)$ 为 $[0,1]$ 上的博雷尔概率空间, 称 P 为 $[0,1]$ 上的博雷尔概率测度.

(2) 令 $B = [0,1]$ 上有理点全体, $\bar{B} = [0,1]$ 上无理点全体.

① 试证：$B \in \mathcal{F}, \bar{B} \in \mathcal{F}$;

② 用概率的定义与性质，求证：$P(B)=0, \quad P(\bar{B})=1$.

证明 $\forall a \in [0,1]$, 单点集 $a = \bigcap_{n=1}^{\infty}\left[a, a+\frac{1}{n}\right) \in \mathcal{B}[0,1] = \mathcal{F}$, 而 $B = 0 \bigcup \left\{\frac{m}{n}: 1 \leqslant m \leqslant n, n, m = \{1,2,\cdots\}\right\}$ 是可列单点集的并，故 $B \in \mathcal{F}$. 且 $\bar{B} = [0,1]-B \in \mathcal{F}$. 又 $\forall a \in [0,1], P(a)=0$, 由完全可加性知 $P(B)=0$, 而 $\bar{B}=[0,1]-B$, 故 $P(\bar{B})=1-0=1$. □

概率的一个重要性质是它具有连续性. 为此先引入事件列的极限.

一事件列 $\{A_n, n \geqslant 1\}$ 称为单调**增序列**, 若 $A_n \subset A_{n+1}, n \geqslant 1$; 称为单调**减序列**, 若 $A_n \supset A_{n+1}, n \geqslant 1$. 如果 $\{A_n, n \geqslant 1\}$ 是单调增序列，定义 $\lim\limits_{n\to\infty} A_n = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$. 如果 $\{A_n, n \geqslant 1\}$ 是单调减序列，定义 $\lim\limits_{n\to\infty} A_n = \bigcap_{i=1}^{\infty} A_i$.

连续性定理如下.

命题 1.1.1 若 $\{A_n, n \geqslant 1\}$ 是单调增序列 (或减序列), 则

$$\lim_{n\to\infty} P(A_n) = P\big(\lim_{n\to\infty} A_n\big).$$

证明 先设 $\{A_n, n \geqslant 1\}$ 为单调增序列，令

$$B_1 = A_1, \quad B_n = A_n\Big(\bigcup_{i=1}^{n-1} A_i\Big)^C = A_n A_{n-1}^C, \quad n > 1.$$

容易验证 $\{B_n, n \geqslant 1\}$ 互不相容. 且有 $\bigcup_{i=1}^{n} A_i = \bigcup_{i=1}^{n} B_i, n \geqslant 1$ 及 $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i = \bigcup_{i=1}^{\infty} B_i$, 故

$$\begin{aligned}
P\big(\lim_{n\to\infty} A_n\big) &= P\Big(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\Big) = P\Big(\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i\Big) = \sum_{i=1}^{\infty} P(B_i) \qquad \text{(可列可加性)}\\
&= \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} P(B_i) = \lim_{n\to\infty} P\Big(\bigcup_{i=1}^{n} B_i\Big)\\
&= \lim_{n\to\infty} P\Big(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\Big) = \lim_{n\to\infty} P(A_n). \qquad \Big(A_n = \bigcup_{i=1}^{n} A_i\Big)
\end{aligned}$$

若 $\{A_n, n \geqslant 1\}$ 为单调减序列，则 $\{A_n^C, n \geqslant 1\}$ 为单调增序列，于是

$$P\Big(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n^C\Big) = \lim_{n\to\infty} P(A_n^C),$$

由

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n^C = \Big(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n\Big)^C,$$

有

$$1 - P\Big(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n\Big) = \lim_{n\to\infty}(1 - P(A_n)),$$

即

$$P\Big(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n\Big) = \lim_{n\to\infty} P(A_n). \qquad \Box$$

下面是著名的 Borel-Cantelli 引理.

命题 1.1.2　设 $\{A_n, n \geqslant 1\}$ 是一事件序列，若 $\sum_{i=1}^{\infty} P(A_i) < \infty$, 则

$$P\Big(\limsup_{i\to\infty} A_i\Big) = 0,$$

其中 $\limsup\limits_{i\to\infty} A_i \triangleq \bigcap\limits_{n=1}^{\infty}\bigcup\limits_{i=n}^{\infty} A_i$.

