

计算流体力学的 若干新方法

刘儒勋 舒其望 著

GM



科学出版社

www.sciencep.com

内 容 简 介

本书将深入地介绍当代偏微分方程数值方法的新发展,特别是其中最具有理论意义和实用价值的间断解或弱解的数值方法,以及我们面临的新课题和挑战。例如差分方法中 Roe 的 Riemann 解算子方法, Van Leer 的 MUSCL 方法, Collela 和 Woodward 的 PPM 方法,高分辨率方法包括 TVD、TVB、ENO 和 weighted ENO 方法等等;有限体积方法,特别是间断解的非结构网格有限体积方法,以及非结构网格的生成和有关软件的应用;几种重要而有很大发展的非标准的有限元方法:混合元、时空元、间断有限元和运动元方法。特别是今天国外数值方法研究中,计算力学和计算物理课题中,非常热门的方向——活动界面追踪问题的数值模拟方法和活动界面的重构技术,本书在国内第一次比较全面地进行了讨论,并进行了实际的计算实验。本书的宗旨是面向具有一定数值方法基本知识和计算实践经验,从事科学和工程计算的科研工作者和大学本科高年级学生、研究生,介绍当代偏微分方程数值方法和计算流体力学方法的最新发展和新课题。

图书在版编目(CIP)数据

计算流体力学的若干新方法/刘儒勋,舒其望著. —北京:科学出版社, 2003.4

(研究生数学教学系列(理工类))

ISBN 7-03-010645-8

I. 计… II. ①刘… ②舒… III. 计算流体力学—研究生—教材
IV. O35

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2002)第 050533 号

责任编辑:杨 波 李鹏奇 / 责任校对:宋玲玲

责任印制:安春生 / 封面设计:黄华斌 陈 敬

科学出版社 出版

北京东黄城根北街16号

邮政编码:100717

<http://www.sciencep.com>

新蕾印刷厂 印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

2003年4月第 二 版 开本: B5(720×1000)

2003年4月第一次印刷 印张: 16

印数: 1—2 500 字数: 299 000

定价: 32.00 元

(如有印装质量问题,我社负责调换〈新欣〉)

前 言

当代计算科学的发展,引起或者正在引起整个科学,从内容、方法到研究手段上的改变,也将导致科学的重新分化和组合. 计算科学的研究已经不能脱离具体的应用学科,因为只有这样才有生命力,才会有所开拓和创新. 我们已经看到,计算科学方法在许多学科的应用、结合,展现了相关学科的新形势,形成了该学科的新方向. 同样地,其他学科向计算科学的渗透,也开辟了计算科学的相应的研究方向.

计算流体力学自从 20 世纪 60 年代兴起以来,由于和流体力学的日益完美的结合,蓬蓬勃勃生机勃勃. 计算流体的实践极大地推动了计算科学的深化和发展,计算科学的研究和创新也为计算流体不断提供着新方法和理论依据.

非线性微分方程的数值计算和数值模拟方法,尤其是计算流体中,介质面、激波等等运动界面问题,或者间断解问题的数值模拟,是极为迫切的,也是计算流体最为困难的任务. 因而这方面的计算科学新方法、新思想和理论也就应运而生,其发展和创新的势头,几乎可与计算机科学的发展媲美.

面对迅速发展的计算科学方法,特别是这些方法美妙的应用效果和实际价值,我们有一种强烈的愿望,即将他们比较系统地写出来,介绍和普及给从事科学、工程计算和进行计算机数值模拟实验的同行们,希望对他们的实际工作和研究有所帮助. 但是,当真正写起来的时候,我们才真实地感到难度之大实非所想. 因为其内容和方法之浩瀚,发展和更新之迅猛,使我们写出来的书稿免不了会挂一漏万,有局限片面之嫌. 为此,我们除了回顾十多年来的资料积累和经验,又对近两年来的研究工作进行了全面的调研和文献的查阅,还开设了有关的研究生课程和讨论班,如“高分辨率方法和间断解问题”、“计算流体动力学方法的新发展”、“非结构网格生成方法和应用软件”、“有限体积方法”、“间断 Galerkin 有限元方法”和“运动界面追踪问题的数值方法”. 作者之一——美国布朗大学应用数学系主任舒其望博士,也回国开设了有关的专题培训班“ENO 和 weighted ENO”,“间断 Galerkin 有限元方法”,等等. 特别是我们的众多博士、硕士研究生,以极大的热情和效率进行了大量的实际应用计算和实践,使我们掌握了丰富的数据资料和分析结果. 这一切为我们写作本书提供了大量的资料.

