



中国科学院研究生教学丛书



计算固体力学方法

吴永礼 编著



科学出版社

www.sciencep.com

内 容 简 介

本书是《中国科学院研究生教学丛书》之一。

本书介绍当前在计算固体和结构力学中广泛研究和应用的四种数值计算方法:有限元法、加权余量法、边界元法和无网格法,并系统地论述了这四种方法的理论基础和相应的离散方法,特别对有限元法进行了详尽的介绍:有限元法和变分原理的关系,各种类型的有限单元,材料非线性和几何非线性问题的有限元解法,有限元代数方程的解法和动力问题的有限元解法。希望通过阅读本书,能使读者比较全面地了解有关计算固体力学的知识,使读者在遇到固体和结构力学问题时能找到相应的计算方法。

图书在版编目(CIP)数据

计算固体力学方法/吴永礼编著. —北京:科学出版社,2003

(中国科学院研究生教学丛书/白春礼主编)

ISBN 7-03-011175-3

I. 计… II. 吴… III. 计算固体力学方法-研究生-教材
IV. O34

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2003)第 009080 号

责任编辑: 郝德平 / 责任校对: 宋玲玲

责任印制: 安春生 / 封面设计: 王 浩

科学出版社 出版

北京东黄城根北街16号

· 邮政编码 100717

[http // www sciencep com](http://www.sciencep.com)

· 双青印刷厂 印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2003年4月第一版 开本: 850×1168 1/32

2003年4月第一次印刷 印张: 10 7/8

印数: 1—3 000 字数: 280 000

定价: 25.00 元

(如有印装质量问题, 我社负责调换〈环伟〉)

《中国科学院研究生教学丛书》总编委会

主任：白春礼

副主任：何岩 师昌绪 杨乐 汪尔康
沈允钢 黄荣辉 叶朝辉

委员：朱清时 叶大年 王水 施蕴渝
余翔林 冯克勤 冯玉琳 高文
洪友士 王东进 龚立 吕晓澎
林鹏

《中国科学院研究生教学丛书》物理学科编委会

主编：叶朝辉

副主编：王水

编委：张肇西 詹文山 俞昌旋 李椿萱
汪景琇 李师群 戴远东

《中国科学院研究生教学丛书》序

在21世纪曙光初露，中国科技、教育面临重大改革和蓬勃
发展之际，《中国科学院研究生教学丛书》——这套凝聚了中国
科学院新老科学家、研究生导师们多年心血的研究生教材面世
了。相信这套丛书的出版，会在一定程度上缓解研究生教材不足
的困难，对提高研究生教育质量起着积极的推动作用。

21世纪将是科学技术日新月异，迅猛发展的新世纪，科学
技术将成为经济发展的最重要的资源和不竭的动力，成为经济
和社会发展的首要推动力量。世界各国之间综合国力的竞争，实质
上是科技实力的竞争。而一个国家科技实力的决定因素是它所拥
有的科技人才的数量和质量。我国要想在21世纪顺利地实施
“科教兴国”和“可持续发展”战略，实现小平同志规划的第三
步战略目标——把我国建设成中等发达国家，关键在于培养造就
一支数量宏大、素质优良、结构合理、有能力参与国际竞争与合
作的科技大军，这是摆在我国高等教育面前的一项十分繁重而光
荣的战略任务。

中国科学院作为我国自然科学与高新技术的综合研究与发展
中心，在建院之初就明确了出成果出人才并举的办院宗旨，长期
坚持走科研与教育相结合的道路，发挥了高级科技专家多、科研
条件好、科研水平高的优势，结合科研工作，积极培养研究生；
在出成果的同时，为国家培养了数以万计的研究生。当前，中国
科学院正在按照江泽民同志关于中国科学院要努力建设好“三个
基地”的指示，在建设具有国际先进水平的科学研究基地和促进
高新技术产业发展基地的同时，加强研究生教育，努力建设好高
级人才培养基地，在肩负起发展我国科学技术及促进高新技术产业
发展重任的同时，为国家源源不断地培养输送大批高级科技人

