工科数学教学
参考书之一

高等数学题型分析

四川工业学院数学教研室 编

西南交通大学出版

工科数学教学参考书之一

高等数学题型分析

四川工业学院数学教研室　编

西南交通大学出版社
·成　都·

内 容 简 介

本书按工科《高等数学教学大纲》的要求，简明地对高等数学（同济大学第四版）各章内容作了小结，重点列出了高等数学的常见题型并结合例子分析其解法，以帮助工科学生对所学数学概念与公式的理解，提高他们分析问题与解决问题的能力。

本书适合于大学专科、本科学生自学，也可供高等数学教师讲授习题课参考。

图书在版编目(CIP)数据

高等数学题型分析/四川工业学院数学教研室编.
—成都：西南交通大学出版社，2001.12（2002.9 重印）
工科数学教学参考书之一
ISBN 7-81057-619-4
Ⅰ.高... Ⅱ.四... Ⅲ.高等数学-高等学校-解题 Ⅳ.O13-44
中国版本图书馆 CIP 数据核字(2001)第 090250 号

高 等 数 学 题 型 分 析
四川工业学院数学教研室 编
*
出 版 人 宋绍南
责任编辑 刘婷婷
封面设计 肖 勤
西南交通大学出版社出版发行
（成都市二环路北一段 111 号 邮政编码：610031 发行科电话：87600564）
http：//press.swjtu.edu.cn
E-mail：cbsxx@swjtu.edu.cn
四川森林印务有限责任公司印刷
*
开本：850mm×1168mm 1/32 印张：11.375
字数：289 千字 印数：4001—7000 册
2001 年 12 月第 1 版 2002 年 9 月第 2 次印刷
ISBN 7-81057-619-4/O·034
定价：16.00 元

前　言

这是为学习高等数学的学生编写的一本学习参考书，是我们所编《工科数学教学参考书》系列之一，它也可供教师讲授高等数学习题课时选用。

本书的编写按照工科《高等数学教学大纲》的要求，针对一般工科院校教学与考试的实际，简明地列举了高等数学的常见题型并结合例题分析其解法，以帮助学生加深对所学概念与公式的理解和提高解决问题的技能。书中的选例以工科院校高等数学考试的中等难度的题目为主，未选入过难、过繁的例题，以使学生易于阅读与掌握。为了便于在复习时使用，在各章的题型选例之前，都有内容提要，列出了该章主要的概念、定理和公式。

本书的出版是四川工业学院全体数学老师热忱支持与友好合作的结果。书中各章依次由张朝伦、蒲俊、朱雯、陈子春、刘鹏惠、李红娥、付晓舰、陈利娅、罗大文、李尴、周剑蓉、胡劲松老师撰写，最后由主编朱雯统稿，张文忠教授审阅。

希本书能在促进高等数学教学质量的提高上起到有益的作用。限于编者的水平，有不妥之处，敬请读者指正。

四川工业学院数学教研室

2001 年 9 月

目　　录

第一章　函数与极限

内 容 提 要

(一) 函　　数

1. 函数的概念

2. 函数的几种特性

(1) 函数的有界性：若存在正数 M，使对任一 $x \in D$ 时，都有 $|f(x)| \leqslant M$，则称 $f(x)$ 在 D 内有界．

(2) 函数的单调性：若 $f(x)$ 对其定义区间 I 上任意两点 x_1、x_2，当 $x_1 < x_2$ 时，恒有 $f(x_1) < f(x_2)$，则称 $f(x)$ 在 I 上单调增加；当 $x_1 < x_2$ 时，恒有 $f(x_1) > f(x_2)$，则称 $f(x)$ 在 I 上单调减少．

(3) 函数的奇偶性：设函数 $f(x)$ 的定义域 D 关于原点对称，对任一 $x \in D$，若 $f(-x) = f(x)$，则称 $f(x)$ 为偶函数；若 $f(-x) = -f(x)$，则称 $f(x)$ 为奇函数．

(4) 函数的周期性：若存在不为零的数 T，使 $f(x+T) = f(x)$，则称 $f(x)$ 为周期函数，满足此关系的最小正数 T，称为 $f(x)$ 的周期．

(二) 数列的极限

1. 数列极限的定义

对任意给定的正数 ε，总存在正整数 N，使得对于 $n > N$ 时的一切 x_n，不等式

$$|x_n - a| < \varepsilon$$

都成立，则称常数 a 是数列$\{x_n\}$的极限，或称数列$\{x_n\}$收敛于 a，记为

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a.$$

如果数列没有极限，就说数列是发散的.