我们通过教学的实践,科研的实践,实际应用的实践,找到差距和缺陷,再

不断地修改、丰富和完善,目的是能够提供给读者一本有理论意义、使用价值和启发性质的计算流体力学中当代数值模拟方法的参考书.如果能够为“各行各业”同行的教学、科研和工作起到一点助益,为国家的人才培养、经济建设和高新技术的发展有所奉献,我们将得到慰藉,也会受到莫大的鼓舞和鞭策.

综上所述,本书的宗旨是为已经具有数值模拟和科学工程计算基础,特别是有初步数值模拟实践的读者,提供非线性微分方程的数值计算和数值模拟方法,特别是间断解问题和复杂现象的数值模拟方法.因而,对于计算流体、数值分析和计算方法的基本理论、格式的构造方法,譬如有限差分方法的基础理论,有限元方法的基础理论,间断解或弱解的理论,等等,将不再详细地介绍.关于这些内容读者也不难找到所需的参考书.

本书的内容着重于有限差分方法和有限体积方法类,有限元方法只是讨论了几个发展迅速、应用效果显著的非标准有限元方法,其中特别是间断 Galerkin 有限元和有限体积方法.至于异常重要的谱方法和正在兴起的一些新方法,限于我们的能力而不能包含,这也是一种遗憾.

具体安排是这样的:

在第一篇,介绍了有关的数学模型,有限差分方法构造和设计中的某些重要思想和概念,如特征线、特征方向和迎风(upwind)思想,间断关系(Rankine-Hugoniot jump condition)和熵条件(entropy condition, entropy inequality),以及数值方法的数值耗散和数值色散效应等.

第二篇,讨论间断解的数值方法的基本概念,这就是 Glimm 引入的 Riemann 问题概念和间断分解的思想,这是当代数值方法,特别是间断解数值方法的重要观点之一.另一种重要的概念是单元上的积分平均(cell-averaging)思想,它既是许多高分辨率方法(high resolution methods)的设计基础,也是有限体积方法和间断 Galerkin 有限元方法的重要思想方法.特别地,某些重要的数值方法,如 Van Leer 的 MUSCL, Collela 等的 PPM 方法等,正是基于这种观念进行构造的.

第三篇,比较集中地讨论了以 TVD、ENO 等方法为代表的高分辨率方法.其中必然涉及到 TVD 方法的数值通量(numerical flux)和限制函数(limiter)问题,以及 ENO 和 weighted ENO 方法的节点模板(stencil)的选择程序问题.

第四篇,针对现在发展迅速和应用广泛的非结构网格问题,介绍它的生成方法和基本思想.在非结构网格的剖分下,讨论当前应用效果明显的非结构网格有限体积方法.

第五篇,介绍几种非标准有限元方法:混合有限元、运动有限元、重要的间断 Galerkin 有限元方法和时空有限元(space-time FEM).其中间断 Galerkin

有限元方法日益显示了它的成功和应用价值。

第六篇,介绍一个当前备受关注的热门课题——运动界面追踪问题。扼要地讨论有关的数值模拟方法和运动界面的重构技术,以及运动界面追踪的具体应用。今天运动界面追踪问题的数值模拟,不仅是自由面和所谓 Stefan 问题,而且关系到生物、化学和材料加工等的内在微观结构的分析和洞察。

我们很希望在每一章,甚至每一节中,能够给读者提出进一步研究和发展的启示、问题和课题。因此,在每一章的最后,给出了有针对性的练习题,也列出了大量的参考文献,以备查阅、追踪,从而有所创新和开拓。

最后,作为附录,给出了几个 mathematics 的语言程序,用它可以生成某些实验格式的 modified PDE,利用它们来分析格式的内在性质。也列出了许多典型格式的特征,以供查询和参考。

我们还应当向我们的诸位博士和博士后表示谢意,李宏博士仔细地整理了第八章和第十三章,这两章是作者之一在中国科学技术大学的两次课程内容,为此她付出了艰辛的劳动。张强博士写了时空有限元方法一章,汪继文博士在有限体积方法,王志峰硕士在运动界面的追踪方法一章的编写中都给予了很大的帮助。