证明　易知 $\bigcup\limits_{i=n}^{\infty} A_i$ 是关于 n 的单调减序列，故由命题 1.1.1 有

$$\begin{aligned} 0 \leqslant P\Big(\bigcap_{n=1}^{\infty}\bigcup_{i=n}^{\infty} A_i\Big) &= P\Big(\lim_{n\to\infty}\bigcup_{i=n}^{\infty} A_i\Big) \\ &= \lim_{n\to\infty} P\Big(\bigcup_{i=n}^{\infty} A_i\Big) \leqslant \lim_{n\to\infty}\sum_{i=n}^{\infty} P(A_i) = 0. \end{aligned} \qquad \Box$$

下面讨论事件间的一种重要关系，即事件的独立性问题.

两个事件 $A, B \in \mathcal{F}$, 若满足 $P(AB) = P(A)P(B)$, 称 A 与 B 相互独立. 容易证明下列命题等价：① A 与 B 独立；② A 与 B^C 独立；③ $P(A|B) = P(A)$; ④ $P(A|B^C) = P(A)$.

三个事件 $A, B, C \in \mathcal{F}$, 若满足

$$P(AB) = P(A)P(B), \quad P(AC) = P(A)P(C), \quad P(BC) = P(B)P(C)$$

及

$$P(ABC) = P(A)P(B)P(C),$$

试读结束，需要全本PDF请购买 www.ertongbook.com

称 A,B,C 相互独立. 请读者证明: 若 A,B,C 独立, 则 $A\bigcup B$ 与 C, AB 与 C, $A-B$ 与 C 相互独立.

n 个事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n\in\mathcal{F}$, 若对其中任意 $k(2\leqslant k\leqslant n)$ 个事件

$$A_{i_1},A_{i_2},\cdots,A_{i_k}(\text{其中}1\leqslant i_1\leqslant i_2\leqslant\cdots\leqslant i_k\leqslant n),$$

有 $P(A_{i_1}A_{i_2}\cdots A_{i_k})=P(A_{i_1})P(A_{i_2})\cdots P(A_{i_k})$, 称 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ **相互独立**.

类似可证明: 若 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 相互独立, 取 $1\leqslant m<n$, 记 $\mathcal{F}_1=\sigma(A_k,1\leqslant k\leqslant m),\mathcal{F}_2=\sigma(A_k,m+1\leqslant k\leqslant n)$. 任取 $B_1\in\mathcal{F}_1,B_2\in\mathcal{F}_2$, 则 B_1 与 B_2 独立.

命题 1.1.3 若 $\{A_n,n\geqslant 1\}$ 是相互独立的事件序列, 且 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}P(A_n)=\infty$, 则有

$$P\Big(\bigcap_{n=1}^{\infty}\bigcup_{i=n}^{\infty}A_i\Big)=1.$$

证明

$$P\Big(\bigcap_{n=1}^{\infty}\bigcup_{i=n}^{\infty}A_i\Big)=P\Big(\lim_{n\to\infty}\bigcup_{i=n}^{\infty}A_i\Big)=\lim_{n\to\infty}P\Big(\bigcup_{i=n}^{\infty}A_i\Big)=\lim_{n\to\infty}\Big[1-P\Big(\bigcap_{i=n}^{\infty}A_i^C\Big)\Big].$$

但

$$\begin{aligned}
P\Big(\bigcap_{i=n}^{\infty}A_i^C\Big)&=\prod_{i=n}^{\infty}P(A_i^C) && (\text{由独立性})\\
&=\prod_{i=n}^{\infty}(1-P(A_i))\leqslant\prod_{i=n}^{\infty}\mathrm{e}^{-P(A_i)} && (\text{由}1-x\leqslant \mathrm{e}^{-x},\quad x\geqslant 0)\\
&=\exp\Big(-\sum_{i=n}^{\infty}P(A_i)\Big)=0. && \Big(\text{因为}\sum_{i=n}^{\infty}P(A_i)=\infty\text{对所有}\,n\Big)
\end{aligned}$$

因此命题得证. □

1.2 随机变量、分布函数及数字特征

1. 随机变量与分布函数

考虑一样本空间 Ω, 记 $\mathbb{R}$ 为实数全体之集. 随机变量定义为:

定义 1.2.1 设 $(\Omega,\mathcal{F},P)$ 是一概率空间, $X(\omega)$ 是定义在 Ω 上的单值实函数, 如果对 $\forall a\in\mathbb{R}$, 有 $\{\omega\colon X(\omega)\leqslant a\}\in\mathcal{F}$, 则称 $X(\omega)$ 为**随机变量**(random variable).

