北京大学数学教学系列丛书

2

研究生
数学基础课教材

二阶抛物型偏微分方程

陈亚浙 编著

北京大学出版社

北京大学数学教学系列丛书

二阶抛物型偏微分方程

陈亚浙　编著

北京大学出版社
·北　京·

图书在版编目(CIP)数据

二阶抛物型偏微分方程/陈亚浙编著. —北京：北京大学出版社，2003.1

(北京大学数学教学系列丛书)

ISBN 7-301-05369-X

Ⅰ.二… Ⅱ.陈… Ⅲ.二阶-抛物型方程：偏微分方程-高等学校-教材 Ⅳ.O175.23

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2002)第 036464 号

书　　　名：二阶抛物型偏微分方程
著作责任者：陈亚浙　编著
责 任 编 辑：刘　勇
标 准 书 号：ISBN 7-301-05369-X/O・0523
出 版 发 行：北京大学出版社
地　　　址：北京市海淀区中关村 北京大学校内　100871
网　　　址：http://cbs.pku.edu.cn
电　　　话：邮购部 62752015　发行部 62750672　编辑部 62752032
排　版　者：高新特激光照排中心　62637627
印　刷　者：北京大学印刷厂
经　销　者：新华书店
890×1240　A5 开本　9.75 印张　250 千字
2003 年 1 月第 1 版　2003 年 1 月第 1 次印刷
印　　　数：0001—4000 册
定　　　价：16.00 元

内 容 简 介

本书系统讲述二阶抛物型偏微分方程的基本理论、方法和应用。全书共分九章。内容包括 Campanato 空间，Sobolev 空间(关于 x 与 t 异性)，弱解的存在性、惟一性，Schauder 理论，L^p 理论，De Giorgi-Nash-Moser 估计，Krylov-Safonov 估计，散度型拟线性方程，完全非线性方程等。

本书比较完整地介绍了 Campanato 空间在二阶抛物型偏微分方程的应用，首先引进了关于抛物距离的 Campanato 空间，以它为工具给出了关于 x 与 t 异性的 Sobolev 空间 $W_p^{2,1}$ 的嵌入定理，建立了抛物型方程的 Schauder 理论，L^p 理论，然后与 De Giorgi-Nash-Moser 估计结合，证明了散度型拟线性抛物型方程解的相当丰满的正则性。对于非散度型的一般方程介绍了 Krylov-Safonov 估计并用它来讨论完全非线性方程。

本书可作为综合大学、高等师范院校数学系、应用数学系、力学系、物理系偏微分方程方向高年级大学生、研究生的教材或教学参考书；对于从事偏微分方程工作的数学工作者、科技工作者，本书也是一部较好的学习参考书。

作 者 简 介

陈亚浙　北京大学数学科学学院教授，博士生导师，1962 年毕业于北京大学数学力学系，长期从事偏微分方程的教学与科研工作。合作编写的《数学物理方程讲义》、《二阶椭圆型方程与椭圆型方程组》分别获教育部(教委)优秀教材奖。

序　言

自 1995 年以来，在姜伯驹院士的主持下，北京大学数学科学学院根据国际数学发展的要求和北京大学数学教育的实际，创造性地贯彻教育部"加强基础，淡化专业，因材施教，分流培养"的办学方针，全面发挥我院学科门类齐全和师资力量雄厚的综合优势，在培养模式的转变、教学计划的修订、教学内容与方法的革新，以及教材建设等方面进行了全方位、大力度的改革，取得了显著的成效。2001 年，北京大学数学科学学院的这项改革成果荣获全国教学成果特等奖，在国内外产生很大反响。

在本科教育改革方面，我们按照加强基础、淡化专业的要求，对教学各主要环节进行了调整，使数学科学学院的全体学生在数学分析、高等代数、几何学、计算机等主干基础课程上，接受学时充分、强度足够的严格训练；在对学生分流培养阶段，我们在课程内容上坚决贯彻"少而精"的原则，大力压缩后续课程中多年逐步形成的过窄、过深和过繁的教学内容，为新的培养方向、实践性教学环节，以及为培养学生的创新能力所进行的基础科研训练争取到了必要的学时和空间。这样既使学生打下宽广、坚实的基础，又充分照顾到每个人的不同特长、爱好和发展取向。与上述改革相适应，积极而慎重地进行教学计划的修订，适当压缩常微、复变、偏微、实变、微分几何、抽象代数、泛函分析等后续课程的周学时。并增加了数学模型和计算机的相关课程，使学生有更大的选课余地。

