线性规划学习指导

中国人民大学数学教研室　编

中央广播电视大学出版社

线性规划学习指导

线性规划学习指导

中国人民大学数学教研室　编

中央广播电视大学出版社

线性规划学习指导

中国人民大学数学教研室　编

*

中央广播电视大学出版社出版

新华书店北京发行所发行

西安新华印刷厂印装

*

开本 787×1092 1/32 印张4.5　千字94

1984年4月第1版　　1984年10月第1次印刷

印数：1—184,000

统一书号：13300·21　　定价：0.46元

前　言

本书是配合学习经济应用数学基础（四）——《线性规划》的参考读物。为了便于广大电大学员和自学的同志掌握这一学科的基本理论和方法，本书强调了各章的教学要求，并对各章的重点、难点给出了典型例题分析。

由于我们水平不高，时间仓促，本书一定存在不少缺点和错误，请广大读者批评指正。

编　者1984年4月

目　录

第一章　线性规划问题的数学模型

内　容　提　要

一、什么叫线性规划

线性规划是辅助我们进行科学管理的一种数学方法，是运筹学的一个重要分支。在工农业生产，交通运输，财贸工作等方面都有极广泛的应用。

线性规划研究的对象是：（一）任务确定后，如何统筹安排，使得用最少的人力物力资源去完成它。（二）在现有人力物力资源条件下如何组织安排它们，使得完成任务最多。这是一个问题的两个方面，实质是一个极值问题，属于最优化的范畴。

线性规划就是求一组变量的值，使它满足一组线性式子，并使一个线性函数的值最大（或最小）的数学方法。

二、线性规划的数学模型

线性规划问题的数学模型包括决策变量、约束条件和目标函数三个要素。

线性规划问题数学模型的一般形式是：

求一组变量x_j($j=1, 2, \cdots, n$)的值，使其满足约束条件

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \leqslant b_i(\text{或} \geqslant b_i, \ \text{或} = b_i)(i=1,2,\cdots,m) \\ x_j \geqslant 0 \quad (j=1, \ 2, \ \cdots, \ n) \end{cases}$$

并使目标函数$s = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$的值最小（或最大）。

教 学 要 求

1.了解线性规划研究的对象。

2.掌握线性规划问题的数学模型的一般形式。

3.熟悉运输问题、布局问题、生产组织与计划问题、下料问题、配料问题等几个典型的经济问题的数学模型。

4.能建立简单线性规划问题的数学模型。

典型例题分析

例1 设有某种原料产地A_1、A_2、A_3，把这种原料经过加工，制成成品，再运往销售地；假设用 4 吨原料可制成 1 吨成品，产地A_1年产原料30万吨，同时需要成品 7 万吨，产地A_2年产原料26万吨，同时需要成品13万吨，产地A_3年产原料24万吨，不需要成品。A_1与A_2间距离为150 公里，A_1与A_3间距离为100公里，A_2与A_3间距离为200公里；又知原料运费为 3 千元/万吨公里，成品运费为2.5千元/万吨公里；又知在A_1开设加工厂加工费为 5.5千元/万吨，在A_2为 4 千

元/万吨，在A_3为 3 千元/万吨，又知因条件限制，在A_2设厂规模不能超过年产成品 5 万吨，A_1和A_3可以不限制，问应在何地设厂，生产多少成品，才能使生产费用（包括原料运费，成品运费和加工费）最小？

解 设x_{ij}为A_i运到A_j的原料数(单位：万吨)($i=1,2,3$；$j=1,2,3$)，其中x_{11}、x_{22}、x_{33}分别为A_1、A_2、A_3的留用数；y_{ij}为A_i运到A_j的成品数（单位：万吨）（$i=1,2,3$；$j=1,2$）其中y_{11}、y_{22}分别为A_1、A_2的留用数；z_i为在

表1—1

	A_1	A_2	A_3	产原料数	产成品数	加工费
A_1	x_{11} 0 y_{11}	x_{12} 150 y_{12}	x_{13} 100	30	$z_1 \leqslant 5$	5.5
A_2	x_{21} 150 y_{21}	x_{22} 0 y_{22}	x_{23} 200	26	z_2	4
A_3	x_{31} 100 y_{31}	x_{32} 200 y_{32}	x_{33} 0	34	z_3	3
需成品数	7	13				
需原料数	$4z_1$	$4z_2$	$4z_3$			