这里有几点说明:

(1) $\{\omega: X(\omega) \leqslant a\}$ 是指所有满足 $X(\omega) \leqslant a$ 的样本点 ω 的集合, 定义要求 $\{\omega: X(\omega) \leqslant a\}$ 是 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ 的一个事件, 因而可定义它的概率.

(2) 定义中 ω 为自变量, 为了书写方便, 简记 $\{\omega: X(\omega) \leqslant a\} = \{X \leqslant a\} = \{X \in (-\infty, a]\}$. 以下把 $X(\omega)$ 记为 X, 一般随机变量符号用大写字母 X, Y, Z 等表示.

(3) $X(\omega)$ 满足 $\{\omega: X(\omega) \leqslant a\} \in \mathcal{F}$, 则易证: $\forall a, b \in \mathbb{R}, \{X > a\}, \{X < a\}, \{X = a\}, \{a < X \leqslant b\}, \{a \leqslant X < b\}, \{a < X < b\}, \{a \leqslant X \leqslant b\} \in \mathcal{F}$.

例 1 若 $(\Omega, \mathcal{F})$ 中的 $\mathcal{F} = \{\varnothing, A, A^C, \Omega\}$, $A \in \mathcal{F}$ 而 $A_1 \notin \mathcal{F}$, 容易验证 A_1 的示性函数 $I_{A_1}(\omega)$ 使 $\{I_{A_1} \leqslant 1/2\} \notin \mathcal{F}$, 故 $I_{A_1}(\omega)$ 对 $\mathcal{F}$ 而言不满足随机变量的定义.

例 2 给定 $(\Omega, \mathcal{F})$, 设 $\{B_k\}(0 \leqslant k < \infty)$ 是 Ω 的一个划分, 即 $B_k B_l = \varnothing (k \neq l)$; $\bigcup\limits_{k=1}^{\infty} B_k = \Omega$ 且 $B_k \in \mathcal{F}(0 \leqslant k < \infty)$, 定义 $X(\omega) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} x_k I_{B_k}(\omega)$, 则容易验证 $X(\omega)$ 是随机变量.

可以证明, $\forall B \in \mathcal{B}, \{\omega, X(\omega) \in B\} \in \mathcal{F}$ 等价于 $\forall a \in \mathbb{R}, \{\Omega, X(\omega) \leqslant a\} \in \mathcal{F}$. 参见 [21,22]. 简记 $X = X(\omega)$, 且记 $X^{-1}(B) = (\omega: X(\omega) \in B)$.

设 X 为 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ 上的随机变量, 对 $\forall x \in \mathbb{R}$, 定义

$$F(x) = P(X \leqslant x) = P(X \in (-\infty, x]),$$

称 $F(x)$ 为 X 的**分布函数**(distribution function).

若随机变量 X 的可能取值的全体是一可数集或有限集, 则称 X 是**离散型随机变量**.

对随机变量 X 的分布函数 $F(x)$, 若存在一非负函数 $f(x)$, 对 $\forall x \in \mathbb{R}$, 有

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(u)\,\mathrm{d}u,$$

则称 $f(x)$ 为随机变量 X 的**概率密度函数**(probability density function). 若 $f(x)$ 连续, 则

$$\frac{\mathrm{d}F(x)}{\mathrm{d}x} = f(x),$$

即

$$\lim_{h \to 0} \frac{P(x < X \leqslant x + h)}{h} = f(x),$$

或

$$P(x < X \leqslant x+h) = f(x)h + o(h).$$

以上关系是以后用所谓"微元法"求概率密度函数的依据：为求随机变量 X 的概率密度函数，先求 X 落在一个小区域 $(x, x+h]$ 上的概率 $P(x < X \leqslant x+h)$，然后令 $h \to 0$，求其极限

$$\lim_{h \to 0} \frac{P(x < X \leqslant x+h)}{h},$$

即得 $f(x)$.