在研究生教育中，在注重专题课程的同时，我们制定了 30 多门研究生普选基础课程（其中数学系 18 门），重点拓宽学生的专业基础和加强学生对数学整体发展及最新进展的了解。

教材建设是教学成果的一个重要体现。与修订的教学计划相配合，我们进行了有组织的教材建设。计划自 1999 年起用 8 年的时间

修订、编写和出版40余种教材。这就是将陆续呈现在大家面前的《北京大学数学教学系列丛书》。这套丛书凝聚了我们近十年在人才培养方面的思考，记录了我们教学实践的足迹，体现了我们教学改革的成果，反映了我们对新世纪人才培养的理念，代表了我们新时期的数学教学水平。

经过20世纪的空前发展，数学的基本理论更加深入和完善，而计算机技术的发展使得数学的应用更加直接和广泛，而且活跃于生产力第一线，促进着技术和经济的发展，所有这些都正在改变着人们对数学的传统认识，同时也促使数学研究的方式发生巨大变化。作为整个科学技术基础的数学，正突破传统的范围而向人类一切知识领域渗透。作为一种文化，数学科学已成为推动人类文明进化、知识创新的重要因素，将更深刻地改变着客观现实的面貌和人们对世界的认识。数学素质已成为今天培养高层次创新人才的重要基础。数学的理论和应用的巨大发展必然引起数学教育的深刻变革。我们现在的改革还是初步的。教学改革无禁区，但要十分稳重和积极；人才培养无止境，既要遵循基本规律，更要不断创新。我们现在推出这套丛书，目的是向大家学习。让我们大家携起手来，为提高中国数学教育水平和建设世界一流数学强国而共同努力。

张 继 平

2002年5月18日

于北京大学蓝旗营

前　言

1989 年以来，作者在北京大学及计算数学与应用物理研究所给研究生多次讲授“抛物型偏微分方程”课程，他们大多修过我的另一课程“椭圆型偏微分方程”，为了避免太多的重复，必须采用显著不同的途径，当时虽然也有一些采用 Campanato 空间方法研究抛物型方程的文章，但还未见有比较系统的材料，我就萌生了利用关于抛物距离的 Campanato 空间串起抛物型偏微分方程主要内容的想法，在阅读了 Giaquinta & Giusti 文[14]中解决散度型拟线性椭圆型方程弱解的 $C^{1,\alpha}$ 全局正则性的 Campanato 空间技巧之后，更坚定了我的想法。当时就写了本书的前七章，即线性方程部分作为当时的讲稿。后来因为身体不佳没有再动笔。最近两年才续写了散度型拟线性方程与完全非线性方程两部分。

本书的材料是这样构成的：第一章是关于抛物距离的 Campanato 空间，它是 Da Prato[8]结果的一个特例；第二章我们应用它建立了 $W_p^{2l,l}(Q_T)$ 的嵌入定理；第三章应用 Galerkin 方法建立弱解的存在惟一性；第四、五章的 Schauder 理论与 L^p 理论基本上是 Campanato 本人的结果；第六章散度型方程的 De Giorgi-Nash-Moser 估计大致来自于 Ladyzhenskaya 等人的工作（参见文献[23]），我们加上了局部 L^∞ 估计与 Harnack 不等式；第七章抛物型方程的 Alexandrof-Bakel'man-Pucci 型极值原理采用的是 Tso[31]的简化证明，Krylov-Safonov 估计基本上是采用他们的原创证明；第八章散度型拟线性方程在可控增长条件下与自然增长条件下弱解的存在性是综合了 Ladyzhenskaya 等人[23]的工作与周蜀林[33]的文章，正则性的结果是上面提到的文[14]在抛物型方程的推广；第九章讨论了非散度拟线性方程与完全非线性方程古典解的存在性，大多采用 Krylov 原来的方法，也有一些是我们补充的证明，最后用凝固法与多项式逼近得到 $C^{2+\alpha,1+\alpha/2}$ 估计是 Caffarelli