我们特别要感谢国家自然科学基金和火灾科学国家重点实验室知识创新工程基金的资助,正是由于他们的资助,本书方能问世。

刘儒勋 舒其望

目 录

前言

一、预备篇	(1)
第一章 有关数学模型的简单介绍	(1)
1.1 线性试验模型	(1)
1.2 非线性发展方程试验模型	(3)
1.3 流体动力学的某些数值模拟实验模型	(6)
练习题	(12)
第二章 关于有限差分方法和其他数值方法的某些重要概念	(13)
2.1 差分格式的逼近精度、相容性、稳定性和收敛性	(13)
2.2 有限差分方法和其他数值方法的守恒性、单调性问题	(14)
2.3 差分格式和其他数值方法的迎风性设计	(16)
2.4 间断解,或者弱解的一些重要概念	(19)
2.5 Riemann 问题的数值解方法	(21)
练习题	(25)
第三章 有限差分方法的数值耗散、数值色散和数值群速度效应	(26)
3.1 在数值模拟中存在的某些奇怪现象	(27)
3.2 有限差分格式的 modified PDE 和格式余项效应分析方法	(30)
3.3 数值模拟中所发生的奇怪现象的解释	(32)
3.4 有限差分格式的改造、改进和优化	(34)
3.5 差分格式的 modified PDE 的推导软件	(41)
练习题	(41)
二、间断解问题篇	(42)
第四章 间断分解和 Riemann 问题的特征表示	(42)
4.1 空气动力学中的间断解问题	(42)
4.2 激波管问题的间断分解	(46)
4.3 Riemann 间断解的特征构造方法	(48)
4.4 Riemann 间断分解问题的特征表示	(51)
练习题	(54)
第五章 Riemann 间断分解问题的 Roe 解法	(55)
5.1 Roe 方法的基本思想	(55)
5.2 一维问题的 Roe 参向量和近似 Riemann 解算子	(56)
5.3 二维浅水波问题的 Roe 参向量和近似 Riemann 解算子	(58)
5.4 Roe 的三维守恒律问题的参向量和解算子	(62)

5.5 Roe 方法提高求解精度的关键和存在的问题	(65)
练习题	(66)
第六章 积分平均型间断解方法的设计和讨论	(67)
6.1 积分平均型守恒、单调格式的一般构想	(67)
6.2 Van Leer 的 MUSCL 方法的构造	(72)
6.3 Collela 和 Woodward 的 PPM	(74)
6.4 积分平均格式构造的进一步讨论	(75)
练习题	(76)
三、高分辨率方法篇	(77)
第七章 TVD 方法的构造和控制函数	(77)
7.1 从 Lax-Wendroff 格式谈起	(78)
7.2 TVD 格式的构造和讨论	(79)
7.3 限制函数或限制器的简单讨论	(84)
7.4 几点注释	(86)
练习题	(88)
第八章 ENO 和 weighted ENO 方法	(88)
8.1 一维标量方程的 ENO 和 weighted ENO 格式	(88)
8.2 时间离散和 Runge-Kutta 方法	(96)
8.3 二维标量方程的 ENO 和 WENO 方法	(100)
8.4 方程组问题	(102)
练习题	(106)
四、有限体积法篇	(107)
第九章 非结构网格的生成和构造	(108)
9.1 Delaunay 三角形和 Delaunay 三角剖分	(108)
9.2 Rebay 的非结构网格生成算法	(110)
9.3 一个简单的任意二维区域三角形剖分的方法	(112)
9.4 非结构网格生成的前沿追踪算法	(113)
9.5 介绍一个二维 Delaunay 三角形剖分生成非结构网格软件	(116)
第十章 非结构网格有限体积法	(121)
10.1 一维问题有限体积方法的讨论	(121)
10.2 二维问题的 FVM 构造	(126)
10.3 二维对流-扩散问题的 FVM	(130)
练习题	(134)
五、非标准有限元方法篇	(135)
第十一章 混合有限元方法简介	(135)
11.1 混合变分问题简例	(135)
11.2 混合变分问题和混合有限元的存在惟一性	(138)
11.3 非线性 Burgers 方程的混合元方法	(140)

练习题	(143)
第十二章 运动有限元方法	(144)
12.1 从一般 FEM 到 moving FEM	(145)
12.2 运动有限元方法单元分析的一般公式	(149)
12.3 运动有限元方法单元分析的简单实例	(151)
12.4 运动有限元方法在非线性波问题的应用	(154)
12.5 运动有限元方法的研究课题和进展	(157)
第十三章 间断有限元方法	(159)
13.1 一维守恒律问题	(159)
13.2 二维守恒律问题的间断 Galerkin 有限元方法	(168)
13.3 对流-扩散问题的混合元方法	(171)
13.4 守恒律方程组的间断有限元方法	(174)
13.5 二维可压缩流体的间断 Galerkin 有限元方法	(177)
练习题	(179)
第十四章 时空有限元方法	(181)
14.1 流线扩散法的数值实现	(181)
14.2 稳定性分析	(183)
14.3 SDM 的误差分析	(184)
14.4 SDM 的发展历史	(185)
14.5 SDM 的其他形式	(186)
六、运动界面追踪问题的数值方法篇	(189)
第十五章 VOF 方法和运动界面的重构方法	(189)
15.1 流体体积函数 (VOF) 方法	(190)
15.2 流体体积方程的求解	(192)
15.3 数值算例	(201)
15.4 界面追踪方法的应用前景	(208)
第十六章 等值面 (level set) 函数方法	(209)
16.1 level set 方法概述	(209)
16.2 求解 level set 方程	(212)
16.3 重新初始化方程的求解	(215)
16.4 物理量的控制方程的求解	(216)
参考文献	(221)
附录 四个求差分格式的 modified PDE 的 MATHEMATICS 程序	(235)

一、预 备 篇

这里用三章的篇幅向读者介绍某些必要的预备内容,这就是:1. 有关的数学模型,它们将是本课程从事讨论和进行计算实验的模型. 2. 简单地回顾数值方法的一些重要概念,例如差分格式的有关概念,激波等间断解的弱解条件,以及近代的新思想和新工具.