A_i设厂的年产成品数（单位：万吨）（$i=1,2,3$）；S为生产总费用（单位：千元）现在把它们之间的关系，列表如表1—1。由题意，得问题的数学形式为：

求一组变量$x_{ij}(i=1,2,3;\ j=1,2,3)$，$y_{ij}(i=1,2,3;\ j=1,2)$，$z_i(i=1,2,3)$的值，使其满足约束条件

$$\begin{cases} x_{11}+x_{12}+x_{13}=30 \\ x_{21}+x_{22}+x_{23}=26 \\ x_{31}+x_{32}+x_{33}=24 \\ x_{11}+x_{21}+x_{31}=4z_1 \\ x_{12}+x_{22}+x_{32}=4z_2 \\ x_{13}+x_{23}+x_{33}=4z_3 \\ y_{11}+y_{12}=z_1 \\ y_{21}+y_{22}=z_2 \\ y_{31}+y_{32}=z_3 \\ y_{11}+y_{21}+y_{31}=7 \\ y_{12}+y_{22}+y_{32}=13 \\ z_2\leqslant 5 \\ x_{ij}\geqslant 0 \quad (i=1,2,3;\ j=1,2,3) \\ y_{ij}\geqslant 0 \quad (i=1,2,3;\ j=1,2) \\ z_i\geqslant 0 \quad (i=1,2,3) \end{cases}$$

并使目标函数$S=3\times150(x_{12}+x_{21})+3\times100(x_{13}+x_{31})+3\times200(x_{23}+x_{32})+2.5\times150(y_{12}+y_{21})+2.5\times100y_{31}+2.5\times200y_{32}+5.5z_1+4z_2+3z_3$的值最小。

例2 某班有男同学30人，女同学20人，星期天准备去植树，根据经验，一天男同学平均每人挖坑20个，或栽树30棵，或给25棵树浇水；女同学平均每人挖坑10个，或栽树20

棵，或给15棵树浇水。问应怎样安排，才能使植树（包括挖坑、栽树、浇水）最多？

解 设男同学中挖坑、栽树、浇水的人数分别为x_{11}、x_{12}、x_{13}，女同学中挖坑、栽树、浇水的人数分别为x_{21}、x_{22}、x_{23}，（单位：人），S为植树棵数。由题意，问题的数学形式为：

求一组变量$x_{ij}(i=1,2;\ j=1,2,3)$的值，使其满足约束条件

$$\begin{cases} x_{11}+x_{12}+x_{13}=30 \\ x_{21}+x_{22}+x_{23}=20 \\ 20x_{11}+10x_{21}=30x_{12}+20x_{22}=25x_{13}+15x_{23} \\ x_{ij}\geqslant 0 \quad (i=1,2;\ j=1,2,3) \end{cases}$$

并使目标函数$S=20x_{11}+10x_{21}$的值最大。

例3 用长度为500厘米的条材，截成长度分别为98厘米和78厘米两种毛坯，要求共截出长98厘米的毛坯10000根，78厘米的20000根，问怎样截法，才使所用的原材料最少？

解 根据题意，可能的下料方式及各种下料方式在一件条材上所得的毛坯数及余下的料头长度如表1—2。

设用B_i种下料方式的条材数量为x_i件（$i=1,2,\cdots,6$），S为所用条材总数，由题意，得问题的数学形式为：

求一组变量x_i（$i=1,2,\cdots,6$）的值，使其满足约束条件

$$\begin{cases} 5x_1+4x_2+3x_3+2x_4+x_5=10000 \\ \qquad\quad x_2+2x_3+3x_4+5x_5+6x_6=20000 \\ x_i\geqslant 0 \quad (i=1,2,\cdots,6) \end{cases}$$

并使目标函数$S=\sum_{i=1}^{6}x_i$的值最小。

表1—2

毛坯长 \ 毛坯数 \ 下料方式	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	B_6	毛坯需要量
98	5	4	3	2	1	0	10000
78	0	1	2	3	5	6	20000
料头长度	10	30	50	70	12	32	

例4 某商店制订某商品 7—12月进货售货计划，已知商店仓库容量不得超过500件，6 月底已存货200件，以后每月初进货一次，假设各月份某商品买进售出单价如下表所示，问各月进货售货各多少，才能使总收入最多？

表1—3

月	7	8	9	10	11	12
买进（元）	28	24	25	27	23	23
售出（元）	29	24	26	28	22	25

解 设7—12月各月初进货数量为x_i件，而各月售货数量为y_i件（$i=1,2,\cdots,6$），S为总收入。由题意，得问题的数学形式为：

求一组变量x_i，y_i（$i=1,2,\cdots,6$）的值，使其满足约束条件

$$\begin{cases} y_1\leqslant 200+x_1\leqslant 500 \\ y_2\leqslant 200+x_1-y_1+x_2\leqslant 500 \\ y_3\leqslant 200+x_1-y_1+x_2-y_2+x_3\leqslant 500 \\ y_4\leqslant 200+x_1-y_1+x_2-y_2+x_3-y_3+x_4\leqslant 500 \\ y_5\leqslant 200+x_1-y_1+x_2-y_2+x_3-y_3+x_4-y_4 \\ \qquad +x_5\leqslant 500 \\ y_6\leqslant 200+x_1-y_1+x_2-y_2+x_3-y_3+x_4-y_4 \\ \qquad +x_5-y_5+x_6\leqslant 500 \\ x_i\geqslant 0,\ y_i\geqslant 0\ (i=1,2,\cdots,6)\text{整数} \end{cases}$$

