●研究生用书●

NONLINEAR SOLID
COMPUTATIONAL MECHANICS

华中科技大学出版社

宋天霞　郭建生　杨元明

非线性固体计算力学

非线性固体计算力学

宋天霞 郭建生 杨元明

华中科技大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

非线性固体计算力学/宋天霞　郭建生　杨元明
武汉:华中科技大学出版社，2002年11月
ISBN 7-5609-2865-X

Ⅰ.非…
Ⅱ.①宋…　②郭…　③杨…
Ⅲ.非线性计算-固体力学-结构力学-高等学校-教材
Ⅳ.O342

非线性固体计算力学　　宋天霞　郭建生　杨元明

责任编辑:叶见欣　谢燕群　　封面设计:刘　卉
责任校对:封春英　　责任监印:张正林

出版发行:华中科技大学出版社
武昌喻家山　邮编:430074　电话:(027)87545012

录　　排:华中科技大学惠友科技文印中心
印　　刷:华中科技大学印刷厂

开本:850×1168　1/32　　印张:12.875　　插页:2　　字数:307 000
版次:2002年11月第1版　　印次:2002年11月第1次印刷　　印数:1～1 500
ISBN 7-5609-2865-X/O·273　　定价:21.80元

(本书若有印装质量问题,请向出版社发行部调换)

内 容 简 介

本书对“非线性固体计算力学”的理论与方法结合各类具体问题进行了系统地论述.

首先,介绍了线性有限元各类单元刚阵的工程显式及其刚度方程的四种解法;

其次,对两类结构(即金属结构和钢筋砼结构)的几何与物理非线性问题进行了较深入而适用的讨论;

最后,对两类复杂结构的连续变量和离散变量优化设计计算理论在深入计算研究的基础上,提出了四种适用而有效的方法,并列举了典型复杂实例计算.

本书是为工程力学、建工结构、船舶机械等专业的硕士和博士研究生学习“非线性计算力学”而编写的,亦是这类专业的研究生教材.

Abstract

This book systematically dicusses the nonlinear of solid computational mechanics of verious specific problems.

In the first part, we discuss the engineering guations of the elemental stiffness matrix in the linear finite element method and we introduce four solving process of total siffness equation.

In the second part, we discuss the nonlinear finite element calculation of the geometrically nonlinear, physically nonlinear problems for two kind of structures (metal-structures, keinforced concrete structures).

In the third part, we discuss continuous variable optimization, discrete variable optimization problems above-named two kind of structures and we introduce several calculation methods. We give out many practical examples.

This book is written for the postgraduates, and the Doctoral candidates in engineering mechanics, mechanical egineering, naval engineering, civil and structural engineering, etc. It can be also used as reference for engineers who are engaged in the nonlinear finite element analyses of various structures.

写在“研究生用书”出版10周年

在今天，面对科技的迅速发展，知识经济已见端倪，国际竞争也日趋激烈，显然，国家之间的竞争是国家综合实力的竞争，国家综合实力的竞争关键是经济实力的竞争，而经济实力的竞争关键又在于科技（特别是高科技）的竞争，科技（特别是高科技）的竞争归根结底是人才（特别是高层次人才）的竞争，而人才（特别是高层次人才）的竞争基础又在于教育。“百年大计，教育为本；国家兴亡，人才为基。”十六个字、四句话，确是极其深刻的论断。目前，国际形势清楚表明：我们国家的强大与民族的繁荣，主要立足于自己，以“自力更生”为主；把希望寄托于他人，只是一种不切实际的幻想。这里，我们决不是要再搞“闭关锁国”，搞“自我封闭”，因为那是没有出路的；我们强调的是要“自信，自尊，自立，自强”，要以“自力更生”为主，走自己发展的道路。

显然，知识经济最关键的是人才，是高层次人才的培养，而作为高层次人才培养的研究生教育就在一个国家的方方面面的工作中，占有十分重要的战略地位。可以说，没有研究生教育，就没有威伟雄壮的科技局面，就没有国家的强大实力，就没有国家在国际上的位置，就会挨打，就会受压，就会被淘汰，还说什么知识经济与国家强大?!

