2004年

北京文都培训学校考研复习推荐用书

考研数学复习精编

KAOYAN SHUXUE FUXI JINGBIAN

经济类

主　编　蔡子华

副主编　韩於羹
曾祥金
樊启斌

石油工业出版社

图书在版编目(CIP)数据

2004年考研数学复习精编．经济类/蔡子华主编．北京:石油工业出版社,2003.3

ISBN 7-5021-4170-7

Ⅰ．2…

Ⅱ．蔡…

Ⅲ．高等数学-研究生-入学考试-自学参考资料

Ⅳ．013

中国版本图书馆CIP数据核字(2003)第009718号

石油工业出版社出版发行

发行部电话:(010)64210392

(100011　北京安定门外安华里二区一号楼)

北京国民灰色系统科学研究院计算机中心排版

石油工业出版社印刷厂印刷

*

787×1092毫米 16开本 27.5印张 622千字 印1—5000

2003年3月北京第1版 2003年3月北京第1次印刷

ISBN 7-5021-4170-7/O·9

定价:35.80元

前　　言

全国硕士生入学统一考试是我国选拔硕士研究生的主要途径，而数学统考在此统考中占有极其重要的地位。为了使数学统考更加完备和科学，国家教育部对数学考试大纲进行了重大修订，对试卷重新作了分类，对考试内容的深度和广度作了较大的调整。这些变化对考生提出了更高的要求。因此，考生们迫切需要一本既符合《考试大纲》的要求，又能引导自己深刻理解《考试大纲》的精神，进行全面、系统复习的指导书。本书即为此而编写。

本书作者均长期从事高校数学教学工作，曾参加过多种层次的考试命题，并多年参与研究生入学数学考试的辅导及阅卷工作。在此过程中，对《考试大纲》和历年的试卷进行过深入的研究，积累了丰富的经验，并将这些经验用到考研辅导班中，使考生在最短的时间内获得最大的收效，因此受到全国考生的广泛欢迎。

本书的特点是：

一、完全参照《考试大纲》编写，无超过考试大纲要求的内容。

二、完全涵盖了《考试大纲》规定的内容，突出了对数学基本概念、基本原理的理解和对基本解题方法的训练，以便提高考生的运算能力、抽象概括能力、逻辑思维能力及空间想象能力。

三、通过对典型例题的分析，引导考生深入理解数学的基本概念及它们的内在联系，便于考生突破难点，提高解答难题的能力。

四、针对考生难于将数学知识应用到实践中去的现状，本书编有大量的应用题，引导考生掌握建立数学模型的基本方法，提高考生解决实际问题的能力。

五、对各类重要类型题，本书都作了系统归纳，并给出了一些独特解法，便于考生举一反三，融会贯通。

六、本书所选例题具有广泛的代表性，难度和历年试题相当，力求摒弃偏题与怪题。

七、本书每章都附有大量练习题，并在书后给出答案，便于考生检验解题是否正确。

八、为了沟通各学科知识之间的联系，本书的第四部分给出了综合题解，引导考生学会运用数学知识求解综合题。

在本书的编写过程中，王嘉、赵伟、李涛、王文倩、李玉玲、陶伟宏、程进、李荫、刘书刚、黄瑶、崔卫国、叶传平、郎明、李栋、彭建森、万飞、马刚、袁泉、贾群、陈燕、徐涛、周云、张波、谢丽、宛宏斌、郭卫烈等同志做了大量有益工作，在此一并表示感谢。由于时间仓促，错误在所难免，望专家、读者批评指正。

作　者

2003 年 2 月

目　录

第一部分　高等数学

第二部分　线性代数

第三部分　概率与数理统计

第四部分　综合题解

第一部分　高等数学

第一章　函数 极限 连续性

一　内容提要

(一) 主要内容

1. 有关函数的基础知识

(1) 函数、反函数、复合函数的概念;

(2) 各基本初等函数的图像、性质,初等函数的概念;

(3) 函数的特性.

① 有界性:

a. 定义:对一切 $x \in D$,存在正数 M,使 $|f(x)| \leqslant M$,则称 $f(x)$ 在 D 上有界.

b. 应注意的问题:函数 $y = f(x)$ 在 D 上有界,其导函数在 D 上不一定有界,如 $y = \sqrt[3]{x}$ 在 $(-1,1)$ 上有界,但 $y' = \dfrac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$ 在 $(-1,1)$ 上无界.

② 单调性:

定义:对一切 $x_1, x_2 \in D$,若 $x_1 < x_2$ 时 $f(x_1) < (>) f(x_2)$,则称 $f(x)$ 在 D 上单调增加(减少).