第一章 有关数学模型的简单介绍

这一章里,我们将简单地引入有关的某些数学模型,它们将是本书后面各章节所要涉及的. 今后,我们将利用它们进行格式的设计、分析和数值模拟实验,特别是利用它们作一些应用实例的计算和数值模拟的全过程讨论.

我们采用的数学模型基本上属于两大类. 其一,线性的试验模型和非线性发展方程试验模型;其二,比较简单的实际问题数学模型. 例如气体动力学和浅水波问题模型. 在数学的表现形式上,都属于 Navier-Stokes 方程组的形式,特别是双曲型守恒律组. 除此,还将在某些章节里,根据需要引入其他的数学模型,例如 Hamilton-Jacobi 方程等.

1.1 线性试验模型^[142,149]

1. 单行波方程

考虑一个最简单的偏微分方程及其 Cauchy 问题

$$u_t + au_x = h(x, t), a = \text{const} > 0. \quad (1.1)$$

$$u(x, 0) = u_0(x). \quad (1.2)$$

利用特征线的分析方法,不难得到上述问题的解析解^[17]

$$u(x, t) = u_0(x - at) + \int_0^t h(x - a(t - \tau), \tau) d\tau. \quad (1.3)$$

在一般的情况下,我们采用的是它的齐次形式,即 $h = 0$. 在这种情况下,真解只不过是速度 a 平移初始波形而已. 别瞧不起它的简单、平凡,利用它的特殊的、复杂的初值给定,完全可以用来检验数值方法的效果和功能.

2. 简单的抛物型方程模型

$$u_t = \nu u_{xx}, \nu = \text{const} > 0, |x| < +\infty, t > 0. \quad (1.4)$$

众所周知, 它的初值问题 (1.4) + (1.2) 的准确解为

$$u(x, t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi\nu t}} \int_{-\infty}^{\infty} u_0(\xi) e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4\nu t}} d\xi. \quad (1.5)$$

它是所谓的纯耗散性偏微分方程, 其典型特征是解析解随着时间的进行, 越来越光滑, 或者说具有磨光的效应.

3. 常系数输运-扩散方程

$$u_t + au_x = \nu u_{xx}, \quad (1.6)$$

该方程作为非线性 Burgers 方程的线性化方程, 用来代替 Burgers 方程, 进行 Navier-Stokes 方程的简化模型试验, 从而对数值计算格式作出初步的理论和可行性分析.

4. 二元, 方波碰撞试验模型

$$\begin{aligned} U_t + AU_x &= h, U = (u, v)^T, \\ A &= \begin{pmatrix} 0 & a \\ b & 0 \end{pmatrix}, h = (0, 0)^T, \end{aligned} \quad (1.7)$$

初值条件为

$$u_0(x) = \begin{cases} 1, & -2 \leq x \leq -1, \\ 0, & \text{其他.} \end{cases} \quad (1.8a)$$

$$v_0(x) = \begin{cases} 1, & 1 \leq x \leq 2, \\ 0, & \text{其他.} \end{cases} \quad (1.8b)$$

假设满足条件 $\sqrt{ab} > 0$. 利用特征线的解析方法, 也可以得到它的准确解

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \frac{1}{2}(u_0(x - \sqrt{abt}) + u_0(x + \sqrt{abt})) \\ &\quad + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{a}{b}}(v_0(x - \sqrt{abt}) - v_0(x + \sqrt{abt})), \\ v(x, t) &= \frac{1}{2}(v_0(x - \sqrt{abt}) + v_0(x + \sqrt{abt})) \\ &\quad + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{b}{a}}(u_0(x - \sqrt{abt}) - u_0(x + \sqrt{abt})). \end{aligned} \quad (1.9)$$

利用它可以进行一般二元非线性方程的激波等间断解方法的数值试验, 分析它们的可靠性, 稳定性, 数值耗散性和色散性, 数值群速度效应, 以及其他方面

的检验. 例如, 取 $a = b = 1$ 时, 将是一个有趣的两个方波的碰撞实验模型.

