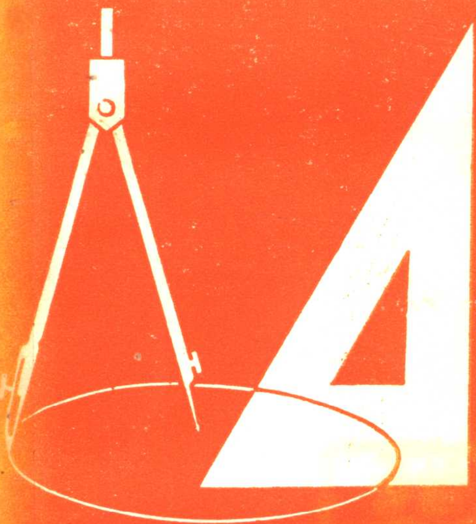
日本各大学历年入学试题集

$S=\pi\gamma^2$



数学题解

下册

科学普及出版社广州分社

日本各大学历年入学试题集

数　学　题　解

（下册）

陈钧洪　袁国学
林大流　刘伟平　译

科学普及出版社广州分社

日本各大学历年入学试题集

数学题解（下册）

陈钧洪　吴国宇
林大流　刘伟平　译

绘图：黎永燕　　　　封面设计：莫梓顺

科学普及出版社广州分社出版
广州市教育北路大华街兴平里二号
广东省粤北印刷厂印刷
广东省新华书店发行

787×1092毫米32开本　印张：9.5　字数：105千字

1982年2月第1版　1982年2月第1次印刷

印数：56000册　统一书号：7051·60111

定价：0.90元

前　　言

本书主要根据日本各大学历年入学数学考试题集编译而成。

本书包括微积分及其应用，可作为中学数学教师和学生的参考书，对理工科大学及师范院校数学系、物理系的师生，也有一定的参考价值。

本书的特点是：

1．内容精炼而丰富，形式新颖而多样，解题严谨而简捷，技巧独特而易懂。

2．编排。每类内容分如下五部分：

(1)要点和说明：每章节列出定理、公式、注明重要的思考方法和解题技巧或必要的说明。

(2)例题：通过典型例题的分析，交待思考方法，其目的是培养学生的思维能力和解题的熟练技巧。

(3)习题：除从升学考试题中选出较好的习题外，还编集了大量的新习题。

(4)提示：对一些较难的题目给予简明扼要的提示。

(5)测验题：书中附有两份测验题，每份题规定在120分钟内做完。如能用更短时间完成，则说明解题能力有所增强。

在编译过程中得到华南师范学院外语系侯德富老师具体指导和热情帮助。本书译完后，由暨南大学数学系林德荫同志和侯德富编辑审校，冯志通同志参加校对工作，并提出宝

贵意见。此外，马坚、韩晓平、关锐雄、程志新等同志参加部分翻译工作。蔡永燻同志为本书绘制了全部插图。在此表示感谢。

译　者
一九八二年二月

目　　录

试　题

一、微分及其应用

（一）函数的极限

〔要点〕

1，极限的定义：

如果当自变量 x 无限趋近于常数 a 时，函数 f(x)无限趋近于常数 b，则称 b 为当 x 趋向于 a 时f(x)的极限。记作

$$\lim_{x\to a} f(x)=b \text{ 或 } x\to a \text{ 时，} f(x)\to b$$

此时，称f(x)收敛于 b 。

如果当 x 无限趋近于常数 a 时，函数f(x)的绝对值趋于无限大，则称当 x 趋向于 a 时，f(x)在无限大发散，记作

$$\lim_{x\to a} f(x)=\infty \text{ 或 } x\to a \text{ 时，} f(x)\to\infty\text{。}$$

又如果当 x 无限趋近于常数 a 时，函数f(x)为正（负）值，且绝对值趋于无限大，则称当 x 趋向于 a 时，f(x)在正(负)无限大发散。记作

$$\lim_{x\to a} f(x)=+\infty \quad \left(\lim_{x\to a} f(x)\to-\infty\right)$$

同理，可定义：

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=b\text{，}\lim_{x\to-\infty} f(x)=b\text{，}\quad \lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty\text{，}$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty,\quad \lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty,\quad \lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty。$$

注：作为发散的例子还有$\lim\limits_{n\to\infty}(-1)^n$等等，这与上述不同。

2．极限的有关定理：

若$\lim\limits_{x\to a} f(x)=\alpha$，$\lim\limits_{x\to a} g(x)=\beta$（$\alpha$、$\beta$ 为有限的定值），则