“工欲善其事，必先利其器。”教学用书是教学的重要基本工具与条件。这是所有从事教育的专家所熟知的事实。所以，正如许多专家所知，也正是原来的《“研究生用书”总序》中所指出，研究生教材建设是保证与提高研究生教学质量的重要环节，是一项具有战略性的基本建设。没有研究生的质量，就没有研究生教育的一切。

我校从1978年招收研究生以来，即着力从事于研究生教材与

教学用书的建设。积十多年建设与实践的经验，我校从 1989 年起，正式分批出版“研究生用书”。第一任研究生院院长陈珽教授就为之写了《“研究生用书”总序》，表达了我校编写这套用书的指导思想与具体要求，“要力求‘研究生用书’具备科学性、系统性、先进性”。后三任研究生院院长，也就是各任校长黄树槐教授、我本人和周济教授完全赞同这一指导思想与具体要求，从多方面对这套用书加以关心与支持。

我是十分支持出版“研究生用书”的。早在 1988 年我在为列入这套书中的第一本，即《机械工程测试·信息·信号分析》写“代序”时就提出：“一个研究生应该博览群书，博采百家，思路开阔，有所创见。”但这不等于他在一切方面均能如此，有所不为才能有所为。如果一个研究生的主要兴趣与工作不在“这一特定方面”，他也可以选择一本有关的书作为了解与学习这方面专业知识的参考；如果一个研究生的主要兴趣在“这一特定方面”，他更应选择一本有关的书作为主要学习用书，寻觅主要学习线索，并缘此展开，博览群书。这就是我赞成为研究生编写系列教学用书的原因。

目前，这套书自第一本于 1990 年问世以来，已经度过了 10 个春秋，出版了 8 批共 49 种，初步形成规模，逐渐为更多读者所认可。在已出版的书中，有 15 种分获国家级、部省级图书奖，有 16 种一再重印，久销不衰。采用此套书的一些兄弟院校教师纷纷来信，赞誉此书为研究生培养与学科建设做出了贡献，解决了他们的“燃眉之急”。我们感谢这些赞誉与鼓励，并将这些作为对我们的鞭策与鼓励，“衷心藏之，何日忘之？!”

现在，正是江南春天，“最是一年春好处”。华工园内，红梅怒放，迎春盛开，柳枝油绿，梧叶含苞，松柏青翠，樟桂换新，如同我们的国家正在迅猛发展、欣欣向荣一样，一派盎然生机。尽管春天还有乍寒时候，我们国家在前进中还有种种困难与险阻，来自国内与来自国外的阻挠与干扰，有的还很严峻；但是，潮流是不可阻挡的，春意会越来越浓，国家发展会越来越好。我们教师所编的、所著的、

所编著的这套教学用书，也会在解决前进中的种种问题中继续发展。然而，我们十分明白，这套书尽管饱含了我们教师的辛勤的长期的教学与科研工作的劳动结晶，作为教学用书百花园中的一丛鲜花正在怒放，然而总会有这种或那种的不妥、错误与不足，我衷心希望在这美好的春日，广大的专家与读者，不吝拨冗相助，对这套教学用书提出批评建议，予以指教启迪，为这丛鲜花除害灭病，抗风防寒，以进一步提高质量，提高水平，更上一层楼，我们不胜感激。我们深知，“一个篱笆三个桩”，没有专家的指导与支持，没有读者的关心与帮助，也就没有这套教学用书的今天。我衷心祝愿在我们学校第三次大发展的今天，在百年之交与千年之交的时候，这套教学用书会以更雄健的步伐，走向更美好的未来。

诗云：“嘤其鸣矣，求其友声。”这是我们的心声。

中国科学院院士

华中理工大学学术委员会主任

杨叔子

于华工园内

1999 年 5 月 15 日

前言

本书主要是作者近10年来在非线性结构近代设计计算理论与方法的科研与教学上所取得的成果的总结，是为工程力学、土木工程结构和大型金属结构等专业的硕士和博士研究生“非线性计算力学”课程的教学而撰写的。

编写本书的目的，是使研究生能比较系统地掌握“非线性计算力学”所涉及的近代基础理论和相应的计算过程与技术，了解它在非线性结构近代设计计算中的地位和作用，以及已有研究成果的应用状况和当前尚待进一步研究的课题。在电子计算机数值计算(简称电算)高度发展的今天，工程力学工作者和工程结构研究与设计人员较全面地掌握“非线性计算力学”的近代基础理论与应用技能，是解决非线性结构设计计算问题时所必不可少的。有关专业的研究生学习“非线性计算力学”，不仅能开阔眼界、启迪思路，而更重要的是能在提高“非线性计算力学”近代理论水平的同时，增强实际动手能力。因此，全书在叙述过程中，始终注意了理论与方法的实用性和设计计算过程处理的技巧性等。这也正是本书与其它各种有关非线性结构计算的论著所不同之处。事实上，仅从理论上讨论“非线性计算力学”是比较容易的，但要结合工程应用来讨论那就困难多了。因为要结合实际，就必须具备较丰富的工程结构设计计算经验，但积累这些经验，并非“一朝一夕”之事，而是一个较长期的计算实践过程。这也正是作者早想写这本书而又难以动笔的原因。这一次之所以贸然动笔，一方面是因为研究生教材的迫切需要，另一方面，是因为经过多年的计算实践，已初步积累了一些经验。