二维随机变量 (X, Y) 的**联合分布函数** (joint distribution function)$F(x, y)$ 定义为

$$F(x, y) = P(X \leqslant x, Y \leqslant y).$$

X 和 Y 的**边缘分布**定义为

$$F_X(x) = P(X \leqslant x) = \lim_{y \to +\infty} F(x, y) = F(x, +\infty),$$

$$F_Y(y) = P(Y \leqslant y) = \lim_{x \to +\infty} F(x, y) = F(+\infty, y).$$

若存在一非负函数 $f(x, y)$, 对 $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$ 有

$$F(x, y) = \int_{-\infty}^{x} \int_{-\infty}^{y} f(u, v) \, \mathrm{d}u \, \mathrm{d}v,$$

则称 $f(x, y)$ 为 (X, Y) 的**联合概率密度函数**.

称随机变量 X 与 Y **相互独立** (independent), 若对 $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$, 有

$$F(x, y) = F_X(x) F_Y(y).$$

n 维随机向量 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 的**联合分布函数**定义为

$$F(x_1, x_2, \cdots, x_n) = P(X_1 \leqslant x_1, X_2 \leqslant x_2, \cdots, X_n \leqslant x_n).$$

若对 $\forall (x_1, x_2, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ 有 $F(x_1, x_2, \cdots, x_n) = F_1(x_1) F_2(x_2) \cdots F_n(x_n)$, 则称 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ **相互独立**. 这里 $F_i(x_i) = P(X_i \leqslant x_i)$.

可以证明，若 X, Y, Z 相互独立，则 $X \pm Y$ 与 Z 独立，$X \cdot Y$ 与 Z 独立，$X/Y (Y \neq 0)$ 与 Z 独立，更一般有 $g_1(X, Y)$ 与 $g_2(Z)$ 独立 (其中 $g_1(X, Y), g_2(Z)$ 可以是逐段单调函数或逐段连续函数).

2. 黎曼—斯蒂尔切斯积分

为以后表示简便，这里我们引出黎曼—斯蒂尔切斯 (Riemann-Stieltjes) 积分.

设 $F(x)$ 为 $(-\infty,+\infty)$ 上的单调不减右连续函数，$g(x)$ 为 $(-\infty,+\infty)$ 上的单值实函数，$\forall a<b$.

定义 1.2.2 任取分点 $a=x_0<x_1<x_2<\cdots<x_{i-1}<x_i<\cdots<x_n=b, \forall u_i\in[x_{i-1},x_i]$，作积分和式

$$\sum_{i=1}^{n} g(u_i)\Delta F(x_i)=\sum_{i=1}^{n} g(u_i)[F(x_i)-F(x_{i-1})].$$

令 $\lambda=\max\limits_{1\leqslant i\leqslant n}\Delta x_i=\max\limits_{1\leqslant i\leqslant n}(x_i-x_{i-1})$，若极限

$$J(a,b)=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} g(u_i)\Delta F(x_i)$$

存在，则记

$$J(a,b)=\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}F(x) \qquad \left(\text{或}\int_a^b g(x)F(\mathrm{d}x)\right),$$

称极限 $J(a,b)$ 为 $g(x)$ 关于 $F(x)$ 在 $[a,b]$ 上的 R-S 积分.

注 (1) $\lambda\to 0$ 意味着 $n\to\infty$，且最大子区间的长度趋于 0. (2) 当取 $F(x)=x$ 时，R-S 积分化为原来的黎曼 (Riemann) 积分，所以 R-S 积分是黎曼积分的推广.

当 $a\to-\infty, b\to+\infty$ 时，若极限

$$J(-\infty,+\infty)=\lim_{b\to\infty, a\to-\infty}\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}F(x)$$

存在，则称

$$J(-\infty,+\infty)=\int_{-\infty}^{+\infty} g(x)\,\mathrm{d}F(x) \qquad \left(\text{或}\int_{-\infty}^{+\infty} g(x)F(\mathrm{d}x)\right)$$

为 $g(x)$ 关于 $F(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上的 R-S 积分.