2. 数列极限的存在准则

（1）准则Ⅰ：如果数列$\{x_n\}$、$\{y_n\}$及$\{z_n\}$满足下列条件：

① $y_n \leqslant x_n \leqslant z_n \quad (n=1, 2, 3, \cdots)$，

② $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = a, \quad \lim\limits_{n\to\infty} z_n = a$.

那么数列$\{x_n\}$的极限存在，且 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$，

（2）准则Ⅱ：单调有界数列必有极限.

3. 关于数列极限的基本性质

（1）若数列$\{x_n\}$收敛，则其极限惟一.

（2）若数列$\{x_n\}$收敛，则$\{x_n\}$有界，其逆不真.

（3）两个收敛数列$\{x_n\}$、$\{y_n\}$，若存在 N，使 $n>N$ 时，$x_n \leqslant y_n$，则 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n \leqslant \lim\limits_{n\to\infty} y_n$

（4）数列$\{x_n\}$收敛于 a，则它的任一子序列$\{x_{n_k}\}$也收敛，且其极限也为 a.

（5）若 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ 和 $\lim\limits_{n\to\infty} y_n$ 均存在，则有

$$\lim_{n\to\infty}(x_n \pm y_n) = \lim_{n\to\infty} x_n \pm \lim_{n\to\infty} y_n, \qquad \lim_{n\to\infty}(x_n \cdot y_n) = \lim_{n\to\infty} x_n \cdot \lim_{n\to\infty} y_n,$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} x_n}{\lim\limits_{n\to\infty} y_n} \quad (\lim_{n\to\infty} y_n \neq 0).$$

（三）函数的极限

1. 函数极限的定义

若对于任意给定的正数 ε，总存在一个正数 δ，使当 $0<|x-x_0|<\delta$时，不等式

$$|f(x)-a|<\varepsilon$$

恒成立，则称当 x 趋于 x_0 时，$f(x)$ 以 a 为极限，记作

$$\lim_{n\to x_0} f(x)=a \quad 或 \quad f(x)\to a \quad (x\to x_0).$$

类似地可定义 $f(x)$ 当 $x\to x_0$ 的左极限 $\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x)$ 和右极限 $\lim\limits_{x\to x_0+0} f(x)$.

函数 $f(x)$ 当 $x\to x_0$ 时极限存在的充分必要条件是左极限及右极限各自存在且相等.

当 $x\to\infty$ ($+\infty$ 或 $-\infty$) 以及 $f(x)\to\infty$ ($+\infty$ 或 $-\infty$) 时，函数 $f(x)$ 的极限还分别有相应的定义形式.

2. 两个重要极限

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1, \qquad \lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=\mathrm{e}.$$

3. 函数的极限性质

(1) 极限的惟一性*：若 $\lim f(x)=A$，$\lim f(x)=B$，则 $A=B$.

(2) 极限的局部保号性：若 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$，且 $A>0$ (或 $A<0$)，那么就存在着点 x_0 的某一去心邻域，当 x 在该邻域内时，就有 $f(x)>0$ (或 $f(x)<0$) .

(3) 若在点 x_0 的某一去心邻域内 $f(x)\geqslant 0$ (或 $f(x)\leqslant 0$)，而且 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$，那么 $A\geqslant 0$ (或 $A\leqslant 0$) .

(4) 夹逼定理：若 $g(x)\leqslant f(x)\leqslant h(x)$ 且 $\lim g(x)=\lim h(x)=A$，则 $\lim f(x)=A$

(四) 无 穷 小

1. 无穷小的定义

若 $\lim\limits_{x\to B}\alpha(x)=0$，则当 $x\to B$ 时，函数 $\alpha(x)$ 是无穷小 .

上面 $x\to B$ 表 $x\to x_0$，$x\to x_0-0$，$x\to x_0+0$，$x\to\infty$，$x\to+\infty$，$x\to-\infty$ 中的任意一种趋向 .

---

* “$\lim f(x)$”表其自变量可取 $x\to x_0$，$x\to x_0-0$，$x\to x_0+0$，$x\to\infty$，$x\to+\infty$，$x\to-\infty$ 中的任意一种趋向 . 下同此 .

2. 无穷小的运算法则

(1) 有限个无穷小的和、积仍为无穷小.

(2) 有界函数与无穷小的积仍为无穷小.

(3) 非零无穷小的倒数为无穷大; 无穷大的倒数为无穷小.

3. 函数的极限与无穷小的关系

若 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$, 则 $f(x) = A + \alpha$, 其中 $\lim\limits_{x \to x_0} \alpha = 0$. 反之亦然.

4. 无穷小的比较

设 $\alpha(x)$、$\beta(x)$ 都是 $x \to B$ 时的无穷小量.