全书共6章，包括线性有限元法、非线性有限元法、弹塑性有

限元法、钢筋砼有限元法、连续变量结构优化设计和离散变量结构优化设计等内容。

诚然，由于作者水平和条件的限制，错误与不妥之处在所难免，敬希读者批评指正。

作　者

2002年6月

目　录

第 1 章　线性有限元法

线性有限元法的基本理论[1~6]，早已为人们所熟悉并被广泛应用，因此，在这里不再系统地论述. 但与非线性有限元有关的某些内容，例如，刚度方程、单元刚度矩阵（简称单元刚阵）以及主、从结点换位关系等方面的研究思路与进展，则结合工程应用形式予以提纲性地讨论.

1-1　刚 度 方 程

从单元到结构考虑到能量泛函极值时，就可得到刚度方程. 这里，仅以平面三角元为例来说明建立刚度方程的一般过程.

任意平面三角元，如图 1-1 所示. 任一结点的位移和结点力分别为

$$\{d_t\} = \{u_t \quad v_t\}^{\mathrm{T}}$$
$$\{F_t\} = \{X_t \quad Y_t\}^{\mathrm{T}} \quad (t = i,\ j,\ k) \tag{1-1}$$

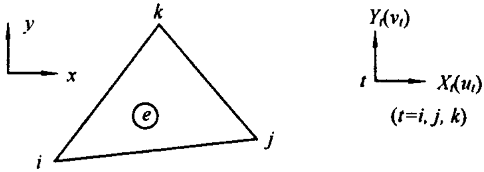

图 1-1　平面三角元

单元结点位移和结点力分别为

$$\{d_e\} = \{u_i \quad v_i \quad u_j \quad v_j \quad u_k \quad v_k\}^{\mathrm{T}}$$

$$\{F_e\} = \{X_i \quad Y_i \quad X_j \quad Y_j \quad X_k \quad Y_k\}^{\mathrm{T}} \tag{1-2}$$

单元能量泛函为

$$\Pi_e = \iiint \frac{1}{2}\{\varepsilon\}^{\mathrm{T}}\{\sigma\}\mathrm{d}V - \{d_e\}^{\mathrm{T}}\{F_e\} \tag{1-3}$$

式中，

$$\{\varepsilon\} = \{\varepsilon_x \quad \varepsilon_y \quad \varepsilon_{xy}\}^{\mathrm{T}} \tag{1-4}$$

称为弹性体内任一点的应变列阵；

$$\{\sigma\} = \{\sigma_x \quad \sigma_y \quad \sigma_{xy}\}^{\mathrm{T}} \tag{1-5}$$

称为弹性体内任一点的应力列阵.

若单元位移函数为

$$u = u(x,y), \quad v = v(x,y) \tag{1-6}$$

则

$$\{U\} = \{u \quad v\}^{\mathrm{T}} = [N]\{d_e\} \tag{1-7}$$

式中，$[N]$ ——单元的形函数矩阵. 式（1-7）为位移函数与单元结点位移之间的关系式.

$$\{\varepsilon\} = \{\varepsilon_x \quad \varepsilon_y \quad \varepsilon_{xy}\}^{\mathrm{T}} = [B]\{d_e\} \tag{1-8a}$$

式中，$[B]$ ——单元应变矩阵. 式（1-8a）为应变与单元结点位移之间的关系式.

$$\{\sigma\} = \{\sigma_x \quad \sigma_y \quad \sigma_{xy}\}^{\mathrm{T}} = [D]\{\varepsilon\} = [S]\{d_e\} \tag{1-8b}$$

式中，$[S] = [D][B]$ ——应力矩阵；$[D]$ ——弹性矩阵. 式（1-8b）为应力与单元结点位移关系.