5. 流体体积函数追踪模型和 level set 函数方程^[148]

在今天, 自由面和活动边界问题, 特别是所谓的运动界面的数值追踪模拟, 日益重要和热门. 许多知名的数值数学家和科学工作者参加到这个任务中来. 而且已经提出了很多有效的数值方法, 其中 VOF (volume of fluid) 和 level set 方法尤其著名. 两者分别利用了流体体积函数模型和 level set 函数方程, 作为运动界面追踪的一个控制方程. 它们只是主场的基本控制方程的辅助方程. 要求在计算时能够达到尽可能的高分辨率.

方程分别是

$$\text{VOF 方程:} \quad \frac{\partial C}{\partial t} + V \cdot \nabla C = 0, \quad (1.10)$$

$$\text{level set 方程:} \quad \varphi_t + V \cdot \nabla \varphi = 0, \quad (1.11)$$

其中 C 是格子内的目标介质的体积比函数, $V = (u, v, w)$ 是主场的速度向量. φ 为 level set 函数, 在运动界面上它为零. 两者都是用来刻画运动界面的. 在这里我们可以把它们看成是二维的常系数方程.

1.2 非线性发展方程试验模型^[48, 242]

1. 无黏 Burgers 方程, 也称为激波模型方程

$$u_t + uu_x = 0 \quad \text{或者} \quad u_t + \left(\frac{u^2}{2} \right)_x = 0, \quad (1.12)$$

鉴于该模型方程的 Cauchy 问题常常发展和生成间断解, 特别是所谓的激波, 所以通常利用它进行间断解的方法设计、分析和模拟试验. 甚至进行数值解的惟一性检验, 也就是间断解的熵条件的数值研究. 例如, 给定右行激波初值条件

$$u(x, 0) = \begin{cases} 1, & x \leq 0.5, \\ 0, & \text{其他.} \end{cases} \quad (1.13)$$

那么, 根据双曲型守恒律间断解的 Rankine-Hugoniot 关系^[42, 246], 可以得到该激波的向右传播速度

$$S = \frac{[f(u)]}{[u]} = \frac{\left(\frac{1}{2} \right) - 0}{1 - 0} = 0.5. \quad (1.14)$$

根据 Lax 的理论, 对于双曲型守恒方程的间断解问题, 其惟一解也就是物理解, 应当是它相应的黏性问题的解的极限, 换句话说, 就是 Burgers 方程的黏度趋向零时的极限解.

此外,如果给出以下周期为 2 的初值条件^[114]

$$u(x, 0) = u_0(x) = 0.25 + 0.5\sin(\pi x), \quad (1.15)$$

它的准确解应是一个运动的间断.

2. Burgers 方程

$$u_t + uu_x = \nu u_{xx} \quad \text{或者} \quad u_t + \left(\frac{u^2}{2}\right)_x = \nu u_{xx}, \quad (1.16)$$

它可以作为流体动力学 Navier-Stokes 方程的简单模型方程,它又可以代表浅水波问题的洪水数学模型,而且也是当代交通流动力学的模型方程. 通常,我们称之为非线性输运-扩散模型方程. 如果在输运项再引入系数 a ,那么通过调节方程的两个系数,可以进行输运和扩散的效应试验. 如果采用下面的初边值条件,可以作为一种形成激波、边界层的难度很大的数值实验模型

$$u(x, 0) = \frac{1}{2}\sin\pi x + \sin 2\pi x, \quad u(0, t) = u(1, t) = 0. \quad (1.17)$$

至今,我们能够看到的最精细的数值解之一,是 Muller 等^[160,161]人利用运动有限元方法所得到的.

3. Korteweg-de Vries (KdV) 方程^[143]

$$u_t + 6uu_x + u_{xxx} = 0, \quad (1.18)$$

它是非线性发展方程,特别是孤立波的重要模型方程. 由于它具有很强的守恒性和孤立子解. 在数值方法的设计和理论分析中,利用它进行大梯度、大变形和多孤立子的碰撞试验.

其孤立子解的初值条件和解析解分别为

$$u(x, 0) = 2\eta^2 \operatorname{sech}^2(\eta x), \quad (1.19)$$

$$u(x, t) = 2\eta^2 \operatorname{sech}^2(\eta x - 4\eta^2 t). \quad (1.20)$$

我们可以在水平面上设定一个孤立波初值,作为波浪的简化模型,进行波浪爬坡和水下障碍物造波效应的仿真数值试验.