才。

质量是研究生教育的生命，全面提高研究生培养质量是当前我国研究生教育的首要任务。研究生教材建设是提高研究生培养质量的一项重要基础性工作。由于各种原因，目前我国研究生教材的建设滞后于研究生教育的发展。为了改变这种情况，中国科学院组织了一批在科学前沿工作，同时又具有相当教学经验的科学家撰写研究生教材，并以专项资金资助优秀的研究生教材的出版。希望通过数年努力，出版一套面向 21 世纪科技发展，体现中国科学院特色的高水平的研究生教学丛书。本丛书内容力求具有科学性、系统性和基础性，同时也兼顾前沿性，使阅读者不仅能获得相关学科的比较系统的科学基础知识，也能被引导进入当代科学研究的前沿。这套研究生教学丛书，不仅适合于在校研究生学习使用，也可以作为高校教师和专业研究人员工作和学习的参考书。

“桃李不言，下自成蹊。”我相信，通过中国科学院一批科学家的辛勤耕耘，《中国科学院研究生教学丛书》将成为我国研究生教育园地的一丛鲜花，也将似润物春雨，滋养莘莘学子的心田，把他们引向科学的殿堂，不仅为科学院，也为全国研究生教育的发展作出重要贡献。

钱伯群

前 言

计算固体(结构)力学是以电子计算机为主要工具,用数值方法解决各种固体和结构力学问题的学科。从 20 世纪 50 年代以来,它在固体力学的各分支学科和边缘学科中得到了很大的发展,无论是在科学研究还是工程技术应用中均得到广泛的应用,现在它已成为固体力学除理论研究和实验研究以外的第三种手段。随着计算机的迅速发展,计算固体力学解决问题的能力也将不断扩大,为了使计算固体力学能够解决不断增加的新的困难问题,需要有新的数值计算方法。这就要求从事固体和结构力学研究和开发的科技工作者,以及从事各种工程结构设计和计算的工程技术人员,能够较好地掌握固体和结构计算力学的基本原理和数值计算方法,以便一方面能有效地利用现有的计算成果和计算软件,另一方面能具有改进现有计算方法和扩充已有计算软件的能力,甚至能提出更好的计算方法和编制适合自己的计算软件。

为了适应上述需要,我们编写了这本书,希望能为固体力学研究、结构设计和结构强度计算的工程技术人员、高等院校的师生和研究生提供一本参考读物。本书全面地介绍了当前计算固体力学中用得较多的四种数值计算方法:有限元法、加权余量法、边界元法和无网格法。

本书可作为固体和结构力学和计算力学专业本科生和研究生的教材,也可作为相关专业研究人员,工程技术人员和教师的参考书。

本书由中国科学院研究生教材出版基金资助出版,作者在此表示感谢。

由于作者水平有限，书中难免有不妥之处，恳请读者批评指正。

吴永礼

北京中关村中国科学院力学研究所

2002年12月

目 录

第一章 弹性力学和变分原理	(1)
§ 1.1 弹性力学的基本方程和边界条件	(1)
§ 1.2 弹性力学的变分原理	(7)
1.2.1 应变能和应变余能	(7)
1.2.2 虚位移原理和最小势能原理	(8)
1.2.3 虚应力原理和最小余能原理	(11)
1.2.4 Hellinger-Reissner 变分原理	(13)
1.2.5 胡海昌-鷺津久一郎变分原理	(16)
1.2.6 参数变分原理	(19)
§ 1.3 变分原理的应用实例	(31)
§ 1.4 里茨法和伽辽金法	(38)
第二章 有限元法	(48)
§ 2.1 协调模型——位移元	(50)
§ 2.2 平衡模型 I	(63)
§ 2.3 平衡模型 II	(65)
§ 2.4 杂交应力模型	(67)
§ 2.5 杂交位移模型	(72)
§ 2.6 混合模型	(73)
第三章 常用的有限元单元	(76)
§ 3.1 三角形单元族	(76)
§ 3.2 等参数单元	(84)
§ 3.3 奇异性单元	(90)
§ 3.4 板壳单元	(95)
3.4.1 三角形薄板单元和薄壳单元	(95)
3.4.2 厚板单元和厚壳单元	(107)