将式（1-8）代入式（1-3），则有

$$\Pi_e = \frac{1}{2}\{d_e\}^{\mathrm{T}}\left(\iiint [B]^{\mathrm{T}}[D][B]\mathrm{d}V\right)\{d_e\} - \{d_e\}^{\mathrm{T}}\{F_e\} \tag{1-9}$$

根据势能原理，将上式对 $\{d_e\}$ 取变分，可得

$$\delta\Pi_e = \frac{\partial\Pi_e}{\partial\{d_e\}}\delta\{d_e\} = 0$$

由于 $\delta\{d_e\}$ 的任意性，故有

$$\frac{\partial\Pi_e}{\partial\{d_e\}} = \iiint [B]^{\mathrm{T}}[D][B]\mathrm{d}V\{d_e\} - \{F_e\} = 0$$

从而可知单元结点位移与结点力之间的关系为

$$[K_e]\{d_e\}=\{F_e\} \tag{1-10}$$

这即是单元的平衡方程，且

$$[K_e]=\iiint[B]^{\mathrm{T}}[D][B]\mathrm{d}V \tag{1-11}$$

称为单元刚阵.

将单元能量泛函式(1-9)对结构的所有离散单元予以叠加，则可得到整体能量泛函：

$$\Pi=\sum_{e=1}^{N}\Pi_e=\sum_{e=1}^{N}\frac{1}{2}\{d_e\}^{\mathrm{T}}\iiint[B]^{\mathrm{T}}[D][B]\mathrm{d}V\ \{d_e\}.$$

$$-\sum_{e=1}^{N}\{d_e\}^{\mathrm{T}}\{F_e\}$$

将式（1-11）代入上式，可得

$$\Pi=\sum_{e=1}^{N}\Pi_e=\sum_{e=1}^{N}\frac{1}{2}\{d_e\}^{\mathrm{T}}[K_e][d_e]-\sum_{e=1}^{N}\{d_e\}^{\mathrm{T}}\{F_e\} \tag{1-12}$$

按照单元刚阵组装成整体结构刚阵的“对号入座”规律以及结点力与结点载荷在结点上应力平衡的条件，可以得到

$$\sum_{e=1}^{m}\frac{1}{2}\{d_e\}^{\mathrm{T}}[K_e]\{d_e\}=\frac{1}{2}\{d\}^{\mathrm{T}}[K]\{d\} \tag{1-13}$$

$$\sum_{e=1}^{m}\{d_e\}^{\mathrm{T}}\{F_e\}=\{d\}^{\mathrm{T}}\{P\} \tag{1-14}$$

式中，

$$\{d\}=[u_1\ \ v_1\ \ u_2\ \ v_2\ \ \cdots\ \ u_s\ \ v_s]^{\mathrm{T}}\quad (s\ 为结点总数) \tag{1-15}$$

称为整体结构的结点位移；

$$\{P\}=[p_1\ \ p_2\ \ \cdots\ \ p_n]^{\mathrm{T}}\quad (n=2s) \tag{1-16}$$

称为整体结构的已知结点载荷.

将式（1-14）、（1-13）代入式（1-12），可得

$$\Pi = \sum_{e=1}^{m} \Pi_e = \frac{1}{2}\{d\}^{\mathrm{T}}[K]\{d\} - \{d\}^{\mathrm{T}}\{P\} \tag{1-17}$$

式中，

$$[K] = \sum_{e=1}^{N} [K_e] \tag{1-18}$$

式（1-17）即为整体结构能量泛函的工程实用显式.

根据势能原理，将式（1-17）对 $\{d\}$ 取变分，可得

$$[K]\{d\} = \{P\} \tag{1-19}$$

式（1-19）即是整体结构的刚度方程.

整体刚阵 $[K]$ 具有三个特性，即对称性、正定性和稀疏性，这里不做详细说明，读者可参阅有限元法的基础教材[4,1].

值得指出的是：

① 刚度方程式（1-19）尽管是针对平面三角元提出来的，但其思路、作法与形式具有普遍意义，换句话说，无论对哪一类型单元（例如，平面矩形元、空间块体元、板单元以及其它任何特定类型的高精度元）都可按照上述过程推导出刚度方程，且形式与式（1-19）完全相同.

② 不同类型的工程结构有限元分析问题，主要反映在采用不同类型单元上. 单元类型不同，其单元刚阵类型亦不同；单元刚阵类型不同，或反映在同一问题的计算精度不同上，或反映在不同类型问题的力学性态不同上.

③ 任一类型单元刚阵，其理论显式与工程显式是因果关系，但便于理解力学实质和动手应用的是工程形式，有了理论显式，并不等于一定可以得到工程显式，因此，研究有限元法的问题，实质上主要是研究单元刚阵理论显式和相应的工程显式问题[2].

④ 在刚度方程中引入边界条件和将一般外载转换成结点载荷等方面的技巧与做法在这里视为已知的基本常识，故不再专门提及；而常用的求解刚度方程的方法将在 1-4 节专门介绍.