4. KdV-Burgers 方程

$$u_t + 6uu_x + \mu u_{xxx} = \nu u_{xx}, \quad \nu, \mu \geq 0, \quad (1.21)$$

通过对该模型方程的理论分析和数值模拟试验,可以对于数学模型的耗散性、色散性和群速度效应进行理论分析,从而为数值方法的数值耗散性、数值色散性和数值群速度效应进行分析研究. 例如,在 Whitham 的《Linear and Nonlinear Waves》一书中, Ganosa 和 Gazdag 的论文《The Korteweg-de Vries-Burgers equation》中,都有有关它的分析. 特别是后者,从理论和数值试验两方面论证

了对于渐近的行激波初值问题,如果

$$v^2 \geq 4\mu, \quad (1.22)$$

其解析解将是单调减的激波,即呈现耗散性优势;反之,呈现色散性优势,即解析解的激波面上,发生向上游发展的震荡.

5. RLW (regularized long wave) 方程^[78]

在流体动力学、非线性光学、生物流体力学等许多领域,都可以诱导出这种模型方程

$$u_t + \eta u_x + uu_x + \delta u_{xx} = 0. \quad (1.23)$$

同样,它也有孤立子解. 这种非线性孤立子方程,它具有一般非线性孤立子方程的特性,如在非线性项和扩散项作用下,根据动力学平衡原理,可以将初始波形分解成许多小的孤立子波,并且这些波能在传播中,甚至在碰撞后保持波形不变. 由于 RLW 方程中有 U_{xx} 这一项,所以它比 KDV 方程更加复杂. 它的解法常常必须引入隐式差分逼近.

6. Buckley-Leverett 方程^[114,160]

这是具有非凸的流通量函数(nonconvex flux)的守恒律问题.

$$u_t + f(u)_x = 0, \quad f(u) = \frac{u^2}{4u^2 + (1-u)^2}, \quad (1.24)$$

它在多孔介质流、渗流,特别是在地下石油勘探中有一定的参考意义.

常常考察简单的初值

$$u(x, 0) = \begin{cases} 1, & x \in [-0.5, 0], \\ 0, & \text{其他}. \end{cases} \quad (1.25)$$

7. 二维的无黏 Burgers 方程模型^[55]

这完全是一维激波模型方程的推广

$$u_t + uu_x + vv_y = 0 \text{ 或 } u_t + \left(\frac{u^2}{2}\right)_x + \left(\frac{v^2}{2}\right)_y = 0. \quad (1.26)$$

类似地给定初值

$$u(x, y, 0) = \frac{1}{4} + \frac{1}{2} \sin(\pi(x+y)), (x, y) \in [-1, 1] \times [-1, 1] \quad (1.27)$$

其准确解是一维类似情况以 $x+y$ 替换 x , $2t$ 替换 t 的结果.

1.3 流体动力学的某些数值模拟实验模型

关于流体动力学的基本方程,特别是 Navier-Stokes 方程的推导,在许多教科书和专著里都有讨论,不再赘述. 我们只列出有关气体动力学和浅水波问题中,人们常常采用的一些数值试验模型.

1. 气体动力学模型

(1) 激波管问题

基本方程是向量形式的守恒方程

$$U_t + F(U)_x = 0, \quad (1.28a)$$

其中

$$U = \begin{pmatrix} \rho \\ \rho u \\ E \end{pmatrix}, \quad F(U) = \begin{pmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + p \\ u(E + p) \end{pmatrix}, \quad E = \frac{p}{(\gamma - 1)} + \frac{1}{2} \rho u^2, \quad (1.28b)$$

这里 $\rho, u, p, E, \gamma = 1.4$ 分别为流体的密度, 流体速度, 压强, 单位体积的总能和绝热指数.

给出左右常数状态的初值条件

$$U(x, 0) = \begin{cases} U_l, & x < 0.5, \\ U_r, & x \geq 0.5. \end{cases} \quad (1.29)$$

这种初值的守恒律问题, 称为 Riemann 问题^[81, 246]. 在后面我们将进行专门的讨论. 其中 Sod 的 Riemann 问题^[206], 其初值条件为

$$\begin{aligned} (\rho_l, u_l, P_l) &= (1, 0, 1), \\ (\rho_r, u_r, P_r) &= (0.125, 0, 0.1). \end{aligned} \quad (1.30)$$

对于 Lax 的 Riemann 问题^[203, 223], 其初值条件则为

$$\begin{aligned} (\rho_l, u_l, P_l) &= (0.445, 0.698, 3.528), \\ (\rho_r, u_r, P_r) &= (0.5, 0, 0.571). \end{aligned} \quad (1.31)$$

上述问题通常又称为激波管问题. 许许多多的间断解方法的设计和构造, 都利用这种激波管问题进行可靠性和准确度的数值试验, 从而判断和检验方法和格式的优劣.

图 1.1 给出了利用间断 Galerkin 方法计算, 并对其运动界面进行追踪而后得到的密度、熵、压力和速度的图形(网格数为 100, 时间计算到 0.6).