（1）$\lim\limits_{x\to a}[kf(x)] = k\lim\limits_{x\to a} f(x) = k\alpha$

（2）$\lim\limits_{x\to a}[f(x)\pm g(x)] = \lim\limits_{x\to a} f(x) \pm \lim\limits_{x\to a} g(x) = \alpha \pm \beta$

（3）$\lim\limits_{x\to a}[f(x)\cdot g(x)] = \lim\limits_{x\to a}(x) \cdot \lim\limits_{x\to a} g(x) = \alpha\beta$

（4）$g(x)\neq 0$，$\beta\neq 0$ 时，$\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\lim\limits_{x\to a} f(x)}{\lim\limits_{x\to a} g(x)} = \dfrac{\alpha}{\beta}$

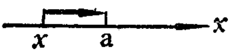
（5）设$f(x)<g(x)$，则$\alpha\leqslant\beta$（注意等号）

（6）当$\lim\limits_{x\to a} g(x) = \lim\limits_{x\to a} h(x) = \gamma$，且$g(x)\leqslant f(x)\leqslant h(x)$时

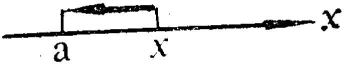
$$\lim_{x\to a} f(x) = \gamma$$

〔说明〕

1．在要点1中，x 趋近于 a 时，x 是取 a 以外的值，但趋近的方法可有各种情况，如下图所示：



（i）



（ii）

（iii）

2．虽然 $x\to a$ 和 $x=a$ 是表示完全不同的情况，但是对于整函数

$f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+\cdots+a_n$（$n$为自然数）

有$\lim\limits_{x\to a}f(x)=f(a)$，即整函数的极限$\lim\limits_{x\to a}f(x)$等于$f(a)$。

3．在要点2的定理中，α、β为有限的定值，这一条件要牢牢记住。例如，写成$\lim\limits_{x\to\infty}x-\lim\limits_{x\to\infty}x=\lim\limits_{x\to\infty}(x-x)=0$

等等是错误的。同样，也不能写成$\lim\limits_{x\to\infty}x\cdot\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x^2}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x}{x^2}$

$=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x}=0$。

〔例〕（求极限的方法）

1．求下列极限

（1）$\lim\limits_{x\to 2}(2x^3-x^2+3x-4)$

（2）$\lim\limits_{x\to -1}\frac{x^2-3x+2}{x^2+x-2}$

（3）$\lim\limits_{x\to 2}\frac{1}{(x-2)^2}$　　（4）$\lim\limits_{x\to -1}\frac{1}{x+1}$

〔思考方法〕（1）、（2）应用极限的有关定理。（3）$x\to 2$时，$(x-2)^2>0$，且$(x-2)^2\to 0$。（4）当$x<-1$且$x\to -1$时，$x+1<0$且$x+1\to 0$；当$x>-1$且$x\to -1$时，$x+1>0$且$x+1\to 0$。

〔解〕

（1）根据要点2的（1）和（2）得

$\lim\limits_{x\to 2}(2x^3-x^2+3x-4)$

$$=\lim_{x\to 2}2x^3-\lim_{x\to 2}x^2+\lim_{x\to 2}3x-\lim_{x\to 2}4$$

$$=2\lim_{x\to 2}x^3-\lim_{x\to 2}x^2+3\lim_{x\to 2}x-4$$

$$=2\times 8-4+3\times 2-4$$

$$=14$$

（2）原式$=\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{(x-1)(x-2)}{(x-1)(x+2)}$由于$x\to -1$，

而$x\neq -1$，根据要点2的（4）则

$$原式=\lim_{x\to -1}\frac{x-2}{x+2}=\frac{\lim\limits_{x\to -1}(x-2)}{\lim\limits_{x\to -1}(x+2)}=\frac{-1-2}{-1+2}=-3$$

（3）$\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{1}{(x-2)^2}=+\infty$

（4）当$x<-1$且$x\to -1$时，$\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{1}{x+1}=-\infty$

当$x>-1$且$x\to -1$时，$\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{1}{x+1}=+\infty$

$\therefore\ \lim\limits_{x\to -1}\dfrac{1}{x+1}=\infty$

〔注意〕在（2）中，在$x=-1$时，如果分母$\neq 0$，则分母、分子不用因式分解，可直接将$x=-1$代入。

在（4）中，前两式往往写成$\lim\limits_{x\to -1-0}\dfrac{1}{x+1}=-\infty$，和$\lim\limits_{x\to -1+0}\dfrac{1}{x+1}=+\infty$。