1-2 单元刚阵研究

在这里，单元刚阵研究的主要内容是工程显式．因为有限元法发展到今天，单元类型及其相应的理论都已是十分成熟与丰富了，但它的工程显式则不尽然．事实上，不少工程技术人员在应用过程中，对如何将理论显式简便地转换成工程应用显式都感到十分棘手，而且对单元刚阵元素的几何意义与力学含义不甚理解，因而往往会出现：只能“依样画葫芦”地按已有程序系统进行操作，而不能进行创造性地应用．这一节也正是为了弥补这种不足而编写的．

1．单元刚阵的理论显式

任何具体单元都是图 1-2 所示单元的特殊形式．寻求单元刚阵理论显式的思路过程可分为以下几个方面．

（1）结点自由度数

结点的自由度数和形式是由单元应反映的力学（或物理）性态和计算精度（例如，反映变形、变形的变化率和计算精度等）确定的．若结点 i 的自由度数为 m，则该结点的广义位移为

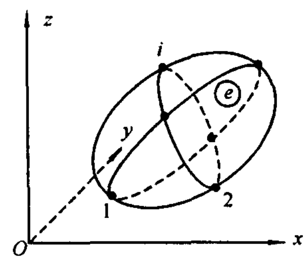

图 1-2 任意单元

$$\{d_{ei}\} = \{u_{ei}^{(1)} \quad u_{ei}^{(2)} \quad \cdots \quad u_{ei}^{(m)}\}^{\mathrm{T}} \quad (i = 1, 2, \cdots, s) \tag{1-20}$$

式中，s——单元结点个数；m——结点的自由度数；$u_{ei}^{(j)}$（$j = 1, 2, \cdots, m$）——结点 i 的第 j 个广义位移，即它可以是结点沿坐标轴真实移动的位移，或对坐标轴的真实转动的角位移，也可以是其它由结点坐标确定的非真实位移（如反映精度的“位移”）．同一单元的不同结点的自由度数可以不同，也可以相同．为了便于讨

论而又不失一般性，在这里假定各个结点的自由度相同.

对于某一类型结构的离散单元，式（1-20）是确定的. 此时，任一类型单元 e 的自由度数为

$$m_e = sm \tag{1-21}$$

（2）单元位移函数

若单元自由度数为 m_e，则按 Pascal 三角形及其有关规则选取位移函数多项式时，只能含有 m_e 个待定参数. 这里，以图 1-1 所示平面三角元为例来说明确定单元位移函数的全过程.

单元 3 结点的位移为

$$\{d_{et}\} = \{u_{et} \quad v_{et}\}^{\mathrm{T}} \quad (t = i,\ j,\ k)$$

相应结点自由度为 $m=2$，单元自由度数为 $m_e=3\times2=6$. 说明单元位移函数的多项式只能有 6 个待定参数，即按 Pascal 三角形选取多项式时，只能是仅含 6 个参数的线性项：

$$\left.\begin{aligned} u &= \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y \\ v &= \alpha_4 + \alpha_5 x + \alpha_6 y \end{aligned}\right\} \tag{1-22}$$

若已知 3 结点坐标为 $(x_t,\ y_t)$ $(t=i,\ j,\ k)$，代入上式则可得

$$\{\alpha\} = [\phi]\{d_e\} \tag{1-23}$$

式中，

$$\left.\begin{aligned} \{\alpha\} &= [\alpha_1 \quad \alpha_2 \quad \alpha_3 \quad \alpha_4 \quad \alpha_5 \quad \alpha_6]^{\mathrm{T}} \\ \{d_e\} &= [u_{ei} \quad v_{ei} \quad u_{ej} \quad v_{ej} \quad u_{ek} \quad v_{ek}]^{\mathrm{T}} \end{aligned}\right\} \tag{1-24}$$

$$[\phi] = \frac{1}{2\triangle_e}\begin{bmatrix} a_i & 0 & a_j & 0 & a_k & 0 \\ b_i & 0 & b_j & 0 & b_k & 0 \\ c_i & 0 & c_j & 0 & c_k & 0 \\ 0 & a_i & 0 & a_j & 0 & a_k \\ 0 & b_i & 0 & b_j & 0 & b_k \\ 0 & c_i & 0 & c_j & 0 & c_k \end{bmatrix} \tag{1-25}$$

以及 $a_i = x_j y_k - x_k y_j,\quad b_i = y_i - y_j,\quad c_i = -x_j + x_k$ (1-26)

（按顺序 $i \to j \to k \to i$ 转换）