(2) 孤立的接触间断问题^[223]

问题的数学模型仍是 (1.27~1.29), 其具体的 Riemann 初值条件为

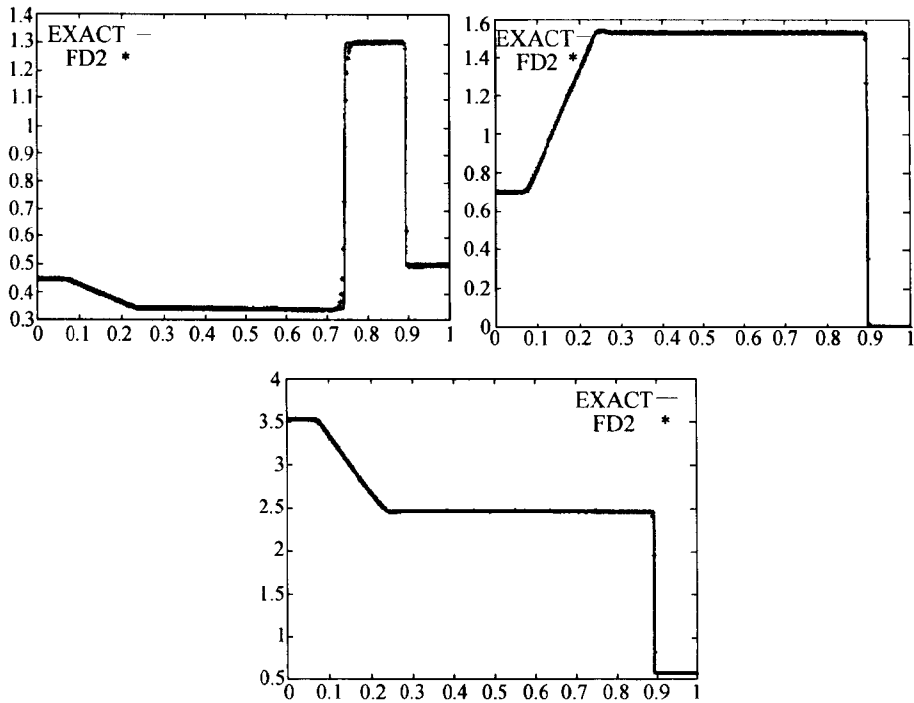


图 1.1 Lax 激波管问题

$$(\rho_l, u_l, P_l) = (1, 1, 0.2), \quad (\rho_r, u_r, P_r) = (2, 1, 0.2). \quad (1.32)$$

一般说来,对于接触间断问题,准确地进行数值模拟是具有一定难度的,所以这一气动力学的试验模型,对于设计接触间断问题的数值方法,是一个简单而方便的检测. 它的数值结果应当在密度上产生突然的跳跃,而速度和压力却保持常数.

(3) Shu-Osher 问题^[114,199]

问题的数学模型仍是 (1.18~1.20), 其具体的 Riemann 初值条件为

$$\begin{cases} \rho \\ u \\ P \end{cases} = \begin{cases} (3.857143, 2.629369, 10.33333)^T, & x < 0.5, \\ (1 + 0.2 * \sin(50x - 25), 0, 1)^T, & x \geq 0.5. \end{cases} \quad (1.33)$$

这是一种在行进的激波波头附近,嵌有不同波长震荡波的复杂情况. 特别适用于对高分辨率方法的数值检验.

(4) 微小密度和内能的 Riemann 问题^[223]

问题的数学模型仍是 (1.18~1.20), 其具体的 Riemann 初值条件为

$$(\rho_l, u_l, P_l) = (1, -2, 0.4), \quad (1.34)$$

$$(\rho_r, u_r, P_r) = (1, 2, 0.4). \quad (1.35)$$

这一试验模型的特点是密度和内能等状态量,会产生所谓的真空现象. 所以可以用来检验数值方法的守恒性、单调性和可靠性.

(5) 前台阶问题(forward facing step problem)^[203~244]

首先,这是二维气体动力学间断解问题,它的一般数学模型为

$$U_t + F(U)_x + G(U)_y = 0, \quad (1.36a)$$

其中

$$U = \begin{bmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho v \\ E \end{bmatrix}, \quad F(U) = \begin{bmatrix} \rho u \\ \rho u u + P \\ \rho u v \\ u(E + P) \end{bmatrix}, \quad G(U) = \begin{bmatrix} \rho v \\ \rho v u \\ \rho v v + P \\ v(E + P) \end{bmatrix}. \quad (1.36b)$$

而单位体积的总能

$$E = \frac{P}{(\gamma - 1)} + \frac{1}{2} \rho (u^2 + v^2), \quad (1.36c)$$

这里 $\rho, (u, v), P, E, \gamma = 1.4$ 分别为流体的密度,流体速度,压强,单位体积的总能和绝热指数.