③ 奇偶性:

a. 定义:$f(x)$ 的定义域 D 关于原点对称,若对一切 $x \in D$,$f(-x) = f(x)$,则 $f(x)$ 为偶函数;$f(-x) = -f(x)$,则 $f(x)$ 为奇函数.

b. 性质:奇 + 奇 = 奇,偶 + 偶 = 偶,奇 · 偶 = 奇,偶 · 偶 = 偶,奇 · 奇 = 偶.

c. 导函数与原函数的奇偶性:

可导偶函数的导函数是奇函数;

可导奇函数的导函数为偶函数;

可积奇函数的原函数是偶函数;

可积偶函数的原函数中有一个是奇函数.

④ 周期性:

a. 定义:对函数 $f(x)$ 的定义域内一切 x,$\exists\, T \neq 0$,使 $f(x+T) = f(x)$,则称 $f(x)$ 为周期函数.其中最小的正数 T 称为最小正周期,简称为周期.

b. 导函数、原函数的周期性:可导周期函数的导函数是周期函数;可积周期函数的原函数不一定是周期函数.

2．极限的概念及运算

(1) 各类极限的定义；

(2) $x \to x_0$ 时 $f(x)$ 极限存在的充要条件；

(3) 极限的四则运算法则.

3．无穷小与无穷大

(1) 无穷小的定义；

(2) 无穷小的运算性质；

(3) 无穷小的比较；

(4) 极限与无穷小的关系；

(5) 无穷大的定义；

(6) 无穷小与无穷大的关系.

4．极限存在的准则

(1) 夹逼定理；

(2) 单调有界数列必存在极限.

5．有关极限的定理

(1) 惟一性；

(2) 有界性；

(3) 保号性.

6．函数的连续性

(1) 函数在 x_0 点连续的定义；

(2) 函数的间断点的分类

$$\text{间断点}\begin{cases}\text{第一类间断点(左、右极限都存在)}\begin{cases}\text{可去间断点(左极限 = 右极限)}\\ \text{跳跃间断点(左极限} \neq \text{右极限)}\end{cases}\\ \text{第二类间断点(除第一类间断点外的间断点)}\end{cases}$$

(3) 连续函数的运算性质；

(4) 初等函数的连续性；

(5) 在闭区间上连续函数的性质：

① 最大、最小值定理；

② 介值定理及零点定理；

③ 在闭区间 $[a, b]$ 上连续的函数必取到最大、最小值之间的任何数值.

(二) 重要公式

1．极限的四则运算法则

若 $\lim f(x) = A$　　　　$\lim g(x) = B$

则
$$\lim[f(x) \pm g(x)] = A \pm B$$
$$\lim f(x) \cdot g(x) = A \cdot B$$
$$\lim \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{A}{B} (B \neq 0)$$
$$\lim[f(x)]^n = A^n$$

2. 重要结论

(1) $\lim\limits_{u\to0}\dfrac{\sin u}{u}=1$　　(2) $\lim\limits_{u\to0}(1+u)^{\frac{1}{u}}=e$

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1$　　(4) $\lim\limits_{n\to\infty}q^n=0\quad(|q|<1)$

3. 常用的等价无穷小

当 $u\to0$ 时：$\sin u\sim u$， $e^u-1\sim u$， $\ln(1+u)\sim u$， $\tan u\sim u$， $1-\cos u\sim\dfrac{u^2}{2}$， $\arcsin u\sim u$， $\arctan u\sim u$.

二　重　点

(1) 函数的概念与特性
(2) 极限的概念
(3) 无穷小的定义、运算性质及无穷小的比较
(4) 极限存在的准则；两个重要极限
(5) 极限的求法
(6) 函数连续性的定义及间断点的分类
(7) 在闭区间上连续函数的性质

三　典型例题解析

(一) 函数

【例 1】 判断下列各对函数是否相同：

(1) $y=\sin(\arcsin x)$ 与 $y=x$

(2) $y=\sqrt{\sin^2x}$ 与 $y=\sin x$

(3) $y=\cos^2t+\sin^2t+t$ 与 $y=1+x$

分析：判断两个函数是否相同，要看(1) 定义域是否相同；(2) 对应法则是否相同. 所谓对应法则相同，即对定义域内任取一自变量的值，两个函数的函数值相等.

解　(1) 是一对不相同的函数. 因前者定义域为 $|x|\leqslant1$，而后者为 $x\in(-\infty,+\infty)$.