若 $\lim\limits_{x \to B} \dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 0$, 则称 $x \to B$ 时, $\alpha(x)$ 是比 $\beta(x)$ 高阶的无穷小;

若 $\lim\limits_{x \to B} \dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)} = C \neq 0$, 则称 $x \to B$ 时, $\alpha(x)$ 和 $\beta(x)$ 是同阶无穷小;

若 $\lim\limits_{x \to B} \dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 1$, 则称 $x \to B$ 时, $\alpha(x)$ 和 $\beta(x)$ 是等价无穷小, 简记为 $\alpha(x) \sim \beta(x)$.

一些常用的等价无穷小:

当 $x \to 0$ 时, $\sin x \sim x$, $\tan x \sim x$, $\arcsin x \sim x$, $\arctan x \sim x$, $\ln(1+x) \sim x$, $e^x - 1 \sim x$, $1 - \cos x \sim \dfrac{x^2}{2}$, $(1+x)^\alpha - 1 \sim \alpha x$(其中 α 为任意实数).

(五) 函数的连续性

1. 函数 $y = f(x)$ 在 $x = x_0$ 连续的等价定义

函数 $y = f(x)$ 在 $x = x_0$ 连续有如下四种等价的定义(设函数 $y = f(x)$ 在 x_0 的某一邻域内有定义):

(1) $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta y = \lim\limits_{\Delta x \to 0} [f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)] = 0$;

(2) $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$;

(3) 任给 $\varepsilon > 0$, 存在 $\delta > 0$, 当 $|x - x_0| < \delta$ 时, 恒有

$|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$；

(4) $f(x_0-0)=f(x_0+0)=f(x_0)$.

2. 函数的间断点及其分类

若函数$f(x)$在点x_0处不连续，则称x_0为$f(x)$的间断点．间断点一般分为两类：

(1) 第一类间断点：$f(x_0-0)$与$f(x_0+0)$均存在的间断点．又分为跳跃间断点$f(x_0-0)\neq f(x_0+0)$和可去间断点$f(x_0-0)=f(x_0+0)$，后者可补充定义或改变$f(x)$在点x_0处的函数值，使函数在点x_0处连续．

(2) 第二类间断点：不属于第一类间断点的间断点．

3. 初等函数的连续性

一切初等函数在其定义区间内都是连续的．

4. 闭区间上连续函数$f(x)$的性质

(1) 在该闭区间上$f(x)$一定有最大值和最小值；

(2) 在该闭区间上$f(x)$一定有界；

(3) 若$f(x)$在该闭区间的两端点的值异号，则在区间内$f(x)$至少有一个零点．

题 型 分 析

一、函数的概念与性质

(一) 求函数的表达式

例1 设$f(x+2)=\sin 3x+2$，求$f(x)$．

解 令$x+2=t$，则$x=t-2$，故

$$f(t)=\sin 3(t-2)+2,$$

所以
$$f(x)=\sin 3(x-2)+2 .$$

注 上题使用了函数的表示法与用什么字母表示变量无关的

“特性”，这是一种常用的方法．

例 2 已知

$$\varphi(x+1)=\begin{cases}x^2, & 0\leqslant x\leqslant 1,\\ 2x, & 1<x\leqslant 2,\end{cases}$$

求 $\varphi(x)$．

解 令 $x+1=t$，则 $x=t-1$，

当 $0\leqslant x\leqslant 1$ 时，　$\varphi(x+1)=x^2$，

故当 $1\leqslant t\leqslant 2$ 时，　$\varphi(t)=(t-1)^2$，

又当 $1<x\leqslant 2$ 时，，　$\varphi(x+1)=2x$，

故当 $2<t\leqslant 3$ 时，　$\varphi(t)=2(t-1)$，

所以

$$\varphi(t)=\begin{cases}(t-1)^2, & 1\leqslant t\leqslant 2,\\ 2(t-1), & 2<t\leqslant 3.\end{cases}$$

即

$$\varphi(x)=\begin{cases}(x-1)^2, & 1\leqslant x\leqslant 2,\\ 2(x-1), & 2<x\leqslant 3.\end{cases}$$

例 3 设 $f(x)=\lim\limits_{t\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{t}\right)^{2tx}$，求 $f(x)$．

解 $f(x)=\lim\limits_{t\to\infty}\left[\left(1+\dfrac{1}{t}\right)^{t}\right]^{2x}=\mathrm{e}^{2x}.$

注 此题是利用极限运算求函数的表达式，用同样的方法可求下题．

例 4 设 $f(x)=\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{nx}{nx^2+2}$，求 $f(x)$．

解 若 $x=0$，则 $f(x)=0$．

若 $x\neq 0$，$f(x)=\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{nx}{nx^2+2}=\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{x}{x^2+\dfrac{2}{n}}=\dfrac{1}{x}$，

所以

$$f(x)=\begin{cases}0, & x=0,\\ \dfrac{1}{x}, & x\neq 0.\end{cases}$$

例 5 设$f(x)=\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{x^n}{1+x^n}$ $(x\geqslant 0)$，求$f(x)$.