并使目标函数$S=29y_1+24y_2+26y_3+28y_4+22y_5+25y_6-(28x_1+24x_2+25x_3+27x_4+23x_5+23x_6)$的值最大。

第二章　线性规划问题解的性质

内　容　提　要

一、两个变量线性规划问题图解法的步骤

1.画出可行解集凸区域的图形。

2.将S作为参数作平行等值线，找出最优解或确定没有最优解。

二、线性规划问题的标准形式

求一组变量x_1，x_2，…，x_n的值，使它满足约束条件：

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \\ x_1 \geqslant 0, \ x_2 \geqslant 0, \ \cdots, \ x_n \geqslant 0 \end{cases}$$

并且使目标函数$S = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n$的值最小。

还可以简记为：

$$\min S = Cx$$

$$\begin{cases} Ax = b \\ x \geqslant 0 \end{cases}$$

或

$$\min S = Cx$$

$$
\begin{cases} \sum\limits_{j=1}^{n} x_j P_j = \mathrm{b} \\ x \geqslant 0 \end{cases}
$$

其中 $C=(c_1,\ c_2,\ \cdots,\ c_n)$

$$
A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}
$$

$$
b=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} \qquad x=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}
$$

$$
P_j=\begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{pmatrix} \quad (j=1,2,\cdots n)
$$

三、线性规划问题的解

$$
\begin{cases} \text{有可行解} \begin{cases} \text{有唯一最优解} \\ \text{有无穷多最优解} \\ \text{无最优解} \end{cases} \\ \text{无可行解} \end{cases}
$$

四. 线性规划问题解的性质

1.几个概念

可行解：满足线性规划问题的约束条件

$$x^{(0)} = \begin{pmatrix} x_1^{(0)} \\ x_2^{(0)} \\ \vdots \\ x_n^{(0)} \end{pmatrix}$$

的称为线性规划问题的可行解。

基础可行解：若可行解$x^{(0)} = 0$，或$x^{(0)}$的非零分量所对应的系数列向量线性无关，则称$x^{(0)}$为基础可行解。

最优解：使目标函数取最小值的可行解称为最优解。

基础最优解：使目标函数取最小值的基础可行解称为基础最优解。

凸集：若连接n维点集s中任意两点$x^{(1)}$，$x^{(2)}$的线段仍在s内，则称s为凸集。换句话说，若

$\{x|x=\alpha x^{(1)}+(1-\alpha)x^{(2)},\ 0\leqslant\alpha\leqslant 1,\ x^{(1)},\ x^{(2)}\in s\}\subseteq s$

则称s为凸集。

极点：若凸集s中的点x，不能成为s中任何线段的内点，则称x为s的极点。换句话说，若对于任意两点$x^{(1)}$，$x^{(2)}\in s$，不存在$\alpha(0<\alpha<1)$，使

$$x=\alpha x^{(1)}+(1-\alpha)x^{(2)}$$

则称x为s的极点。

2.线性规划问题解的性质

（1）线性规划问题的可行解集为凸集。

（2）可行解集s中的点x是极点的充要条件为x是基础可行解。

（3）最优值可以在极点上达到。

教 学 要 求

1. 掌握两个变量的线性规划问题的图解法。

2. 掌握把线性规划问题化为标准形式。

3. 正确理解可行解、基础可行解、最优解、基础最优解、凸集、极点等基本概念。

4. 理解线性规划问题解的性质。

典型例题分析

例1 用图解法解下列线性规划问题

（1）$\max S = 2x_1 + x_2$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \leqslant 5 \\ x_1 - x_2 \leqslant 3 \\ x_1,\ x_2 \geqslant 0 \end{cases}$$

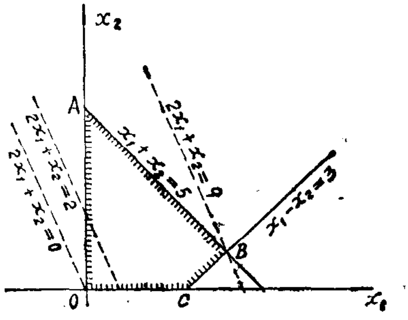

图2—1

解 由图2—1可知，问题的可行解集是图中的凸多边形$OABC$。

令目标函数S的值为0，2，…，作平行直线族，由图2—1可见，S值愈增，直线离开原点愈远，显然，B点坐标既满足约束条件，且使目标函数取得最大值。