R-S 积分的基本性质：

(1) 当 $a<c_1<\cdots<c_n<b$ 时

$$\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}F(x)=\sum_{i=0}^{n}\int_{c_i}^{c_{i+1}} g(x)\,\mathrm{d}F(x)\quad (a=c_0,b=c_{n+1});$$

(2)

$$\int_a^b \sum_{i=1}^{n} g_i(x)\,\mathrm{d}F(x)=\sum_{i=1}^{n}\int_a^b g_i(x)\,\mathrm{d}F(x);$$

(3) 若 $g(x)\geqslant 0$, 且 $a<b$, 则

$$\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}F(x)\geqslant 0;$$

(4) 若 $F_1(x),F_2(x)$ 为两个分布函数, c_1,c_2 为常数. $c_1,c_2>0$, 则

$$\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}[c_1F_1(x)+c_2F_2(x)]=c_1\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}F_1(x)+c_2\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}F_2(x).$$

几个特例:

设 $F(x)$ 为 X 的分布函数.

(1) 若 $g(x)=1$, 则

$$\int_a^b \mathrm{d}F(x)=F(b)-F(a)=P(a<X\leqslant b).$$

(2) 若 X 为离散型随机变量, 即 $P(X=c_i)=p_i,\ i\in\{1,2,\cdots\}$, 则

$$F(x)=\sum_{c_i\leqslant x} p_i$$

是一跳跃型分布函数, 即 $F(x)$ 的变化只在 $c_1,c_2,\cdots$ 这些点且其跃度为 p_i, 则 R-S 积分

$$\int_{-\infty}^{\infty} g(x)\,\mathrm{d}F(x)=\sum_{n=1}^{\infty} g(c_n)[F(c_n+0)-F(c_n-0)]=\sum_{n=1}^{\infty} g(c_n)p_n$$

化成了一个级数.

3. 数字特征

(1) 随机变量的数学期望 (expectation or mean)

定义 1.2.3 设 X 为随机变量, $F(x)$ 为 X 的分布函数, 若 $\int_{-\infty}^{+\infty}|x|\,\mathrm{d}F(x)$ 存在, 则称

$$EX=\int_{-\infty}^{\infty} x\,\mathrm{d}F(x)$$

为随机变量 X 的**数学期望**(或称为 X 的均值).

性质 (1) 若 $(c_i, i=1,2,\cdots,n)$ 为常数, $X_i(i=1,2,\cdots,n)$ 为随机变量, 则

$$E\Big(\sum_{i=1}^{n} c_i X_i\Big) = \sum_{i=1}^{n} c_i E X_i.$$

性质 (2) 设 $g(x)$ 为 x 的函数, $F_X(x)$ 为 X 的分布函数, 若 $E[g(X)]$ 存在, 则

$$E[g(X)] = \int_{-\infty}^{\infty} g(x)\,\mathrm{d}F_X(x).$$

当 X 为离散型随机变量, 即 $P(X=x_n)=p_n(n\in\mathbb{N})$ 时, 则

$$EX = \sum_{n=1}^{\infty} x_n p_n,$$

即 EX 是 X 所有可能取值的加权平均.

当 X 为连续随机变量, 且有概率密度函数 $f(x)$ 时, 则

$$EX = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x)\,\mathrm{d}x.$$

(2) 方差 (variance)

定义 1.2.4 令 $DX \triangleq E(X-EX)^2 = EX^2-(EX)^2$, 称 DX 为随机变量 X 的**方差**(有时记 $DX = \operatorname{var} X = \sigma_X^2$).

DX 刻画了 X 取值的集中或分散程度.

(3) 协方差 (covariance)

定义 1.2.5 两个随机变量 (X,Y), 称

$$\operatorname{cov}(X,Y) \triangleq E[(X-EX)(Y-EY)] = E(XY)-(EX)(EY)$$

为 (X,Y) 的**协方差**.

若 X,Y 独立, 则 $E(XY)=EX\,EY$, 从而得 $\operatorname{cov}(X,Y)=0$. 于是, 若 $\operatorname{cov}(X,Y)\neq 0$, 则 X,Y 不独立. 因此 $\operatorname{cov}(X,Y)\neq 0$ 刻画了 X,Y 取值存在某种统计上的线性相关关系.

(4) 相关系数 (correlation coefficient)

定义 1.2.6 若 $0<DX=\sigma_X^2<\infty, 0<DY=\sigma_Y^2<\infty$, 称

$$\rho(X,Y) = \frac{\operatorname{cov}(X,Y)}{\sigma_X\sigma_Y}$$

试读结束，需要全本PDF请购买 www.ertongbook.com