解 当$0\leqslant x<1$时， $f(x)=0$,

当$x=1$时， $f(x)=\dfrac{1}{2}$,

当$x>1$时， $f(x)=\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{x^n}{1+x^n}=\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{1}{1+\left(\dfrac{1}{x}\right)^n}=1$,

故

$$f(x)=\begin{cases}0, & 0\leqslant x<1,\\ \dfrac{1}{2}, & x=1,\\ 1, & x>1.\end{cases}$$

（二）求函数的定义域

例 1 求$y=\dfrac{2x}{x^2-3x+2}$的定义域 .

解 由$x^2-3x+2\neq 0$得$x\neq 1$，$x\neq 2$.

故函数的定义域为$(-\infty, 1)\cup(1, 2)\cup(2, +\infty)$

例 2 求$y=\sqrt{3-x}+\arctan\dfrac{1}{x}$的定义域 .

解 由$3-x\geqslant 0$且$x\neq 0$得函数的定义域为$(-\infty, 0)\cup(0, 3]$.

例 3 设$f(x)$的定义域是$[0, 1]$，求$f(\ln x)$的定义域 .

解 由$0\leqslant \ln x\leqslant 1$得$1\leqslant x\leqslant \mathrm{e}$，所以$f(\ln x)$的定义域为$[1, \mathrm{e}]$.

（三）求函数的值域

例 1 求 $y=\sin x+\cos x$ 的值域.

解 $y=\sin x+\cos x=\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$,

故函数的值域为$[-\sqrt{2},\ \sqrt{2}]$.

例 2 求 $y=x^2+4x+5$ 的值域.

解 采用配方法

$$y=x^2+4x+5=(x+2)^2+1,$$

故函数的值域为$[1,\ +\infty)$.

例 3 求 $y=\frac{3}{x^2-x+1}$ 的值域.

解 应用判别式法，将原式改写为

$$x^2y-xy+y-3=0.$$

由 $\Delta=(-y)2-4y(y-3)\geqslant 0$ 得 $y=(12-3y)\geqslant 0$

故 $0\leqslant y\leqslant 4$.

又显然 $y\neq 0$，故该函数的值域为$(0,\ 4]$.

例 4 求 $y=\frac{x+3}{x+1}$ 的值域.

解 应用反函数法

当 $x\neq -1$ 时，由原函数可得

$$xy+y=x+3,$$

即

$$x=\frac{3-y}{y-1}\quad (y\neq 1).$$

所以该函数的值域为$(-\infty,\ 1)\cup(1,\ +\infty)$.

（四）函数的性质

例 1 设 $f(x)$ 为定义在$(-l,\ l)$内的奇函数，若 $f(x)$ 在$(0,\ l)$内单调增加，证明 $f(x)$ 在$(-l,\ 0)$内也单调增加.

证 对任意 $x_1,\ x_2\in(-l,\ 0)$，且 $x_1<x_2$，则 $-x_1$，$-x_2\in(0,l)$，且 $-x_2<-x_1$.

因 $f(x)$ 在 $(-l, l)$ 内是奇函数，则

$$f(-x_1)=-f(x_1), \quad f(-x_2)=-f(x_2).$$

又 $f(x)$ 在 $(0, l)$ 内单调增加，故

$$f(-x_2)<f(-x_1),$$

即

$$-f(x_2)<-f(x_1),$$

亦即

$$f(x_1)<f(x_2).$$

所以 $f(x)$ 在 $(-l, 0)$ 内也单调增加．

二、求数列的极限

（一）经过变形求数列的极限

例 1 求数列 $\lim\limits_{n\to\infty}0.\underbrace{999\cdots9}_{n个}$ 的极限．

解 $\lim\limits_{n\to\infty}0.\underbrace{999\cdots9}_{n个}=\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\dfrac{1}{10^n}\right)=1-\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{10^n}=1$．

例 2 求数列 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+2+3+\cdots+n}{n^2}$ 的极限．

解 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+2+3+\cdots+n}{n^2}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\frac{1}{2}n(n+1)}{n^2}=\dfrac{1}{2}$．

例 3 求 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{n}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})$．

解 由于

$$\sqrt{n}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})=\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}=\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1},$$

故 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{n}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1}=\dfrac{1}{2}$．

例 4 求 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(-2)^n+3^n}{(-2)^{n+1}+3^{n+1}}$.