第四章 材料非线性有限元法	(121)
§ 4.1 弹塑性有限元分析	(122)
4.1.1 材料的屈服准则	(123)
4.1.2 强化理论	(126)
4.1.3 塑性本构关系	(129)
4.1.4 塑性流动理论的变分原理	(137)
4.1.5 弹塑性问题的有限元解法	(141)
§ 4.2 蠕变的有限元分析	(144)
§ 4.3 弹黏塑性的有限元分析	(147)
第五章 几何非线性有限元分析	(149)
§ 5.1 有限应变与应力	(149)
§ 5.2 变形率和本构关系	(152)
§ 5.3 几何非线性有限元方程的建立	(159)
5.3.1 全拉格朗日列式法	(159)
5.3.2 更新的拉格朗日列式法	(164)
5.3.3 任意拉格朗日-欧拉描述法	(168)
第六章 热传导和热应力的有限元分析	(174)
§ 6.1 热传导问题的有限元分析	(174)
6.1.1 导热的基本方程	(174)
6.1.2 稳态温度场的有限元解	(177)
6.1.3 瞬态温度场的有限元解	(184)
§ 6.2 热弹性应力问题的有限元分析	(189)
第七章 弹性动力学问题的有限元法	(193)
§ 7.1 弹性系统的动力学方程	(193)
7.1.1 达朗贝尔原理和动力学方程	(193)
7.1.2 哈密尔顿原理和动力学方程	(194)
7.1.3 质量矩阵	(195)
7.1.4 阻尼矩阵	(196)
§ 7.2 弹性结构的自由振动特性	(198)
7.2.1 特征值问题的一些特性	(199)

7.2.2	矩阵特征值问题的求解方法	(204)
§ 7.3	弹性系统的动力响应	(217)
7.3.1	中心差分法	(218)
7.3.2	威尔逊法	(219)
7.3.3	纽马克法	(221)
7.3.4	模态叠加法	(223)
§ 7.4	弹性结构在流体中的耦合振动	(225)
第八章	加权余量法	(228)
§ 8.1	微分方程的弱形式	(228)
§ 8.2	加权余量法的计算过程	(231)
§ 8.3	加权余量法的权函数	(233)
§ 8.4	加权余量法的试函数	(236)
§ 8.5	应用实例	(237)
第九章	边界元法	(244)
§ 9.1	直接边界元法的位移法	(245)
§ 9.2	直接边界元法的应力法	(251)
第十章	无网格法	(258)
§ 10.1	无网格法的近似方法	(258)
10.1.1	光滑粒子流体动力学法	(259)
10.1.2	再生核质点法	(262)
10.1.3	移动最小二乘近似	(267)
10.1.4	单位分解法	(275)
§ 10.2	不连续性的处理	(276)
10.2.1	函数不连续的处理方法	(276)
10.2.2	场函数导数不连续性的处理方法	(279)
§ 10.3	离散化方法和数值积分方法	(280)
10.3.1	配点法	(281)
10.3.2	伽辽金法	(282)
10.3.3	无网格局部彼得洛夫-伽辽金法	(284)
§ 10.4	基本边界条件的实现	(287)

10.4.1	配点法和修正配点法	(287)
10.4.2	罚方法	(290)
10.4.3	修正变分原理	(291)
10.4.4	与有限元耦合法	(292)
第十一章	代数方程组的解法	(298)
§ 11.1	线性代数方程组的解法	(298)
11.1.1	线性代数的一些基础知识	(298)
11.1.2	直接解法	(301)
11.1.3	迭代解法	(306)
§ 11.2	非线性代数方程的解法	(309)
11.2.1	直接迭代法	(310)
11.2.2	牛顿-拉弗森法	(311)
11.2.3	修正牛顿-拉弗森法	(312)
11.2.4	拟牛顿法	(313)
11.2.5	增量法	(315)
11.2.6	弧长法	(318)
§ 11.3	迭代的加速技术	(322)
11.3.1	Aitken 加速法	(322)
11.3.2	线性搜索加速法	(323)
§ 11.4	迭代的收敛准则	(324)
参考文献	(326)