〔要领〕在分母不等于0的情况下，可将数值直接代入。

〔试题〕

2. 求下列极限

(1) $\lim\limits_{x\to -1}(x^2+1)$

(2) $\lim\limits_{x\to 2}(x^3-3x+1)$

(3) $\lim\limits_{h\to 0}(3+2h+h^2)$

(4) $\lim\limits_{y\to -2}(y+3)(y^2-1)$

3. 求下列极限

(1) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x-1}{x^2+1}$　　(2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2-x+1}{x^2+3}$

(3) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^2-x}{x^2+3x}$　　(4) $\lim\limits_{t\to 2}\dfrac{t^2+t-2}{t^2-1}$

4. 求下列极限值：

(1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x^2}$　　(2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x}$

(3) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1}{|x-1|}$　　(4) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{1}{x^2-4}$

〔例〕　　($\dfrac{0}{0}$型的极限)

5. 求下列极限：

(1) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-1}{x-1}$　　(2) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2x^3-x-1}{x^2+2x-1}$

(3) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{x-4}{\sqrt{x}-2}$　　(4) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{\sqrt{x+1}-1}$

〔思考方法〕（1）若 $x=1$，则分母、分子都为0，但由于 $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$ 是在 $x\neq 1$ 处考虑，故可变形为 $\frac{x^2-1}{x-1}=\frac{(x+1)(x-1)}{x-1}=x+1$。（2）变为分母 $\neq 0$ 的形式进行计算。（3）若 $x=4$，分母、分子都为0，可将分母有理化，即分母、分子同时乘以 $\sqrt{x}+2$。（4）将分母有理化。

〔解〕

（1）由于 $x\neq 1$ 故

$$\frac{x^2-1}{x-1}=\frac{(x+1)(x-1)}{x-1}=x+1$$

$$\therefore \lim_{x\to 1}\frac{x^2-1}{x-1}=\lim_{x\to 1}(x+1)=1+1=2$$

（2）由于 $x\neq 1$ 故

$$\lim_{x\to 1}\frac{2x^3-x-1}{x^2+2x-3}=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(2x^2+2x+1)}{(x-1)(x+3)}$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{2x^2+2x+1}{x+3}$$

$$=\frac{2+2+1}{1+3}=\frac{5}{4}$$

$$(3)\lim_{x\to 4}\frac{x-4}{\sqrt{x}-2}=\lim_{x\to 4}\frac{(x-4)(\sqrt{x}+2)}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)}$$

$$=\lim_{x\to 4}\frac{(x-4)(\sqrt{x}+2)}{x-4}$$

$$=\lim_{x\to 4}(\sqrt{x}+2)$$

$$=\sqrt{4}+2=4$$

$$(4)\lim_{x\to 0}\frac{x}{\sqrt{x+1}-1}=\lim_{x\to 0}\frac{x(\sqrt{x+1}+1)}{(\sqrt{x+1}-1)(\sqrt{x+1}+1)}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{x(\sqrt{x+1}+1)}{(x+1)-1}$$

$$=\lim_{x\to 0}(\sqrt{x+1}+1)$$

$$=\sqrt{1}+1=2$$

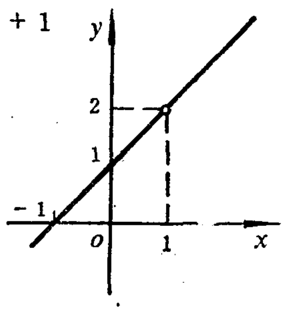
〔注意〕在(1)中，设$f(x)=\frac{x^2-1}{x-1}$，得$f(1)=\frac{0}{0}$，所以$f(1)$无定义。（也就不能计算$f(1)$的值。）但是，分母、分子可同时用$x-1$来除，即认为可以用公因式$(x-1)$来约分。一般地，当$f(x)$，$g(x)$为整函数的时候，如果对于$\varphi(x)=\frac{f(x)}{g(x)}$有

$$\varphi(a)=\frac{f(a)}{g(a)}=\frac{0}{0},$$

则$f(x)$，$g(x)$都包含$(x-a)$这一因式。

再者，函数$f(x)=\frac{x^2-1}{x-1}$在$x=1$无定义，就是说$f(1)$不能计算，但是由于在$x<1$，$x>1$时

$$f(x)=\frac{(x-1)(x+1)}{x-1}=x+1$$



故$y=f(x)$的图象(如右图)是除去点$(1,2)$的直线$y=x+1$。

〔**另解**〕(3)当$x\to 4$时，可以认为$x>0$，故

$x=(\sqrt{x})^2$

$$\therefore \lim_{x\to 4}\frac{x-4}{\sqrt{x}-2}=\lim_{x\to 4}\frac{(\sqrt{x}+2)(\sqrt{x}-2)}{\sqrt{x}-2}$$