在研究粘性解时给出的。

本书作为教材,为了简单明了,除了 $V_2(Q_T)$ 等少数函数空间外,我们基本上没有提到关于 x 与 t 不同幂次的空间;只讨论了第一初边值问题与初值问题,没有涉及其他初边值问题;对于一些重要课题如渐近分析,blow-up 问题等未加讨论,只集中于解的存在性、惟一性及正则性;对于一些应用课题如自由边界问题、渗流问题等也未加涉及。作者学识有限,错误在所难免,请读者提出宝贵意见。

这里我要感谢同济大学姜礼尚教授,作为他的学生,作者曾得到他很多指导;我也要感谢我们讨论班的同事吴兰成、黄少云、刘西垣、王耀东诸教授,作者曾就有关问题与他们进行过有益的讨论;我还要感谢刘嘉荃教授,他审阅了初稿,提出了宝贵的意见;最后我还要感谢刘勇编辑,他进行了非常细致的编辑加工与校对工作。

作　者

2002 年 12 月 14 日

目　录

第一章 Campanato 空间(关于抛物距离)

20 世纪 60 年代以来,Campanato 空间已成为研究椭圆型与抛物型偏微分方程(组)解的正则性的重要工具,本书将以它作为主要手段来介绍二阶抛物型方程的各种正则性理论.

为适应抛物型方程的需要,本章将研究关于抛物距离的 Campanato 空间,它是参考文献[8]的一个特例.

§1 Morrey 空间与 Campanato 空间

设 $\boldsymbol{R}^n$ 是 n 维欧氏空间,其上的点记为 $x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)$, 又引入时间变量 t, 构成 $n+1$ 维空间 $\boldsymbol{R}^{n+1}$,其上的点记为 (x,t), 简记为 $X=(x,t)$. 有时为明确 t 是 X 点的时间变量,又写 $X=(x,t_X)$. 在 $\boldsymbol{R}^{n+1}$ 中引进距离

$$\delta(X,Y)=\max\{|x-y|,|t_X-t_Y|^{1/2}\}, \tag{1.1}$$

它通常称为**抛物距离**. 我们在本章中以 $Q_R(X)$ 表示以 X 为心, R 为半径的关于抛物距离 $\delta(X,Y)$ 的球,即

$$\begin{aligned} Q_R(X) &=\{Y\in \boldsymbol{R}^{n+1} \mid \delta(X,Y)<R\} \\ &=B_R(x)\times(t_X-R^2,t_X+R^2), \end{aligned} \tag{1.2}$$

其中 $B_R(x)$ 表示以 x 为心、R 为半径的 n 维球.

设 D 是 $\boldsymbol{R}^{n+1}$ 中的有界区域. 对于任意的 $X\in D$, 记 $D(X,r)=D\cap Q_r(X)$. 又记 $d=\operatorname{diam}D$, 它是 D 关于距离 $\delta(X,Y)$ 的直径. 首先我们引入 Morrey 空间.

定义 1.1(Morrey 空间) 对于 $1\leqslant p<\infty$, $\theta\geqslant 0$,以 $L^{p,\theta}(D;\delta)$ 表示由 $L^p(D)$ 中满足

$$\|u\|_{L^{p,\theta}(D;\delta)}\overset{\text{def}}{=\!=}\left\{\sup_{\substack{X\in D\\ d\geqslant\rho>0}}|D(X,\rho)|^{-\theta}\int_{D(X,\rho)}|u(Y)|^p\mathrm{d}Y\right\}^{1/p}<\infty \tag{1.3}$$

的所有函数 u 所组成的赋范线性空间,以(1.3)作为空间的范数.

容易验证 $L^{p,\theta}(D;\delta)$ 是 Banach 空间.