第一章 弹性力学和变分原理

弹性力学是固体力学的一个分支. 它研究弹性体在外力或其他因素(如温度变化等)作用下所产生的应力、应变和位移, 并为各种结构或其构件的强度、刚度和稳定性等的计算提供必要的理论基础和计算方法. 本章将介绍弹性力学的基本方程及有关的变分原理.

§ 1.1 弹性力学的基本方程和边界条件

弹性力学的研究对象是由实际工程材料抽象出来的弹性可变形物体, 简称为弹性体. 在建立这种理想模型时作了一些假设. 引进这些假设在于突出矛盾的主要因素, 而忽略一些次要因素. 下面是弹性力学中的几个基本假设.

一、连续性假设

弹性体是一种密实的连续介质, 并在整个变形过程中保持其连续性. 微观物理学已证明, 任何物体都是由分子、原子组成的, 是稀疏分布的、不连续的. 但是, 弹性理论和其他宏观物理学分支一样, 不考虑实际工程材料的微观粒子结构, 而采用宏观性能试验测定的材料统计物理性质(如质量、弹性常数、热膨胀系数等)来描述物体. 连续性假设有两层含义:

1. 把物体抽象成一个形状和位置与其相同的、连续而密实的空间几何体, 物体的统计物理性质以及位移、应变、应力、能量等物理量都作为空间点位置的函数定义在这个几何体上, 这种抽象的数学模型称为连续介质;

2. 物体在整个变形过程中始终保持连续, 原来相邻的两个任

意点,变形后仍是相邻点,不会出现开裂或重叠现象.用数学描述即为:定义在该连续介质上的物理性质和物理量,除了在某些孤立的点、线、面上可能奇异或间断外,在变形过程中始终保持为空间点位的连续函数.有了这个假设就可利用高等数学中的微积分知识来处理连续介质问题.

二、弹性假设

弹性体的变形与载荷在整个加卸载过程中存在一一对应的单值函数关系,且当载荷卸去后变形完全消失,弹性体恢复其初始的形状和尺寸.这里的单值函数关系可以是线性的或非线性的,取决于材料性质与变形大小.

当应力小于弹性极限时,大多数工程材料的应力应变关系是线性的,服从虎克定律,这些材料称为线性弹性材料或线弹性体.也有少数材料的弹性应力应变关系是非线性的,这会导致变形与载荷的非线性关系,称为材料的非线性效应.

在小变形(变形和物体尺寸相比可以忽略不计)的情况下,应变和位移导数间的关系是线性的.但对于大应变情况,必须考虑几何关系中的二阶或高阶非线性项,它也会导致变形与载荷的非线性关系,称为几何非线性效应.

这里讨论线弹性体的小变形情况.非线性问题将在后面介绍.为了简化,进一步引进如下辅助假设:

三、均匀性假设

物体在各点处的弹性性质都相同.实际上,金属材料都可看作均匀的.对于混凝土、玻璃钢等非均质材料,如果不细究其不同组分交界面处的局部应力,可以采用在足够大的材料试件上测得的弹性常数来简化成均匀材料.但是,有些新型材料,例功能梯度材料,是不能采用这个假设的.