所谓前台阶问题,它可以说是计算机风洞模拟实验力学的最简单模型. 假定,1 个单位宽 3 个单位长的风洞内,从左起 0.6 单位的位置开始,有高为 0.2 单位的刚性的台阶一直伸展到风洞右端. 在左侧的风洞进口处,给定 Mach 数为 3 的来流条件,内部的刚性壁面、角点条件,壁面反射条件,以及右端的出口条件等等,进行合理的设定和处理. 这样就构成了一个,特别是对于高分辨率方法的非常有效的实验模型.

图 1.2 是采用 Runge-Kutta 间断 Galerkin 方法的计算图像.

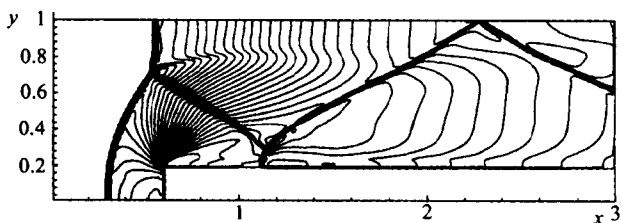


图 1.2 前台阶问题

(6) 双马赫反射(double Mach reflection)问题

数学模型同上,计算区域取为 $[0, 4] \times [0, 1]$, 反射壁面处于计算区域的底部,一个 Mach 数为 10 的斜强激波放置在 $x = \frac{1}{6}, y = 0$ 处,并与 x 轴成 60°

角. 在 $x = \frac{1}{6}$ 之前的底边壁面采用准确的激波波后条件, 其他壁面采用反射边界条件. 详细讨论可以参考 Woodward 和 Colella 的著名论文[244]. 图 1.3 是采用 WENO 方法计算得到的图形.

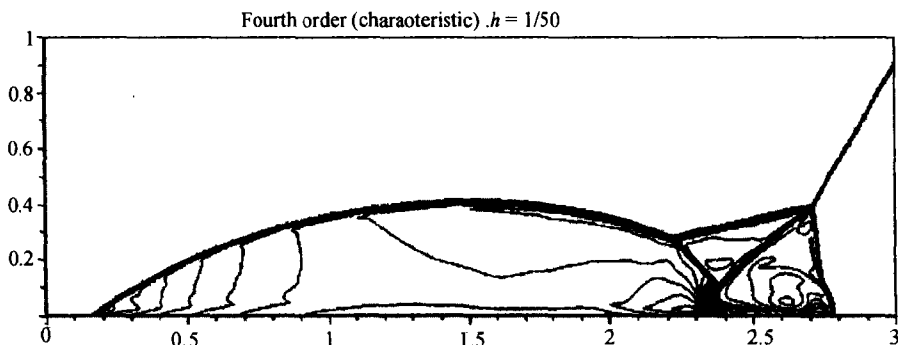


图 1.3 双马赫反射问题

(7) 激波和圆涡的相互作用模型^[201,203]

数学模型同上, 计算区域取为 $[0, 2] \times [0, 1]$. 一个垂直于 x 轴的 Mach 数为 1.1 的固定的激波置于 $x = 0.5$ 处. 激波左状态为 $(\rho, u, v, P) = (1, \sqrt{\gamma}, 0, 1)$. 并且在这里放置一个小圆涡, 其中心在 $(x_c, y_c) = (0.25, 0.5)$. 对于均匀流的速度 (u, v) 、温度 $(T = p/\rho)$ 和熵 $(S = \ln(p\rho^{-\gamma}))$ 的一种摄动

$$\begin{aligned} \tilde{u} &= \varepsilon \tau e^{\alpha(1-\tau^2)} \sin \theta, & \tilde{v} &= -\varepsilon \tau e^{\alpha(1-\tau^2)} \cos \theta, \\ T &= -\frac{(\gamma-1)\varepsilon^2 e^{2\alpha(1-\tau^2)}}{4\alpha\lambda}, & \tilde{S} &= 0, \end{aligned} \quad (1.37)$$

其中 $\tau = \frac{r}{r_c}$, $r = \sqrt{(x-x_c)^2 + (y-y_c)^2}$. $\varepsilon = 0.3$, $\alpha = 0.204$ 分别代表涡团的强度和衰减率, r_c 为涡的临界半径.

2. 浅水波问题模型

(1) 一维溃坝模型^[156,143]

它的基本控制方程为

$$\begin{aligned} U_t + (F(U))_x &= H, \\ U &= \begin{bmatrix} h \\ uh \end{bmatrix}, \quad F(U) = \begin{bmatrix} uh \\ u^2 h + \frac{1}{2} gh^2 \end{bmatrix}, \quad H = \begin{bmatrix} 0 \\ -S \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (1.38)$$

或者采用它的拟线性形式