引理 1.1 $L^{p,\theta}(D;\delta)$ 有以下性质:

(1) $L^{p,0}(D;\delta) \cong L^p(D)$;

(2) $L^{p,1}(D;\delta) \cong L^\infty(D)$;

(3) 如果 $\theta > 1$, 则 $L^{p,\theta}(D;\delta) \cong \{0\}$;

(4) 如果 $1 \leqslant p \leqslant q < \infty, (1-\theta)/p \geqslant (1-\sigma)/q$, 则

$$L^{q,\sigma}(D;\delta) \subset L^{p,\theta}(D;\delta),$$

其中 $A \subset B$ 不仅表示两个 Banach 空间的包含关系,且蕴含着 A 的范数强于 B 的范数, $A \cong B$ 表示 $A \subset B$ 与 $B \subset A$ 同时成立.

证明 性质(1)是显然的. 现证明(2). 容易看出

$$\| u \|_{L^{p,1}(D;\delta)} \leqslant \| u \|_{L^\infty(D)}.$$

另一方面,利用 Lebesgue 微分定理,如果 $u \in L^p(D)$, 则

$$|u(X)|^p = \lim_{\rho \to 0} |Q_\rho|^{-1} \int_{Q_\rho(X)} |u(Y)|^p \mathrm{d}Y, \quad \text{a.e. } X \in D. \quad (1.4)$$

因此我们又有

$$\| u \|_{L^\infty(D)} \leqslant \| u \|_{L^{p,1}(D;\delta)}.$$

性质(2)得证. 设 $u \in L^{p,\theta}(D;\delta)$, 其中 $\theta > 1$. 对于任意 $\rho > 0$, 当 $Q_\rho(X) \subset D$ 时,由范数的定义,我们有

$$|Q_\rho|^{-1} \int_{Q_\rho(X)} |u(Y)|^p \mathrm{d}Y \leqslant |Q_\rho|^{\theta-1} \| u \|_{L^{p,\theta}(D;\delta)}.$$

在上式中令 $\rho \to 0$, 注意到(1.4),则有

$$|u(X)|^p \leqslant 0, \quad \text{a.e. } X \in D.$$

这就蕴含着性质(3). 至于性质(4),只需应用 Hölder 不等式.

定义 1.2(Campanato 空间) 对于 $p \geqslant 1, \theta \geqslant 0$, 以 $\mathscr{L}^{p,\theta}(D;\delta)$ 表示由 $L^p(D)$ 中满足

$$[u]_{\mathscr{L}^{p,\theta}(D;\delta)} \xlongequal{\text{def}} \left\{ \sup_{\substack{X \in D \\ d \geqslant \rho > 0}} |D(X,\rho)|^{-\theta} \int_{D(X,\rho)} |u(Y) - u_{X,\rho}|^p \mathrm{d}Y \right\}^{1/p} < \infty \quad (1.5)$$

的所有函数 u 组成的赋范线性空间,其上的范数定义为

$$\|u\|_{\mathscr{L}^{p,\theta}(D;\delta)} \xlongequal{\text{def}} \left\{\|u\|^p_{L^p(D)} + [u]^p_{\mathscr{L}^{p,\theta}(D;\delta)}\right\}^{1/p}. \tag{1.6}$$

在(1.5)中 $u_{X,\rho}$ 表示 u 在 $D(X,\rho)$ 上的积分平均值，即

$$u_{X,\rho} = ⨍_{D(X,\rho)} u(Y)\mathrm{d}Y = |D(X,\rho)|^{-1}\int_{D(X,\rho)} u(Y)\mathrm{d}Y. \tag{1.7}$$

以后通常用以下记号表示积分平均值

$$u_A = ⨍_A u(Y)\mathrm{d}Y = |A|^{-1}\int_A u(Y)\mathrm{d}Y, \tag{1.8}$$

其中 A 是 $\boldsymbol{R}^{n+1}$ 的可测集，$|A|$ 是 A 的 Lebesgue 测度.

Campanato 空间也是 Banach 空间. 它也有以下性质：如果 $1\leqslant p\leqslant q<\infty$，$(1-\theta)/p\geqslant(1-\sigma)/q$，则

$$\mathscr{L}^{q,\sigma}(D;\delta)\subset\mathscr{L}^{p,\theta}(D;\delta).$$

关于其他更深刻的性质我们将在后面两节讨论.