$$=\lim_{x\to 4}(\sqrt{x}+2)$$

$$=\sqrt{4}+2=4$$

〔要领〕对于求$\frac{0}{0}$型的极限，可将分母，分子因式分解、约分；在分母或分子为无理式时，可将分母或分子有理化。总之，化为分母$\neq 0$的形式。

〔试题〕

6. 求下列极限：

(1) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{2x^3+3x^2}{x^2-x}$　　(2) $\lim\limits_{x\to 2}\frac{2x^2-x-6}{2x^2-7x-6}$

(3) $\lim\limits_{x\to 3}\frac{x-3}{x^4-81}$　　(4) $\lim\limits_{x\to\sqrt{2}}\frac{x^4-4}{x^2-2}$

(5) $\lim\limits_{x\to a}\frac{x^8-a^8}{x-a}$　　(6) $\lim\limits_{x\to a}\frac{x^3-ax^2+a^2x-a^3}{x-a}$

7. 求下列极限：

(1) $\lim\limits_{x\to 2}\left[\frac{x-1}{x^4-4}-\frac{2x-3}{2x(x-2)}\right]$

(2) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x}[(a+x)^2-a^2]$

(3) $\lim\limits_{h\to 0}\frac{1}{h}[(x-h)^3-x^3]$

(4) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x}\left[\frac{1}{(a+x)^2}-\frac{1}{a^2}\right]$

8． 求下列极限

(1) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x^3}-1}$　　　(2) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x+1}{\sqrt[3]{x}+1}$

(3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{5+x}-\sqrt{5}}{3x}$

(4) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{\sqrt{5-x}-\sqrt{5}}$　　　(5) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{2-\sqrt{8-x^3}}{x-2}$

(6) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x+x^2}+x-1}{x}$

〔提示〕(1) $\sqrt{x^3}-1=(\sqrt{x})^3-1=(\sqrt{x}-1)$
$\cdot(x+\sqrt{x}+1)$

(2) $x+1=(\sqrt[3]{x})^3+1=(\sqrt[3]{x}+1)(\sqrt[3]{x^2}-\sqrt[3]{x}+1)$

〔例〕（$\dfrac{\infty}{\infty}$，$\infty-\infty$型的极限）

9． 求下列极限：

(1) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^2+x+1}{4x^2-5}$　　　(2) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x(x+1)}{x^2-1}$

(3) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{1+x^2}-1}{x}$　　　(4) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sqrt{1+x^2}-1}{x}$

(5) $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1})$

(6) $\lim\limits_{x\to+\infty}(x-\sqrt{x^2+1})$

〔思考方法〕(1) 因为 $x\to\infty$，可以认为 $x\neq 0$，故可考虑用 x^2 除分子、分母。

(2) 由 $x\to-\infty$，可认为 $x<-1$，所以 $x+1\neq 0$。先用 $x+1$ 除分子、分母，再用 x 除分子、分母。

（3）根据 $x\to+\infty$，可认为 $x>0$，用 x 除分子、分母，运用 $\frac{1}{x}=\sqrt{\frac{1}{x^2}}$。

（4）设 $x=-t$，注意到当 $x\to-\infty$ 时，$t\to+\infty$。再按（3）的方法处理。

（5）、（6），认为是分母都为 1 的分式，再将分子有理化。

〔**解**〕

（1）$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x^2+x+1}{4x^2-5}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}{4-\frac{5}{x^3}}=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$

（2）$\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{x(x+1)}{x^2-1}=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{x(x+1)}{(x+1)(x-1)}$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{x}{x-1}=\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{1-\frac{1}{x}}=1$$

（3）$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{1+x^2}-1}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{x}\sqrt{1+x^2}-\frac{1}{x}\right)$

$$=\lim_{x\to+\infty}\left[\sqrt{\frac{1}{x^2}(1+x^2)}-\frac{1}{x}\right]$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\left[\sqrt{\frac{1}{x^2}+1}-\frac{1}{x}\right]$$

$$=1-0=1$$

（4）设 $x=-t$，则

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{1+x^2}-1}{x}=\lim_{t\to+\infty}\frac{\sqrt{1+t^2}-1}{-t}$$