四、自然状态假设

假设物体不受外力作用和温度的影响,其中便没有应力和变形,即不考虑由制造工艺引起的残余应力和装配应力。

在经典的弹性力学中还有各向同性假设,即材料是各向同性的。现在一些复合材料并不是各向同性的,所以就不必用各向同性这个假设了。

弹性力学的理论是建立在几何方程、平衡方程和本构方程三组方程的基础上的。这里给出弹性体的几何方程、平衡方程和本构方程^[1-3]。

(一) 几何方程 - 应变 - 位移关系

小变形情况下的应变位移关系为

$$\epsilon_{ij} = (u_{i,j} + u_{j,i})/2, \quad (1.1.1)$$

式中 ϵ_{ij} , u_i 分别为应力张量分量和位移向量分量。采用张量标记时,重复下标表示在该下标的取值范围内求和,三维情况下取值范围为 3,二维情况取值范围为 2。式中下标“ i ”表示对独立坐标 x_i 取偏导数。

应变位移关系可以用矩阵形式表示为

$$\{\epsilon\} = [\Delta]\{u\}, \quad (1.1.2)$$

式中 $\{\epsilon\}$, $\{u\}$ 为应变列阵和位移列阵:

$$\{\epsilon\} = [\epsilon_x \quad \epsilon_y \quad \epsilon_z \quad \gamma_{xy} \quad \gamma_{yz} \quad \gamma_{zx}]^T, \quad (1.1.3)$$

$$\{u\} = [u \quad v \quad w]^T \quad (1.1.4)$$

式(1.1.2)中 $[\Delta]$ 为微分算子。在三维直角坐标情况下可表达为

$$[\Delta] = \begin{bmatrix} \partial/\partial x & 0 & 0 \\ 0 & \partial/\partial y & 0 \\ 0 & 0 & \partial/\partial z \\ \partial/\partial y & \partial/\partial x & 0 \\ 0 & \partial/\partial z & \partial/\partial y \\ \partial/\partial z & 0 & \partial/\partial x \end{bmatrix}, \quad (1.1.5)$$

式中的 γ_{xy} , γ_{yz} , γ_{zx} 为工程切应变,它们与张量切应变 ϵ_{xy} , ϵ_{yz} , ϵ_{zx}

的关系为

$$\gamma_{xy} = 2\epsilon_{xy}, \quad \gamma_{yz} = 2\epsilon_{yz}, \quad \gamma_{xz} = 2\epsilon_{xz}.$$

(二) 平衡方程

根据微元体的平衡条件可以得出平衡方程

$$\sigma_{ij,j} + f_i = 0, \quad (1.1.6)$$

式中 σ_{ij}, f_i 为应力张量分量和体力向量分量.

用矩阵形式表示可写为

$$[\Delta]^T \{\sigma\} + \{f\} = 0, \quad (1.1.7)$$

式中 $[\Delta]^T$ 为公式(1.1.5)的转置矩阵, $\{\sigma\}$ 为应力列阵, $\{f\}$ 为体力列阵.

$$\{\sigma\} = [\sigma_x \quad \sigma_y \quad \sigma_z \quad \tau_{xy} \quad \tau_{yz} \quad \tau_{zx}]^T, \quad (1.1.8)$$

$$\{f\} = [f_x \quad f_y \quad f_z]^T \quad (1.1.9)$$

此外,还有应变协调方程,它是从应变位移关系中消去位移而得出的方程,这里列出如下:

$$\epsilon_{ij,kl} + \epsilon_{kl,ij} - \epsilon_{ik,jl} - \epsilon_{jl,ik} = 0, \quad (1.1.10)$$

(三) 本构方程——材料的应力-应变关系

对于各向异性的材料,本构方程为

$$\sigma_{ij} = D_{ijkl}\epsilon_{kl}, \quad (1.1.11)$$

式中 D_{ijkl} 为材料本构张量分量.

本构方程可用矩阵形式表示

$$\{\sigma\} = [D]\{\epsilon\}, \quad (1.1.12)$$

材料的本构矩阵 $[D]$ 的一般形式为

$$[D] = \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & D_{13} & D_{14} & D_{15} & D_{16} \\ D_{21} & D_{22} & D_{23} & D_{24} & D_{25} & D_{26} \\ D_{31} & D_{32} & D_{33} & D_{34} & D_{35} & D_{36} \\ D_{41} & D_{42} & D_{43} & D_{44} & D_{45} & D_{46} \\ D_{51} & D_{52} & D_{53} & D_{54} & D_{55} & D_{56} \\ D_{61} & D_{62} & D_{63} & D_{64} & D_{65} & D_{66} \end{bmatrix}, \quad (1.1.13)$$

用马克斯威尔-贝蒂互等定理可以证明,本构矩阵是对称的.