定义 1.3(Hölder 空间) 对于 $0<\alpha\leqslant 1$，以 $C^\alpha(\overline{D};\delta)$ 表示满足

$$[u]_{\alpha;D} \xlongequal{\text{def}} \sup_{\substack{X\in D\\ d\geqslant\rho>0}} \frac{|u(X)-u(Y)|}{\delta(X,Y)^\alpha} < \infty \tag{1.9}$$

的所有函数 u 组成的线性空间，其上赋予范数

$$|u|_{\alpha;D} \xlongequal{\text{def}} \sup_D |u| + [u]_{\alpha,D}. \tag{1.10}$$

$C^\alpha(\overline{D};\delta)$ 也是 Banach 空间，显然

$$C(\overline{D})\supset C^\alpha(\overline{D};\delta).$$

关于 Hölder 空间的性质，我们将在第四章讨论，本章仅仅说明它与 Campanato 空间的关系.

§ 2 当 $\theta\neq 1$ 时，$\mathscr{L}^{p,\theta}(D;\delta)$ 的性质

为了进一步研究 $\mathscr{L}^{p,\theta}(D;\delta)$ 的性质，我们必须要求 D 的边界有一定的正则性.

定义 2.1 区域 D 称为(A)**型的**，如果存在常数 $A>0$，使得对于任意 $X\in D$，$0<\rho\leqslant\mathrm{diam}D$，都有

$$|D(X,\rho)|\geqslant A|Q_\rho(X)|. \tag{2.1}$$

以下是 Campanato 空间最重要的结果：

定理 2.1 设 D 是(A)型区域, $p \geqslant 1$, 则

(1) 当 $0 \leqslant \theta < 1$ 时, $L^{p,\theta}(D;\delta) \cong \mathscr{L}^{p,\theta}(D;\delta)$;

(2) 当 $1 < \theta \leqslant 1 + \dfrac{p}{n+2}$ 时, $\mathscr{L}^{p,\theta}(D;\delta) \cong C^{\alpha}(\overline{D};\delta)$, 这里

$$\alpha = (n+2)(\theta-1)/p.$$

我们在下面经常用到以下初等不等式: 设 $a>0, b>0, p \geqslant 1$, 则

$$(a+b)^p \leqslant 2^{p-1}a^p + 2^{p-1}b^p.$$

为证明定理 2.1,我们需要以下三个引理:

引理 2.2 设 D 是(A)型区域, $u \in \mathscr{L}^{p,\theta}(D;\delta)$, 则对于任意 $0 < \rho < R \leqslant \mathrm{diam} D$, 存在 $C \geqslant 1$ 使得

$$|u_{X,\rho} - u_{X,R}| \leqslant CR^{\theta(n+2)/p}\rho^{-(n+2)/p}[u]_{\mathscr{L}^{p,\theta}(D;\delta)}, \qquad (2.2)$$

其中 C 仅依赖于 n, θ, p 与(2.1)中的常数 A, $u_{X,R}$ 按式(1.7)定义.

证明 对于任意 $Y \in D(X,\rho)$, 我们有

$$|u_{X,\rho} - u_{X,R}|^p \leqslant 2^{p-1}\{|u_{X,\rho} - u(Y)|^p + |u(Y) - u_{X,R}|^p\},$$

不等式两边关于 Y 在 $D(X,\rho)$ 上积分,可得

$$\begin{aligned}
&|u_{X,\rho} - u_{X,R}|^p |D(X,\rho)| \\
&\leqslant 2^{p-1}\left\{\int_{D(X,\rho)} |u(Y) - u_{X,\rho}|^p \mathrm{d}Y + \int_{D(X,R)} |u(Y) - u_{X,R}|^p \mathrm{d}Y\right\} \\
&\leqslant 2^p |D(X,R)|^{\theta} [u]^p_{\mathscr{L}^{p,\theta}(D;\delta)}.
\end{aligned}$$

应用(A)型区域的性质,立即得到

$$|u_{X,\rho} - u_{X,R}|^p \leqslant \frac{2^p \omega_n^{\theta-1}}{A} R^{\theta(n+2)} \rho^{-(n+2)} [u]^p_{\mathscr{L}^{p,\theta}(D;\delta)},$$

其中 ω_n 是 n 维单位球的体积. 证毕.