因此,一般情况下各向异性材料有 21 个材料常数.

有的材料对物体的某些轴具有对称性,这些轴称为对称轴,而且对称轴往往是正交的,这时材料是正交各向异性材料.如果将坐标取在对称轴上,则本构矩阵(1.1.13)可简化为

$$[D] = \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & D_{13} & 0 & 0 & 0 \\ & D_{22} & D_{23} & 0 & 0 & 0 \\ & & D_{33} & 0 & 0 & 0 \\ & & & D_{44} & 0 & 0 \\ & & & & D_{55} & 0 \\ & & & & & D_{66} \end{bmatrix}, \quad (1.1.14)$$

这时材料常数为 9 个.由于材料矩阵是对称的,所以在式(1.1.14)中省略了下半三角部分,以下也采用这种省略写法.

对于常见的各向同性材料,材料本构矩阵可化为

$$[D] = \frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)} \times \begin{bmatrix} 1 & \frac{\nu}{1-\nu} & \frac{\nu}{1-\nu} & 0 & 0 & 0 \\ & 1 & \frac{\nu}{1-\nu} & 0 & 0 & 0 \\ & & 1 & 0 & 0 & 0 \\ & & & \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)} & 0 & 0 \\ & & & & \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)} & 0 \\ & & & & & \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)} \end{bmatrix}, \quad (1.1.15)$$

即各向同性材料独立的材料常数只有两个:弹性模量 E 和泊松比 ν .此外,在弹性力学中还常用其他材料常数,如剪切模量 G 、体积模量 K 、拉梅(Lamé)常数 λ 和 μ .它们与弹性模量和泊松比之间的关系为

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)}, \quad K = \frac{E}{3(1-2\nu)}, \quad \nu = \frac{\lambda}{2(\lambda + \mu)}, \quad (1.1.16a)$$

$$\lambda = \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)}, \quad E = \frac{\mu(3\lambda + 2\mu)}{\lambda + \mu}, \quad \mu = G. \quad (1.1.16b)$$

在材料为各向同性时, 式(1.1.11)中的 D_{ijkl} 可以写成

$$D_{ijkl} = \frac{2G\nu}{1-2\nu} \delta_{ij} \delta_{kl} + G(\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}),$$

式中 δ_{ij} 为克罗内克符号, $i=j$ 时 $\delta_{ij}=1$, $i \neq j$ 时 $\delta_{ij}=0$.

在轴对称问题中, 弹性矩阵为

$$[D] = \frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)} \times \begin{bmatrix} 1 & \nu/(1-\nu) & 0 & \nu/(1-\nu) \\ & 1 & 0 & \nu/(1-\nu) \\ & & (1-2\nu)/2(1-\nu) & 0 \\ & & & 1 \end{bmatrix}, \quad (1.1.17)$$

在平面问题中弹性矩阵为

$$[D] = \frac{E_0}{(1-\nu_0^2)} \begin{bmatrix} 1 & \nu_0 & 0 \\ & 1 & 0 \\ & & (1-\nu_0)/2 \end{bmatrix}, \quad (1.1.18)$$

对平面应力, $E_0 = E$, $\nu_0 = \nu$; 对平面应变, $E_0 = E/(1-\nu^2)$, $\nu_0 = \nu/(1-\nu)$.

除了基本方程以外, 还有边界条件. 边界条件有位移边界条件和力的边界条件两种:

1. 在力边界 S_σ 上相应的边界条件为

$$\sigma_{ij} n_j \equiv \bar{p}_i = \bar{p}_i, \quad (1.1.19)$$

式中 \bar{p}_i 为已知的外部作用力, n_j 为边界上外法线的方向余弦.

2. 在位移边界 S_u 上相应的边界条件为

$$u_i = \bar{u}_i, \quad (1.1.20)$$