引理 2.3 在引理 2.2 的条件下,对于任意正整数 m, 有

$$|u_{X,R} - u_{X,2^{-m}R}| \leqslant CR^{\alpha}|1 - 2^{-\alpha m}|[u]_{\mathscr{L}^{p,\theta}(D;\delta)}, \qquad (2.3)$$

其中 $\alpha = (n+2)(\theta-1)/p$, C 依赖于 n, p, θ 与(2.1)中的常数 A.

证明 由引理 2.2,

$$|u_{X,2^{-j}R} - u_{X,2^{-j+1}R}| \leqslant CR^{\alpha} 2^{\frac{\theta(n+2)-j\alpha p}{p}} [u]_{\mathscr{L}^{p,\theta}(D;\delta)}.$$

显然

$$|u_{X,R} - u_{X,2^{-m}R}| \leqslant \sum_{j=1}^{m} |u_{X,2^{-j}R} - u_{X,2^{-j+1}R}|$$

$$\leqslant CR^{\alpha}2^{\theta(n+2)/p}[u]_{\mathscr{L}^{p,\theta}(D;\delta)}\sum_{j=1}^{m}2^{-j\alpha}$$
$$\leqslant CR^{\alpha}|1-2^{-\alpha m}|[u]_{\mathscr{L}^{p,\theta}(D;\delta)},$$

这即为所求. 证毕.

引理 2.4 在引理 2.2 的条件下，当 $\theta<1$ 时，我们有

$$|u_{X,R}|\leqslant|u_D|+CR^{\alpha}[u]_{\mathscr{L}^{p,\theta}(D;\delta)},\tag{2.4}$$

其中 $\alpha=(n+2)(\theta-1)/p$，C 依赖于 n,p,θ 与(2.1)中的常数 A.

证明 记 $d=\mathrm{diam}D$ (关于距离 $\delta(X,Y)$). 对于 $0<R\leqslant\mathrm{diam}D$，必存在 $m\geqslant0$ 使得

$$2^{-(m+1)}d\leqslant R\leqslant2^{-m}d.\tag{2.5}$$

显然

$$|u_{X,R}|\leqslant|u_{X,R}-u_{X,2^{-m}d}|+|u_{X,2^{-m}d}-u_{X,d}|+|u_D|,\tag{2.6}$$

应用引理 2.2 与式(2.5)得

$$|u_{X,R}-u_{X,2^{-m}d}|\leqslant C(2^{-m}d)^{\frac{\theta(n+2)}{p}}R^{\frac{-(n+2)}{p}}[u]_{\mathscr{L}^{p,\theta}(D;\delta)}$$
$$\leqslant CR^{\alpha}2^{\frac{\theta(n+2)}{p}}[u]_{\mathscr{L}^{p,\theta}(D;\delta)}.$$

应用引理 2.3 并注意到 $\alpha<0$，我们有

$$|u_{X,2^{-m}d}-u_{X,d}|\leqslant Cd^{\alpha}|1-2^{-\alpha m}|[u]_{\mathscr{L}^{p,\theta}(D;\delta)}$$
$$\leqslant2CR^{\alpha}[u]_{\mathscr{L}^{p,\theta}(D;\delta)}.$$

将上面两个估计代入式(2.6)立即得到式(2.4). 证毕.

定理 2.1 的证明 我们首先证明第一个结论. 设 $0\leqslant\theta<1$，$u\in L^{p,\theta}(D;\delta)$. 由于

$$\int_{D(X,\rho)}|u(Y)-u_{X,\rho}|^p\mathrm{d}Y$$
$$=\int_{D(X,\rho)}\left|⨍_{D(X,\rho)}(u(Y)-u(Z))\mathrm{d}Z\right|^p\mathrm{d}Y$$
$$\leqslant2^p\int_{D(X,\rho)}|u(Y)|^p\mathrm{d}Y,$$

因此

$$[u]_{\mathscr{L}^{p,\theta}(D,\delta)}\leqslant2\|u\|_{L^{p,\theta}(D;\delta)},$$