(2) 是一对不相同的函数. 因为对应法则不相同. 如在定义域内取 $x=\dfrac{5}{4}\pi$，前者的函数值为$\dfrac{\sqrt2}{2}$，而后者的函数值为 $-\dfrac{\sqrt2}{2}$.

(3) 是一对相同的函数。因它们的定义域都是全体实数，且对任意实数 t，$\cos^2t+\sin^2t=1$，∴ 前者实为 $y=1+t$，与后者的对应法则相同. 至于用何字母表示自变量，与函数是否相同无关.

【例 2】 求函数 $y=\sqrt[3]{x+\sqrt{1+x^2}}+\sqrt[3]{x-\sqrt{1+x^2}}$ 的反函数.

解 $y^3=x+\sqrt{1+x^2}+3(\sqrt[3]{x+\sqrt{1+x^2}})^2(\sqrt[3]{x-\sqrt{1+x^2}})$

$+3(\sqrt[3]{x+\sqrt{1+x^2}})(\sqrt[3]{x-\sqrt{1+x^2}})^2+x-\sqrt{1+x^2}$

$=2x+3\sqrt[3]{(x+\sqrt{1+x^2})(x-\sqrt{1+x^2})}\cdot(\sqrt[3]{x+\sqrt{1+x^2}}$

$+\sqrt[3]{x-\sqrt{1+x^2}})$

$=2x+3(-1)(\sqrt[3]{x+\sqrt{1+x^2}}+\sqrt[3]{x-\sqrt{1+x^2}})$

$=2x-3y$

$\therefore\quad x=\frac{1}{2}(y^3+3y)$ 即所求反函数为 $y=\frac{1}{2}(x^3+3x)$.

【例 3】 已知 $f(\sin\frac{x}{2})=1+\cos x$,求 $f(\cos\frac{x}{2})$.

解 $f(\sin\frac{x}{2})=1+\cos x=2\cos^2\frac{x}{2}=2(1-\sin^2\frac{x}{2})$

设 $u=\sin\frac{x}{2}$,则 $f(u)=2(1-u^2)$

$\therefore\quad f(\cos\frac{x}{2})=2-2\cos^2\frac{x}{2}=2-(1+\cos x)=1-\cos x$

【例 4】 设 $f(x)=\frac{x}{x-1}$,且 $x\neq0$,求 $f[\frac{1}{f(x)}]$ 及 $f[f(x)]$.

解 $\frac{1}{f(x)}=\frac{x-1}{x}$

则 $f\left[\frac{1}{f(x)}\right]=f\left(\frac{x-1}{x}\right)=\frac{\frac{x-1}{x}}{\frac{x-1}{x}-1}=1-x.$

$f[f(x)]=f\left(\frac{x}{x-1}\right)=\frac{\frac{x}{x-1}}{\frac{x}{x-1}-1}=x.$

【例 5】 设 $f(x)=\begin{cases}x^2 & |x|\leqslant1\\ x & |x|>1\end{cases}$ $g(x)\begin{cases}2-x^2 & |x|\leqslant1\\ 2 & |x|>1\end{cases}$ 求 $f[g(x)]$.

解 $f[g(x)]=\begin{cases}[g(x)]^2 & |g(x)|\leqslant1\\ g(x) & |g(x)|>1\end{cases}$

$=\begin{cases}(2-x^2)^2 & |2-x^2|\leqslant1 \text{ 且 } |x|\leqslant1\\ 2-x^2 & |2-x^2|>1 \text{ 且 } |x|\leqslant1\\ 2 & |x|>1\end{cases}$

$=\begin{cases}1 & |x|=1\\ 2-x^2 & |x|<1\\ 2 & |x|>1\end{cases}$

【例 6】 设 $f(x)=\begin{cases}2x+\dfrac{3}{2}x^2 & -1\leqslant x<0\\ \dfrac{xe^x}{(e^x+1)^2} & 0\leqslant x\leqslant 1\end{cases}$ 求 $F(x)=\int_{-1}^{x}f(t)\mathrm{d}t$ 的表达式.

解 当 $-1\leqslant x<0$ 时

$$F(x)=\int_{-1}^{x}(2t+\frac{3}{2}t^2)\mathrm{d}t=\left(t^2+\frac{t^3}{2}\right)\Big|_{-1}^{x}=\frac{x^3}{2}+x^2-\frac{1}{2}.$$

当 $0\leqslant x\leqslant 1$ 时

$$\begin{aligned}F(x)&=\int_{-1}^{x}f(t)\mathrm{d}t=\int_{-1}^{0}f(t)\mathrm{d}t+\int_{0}^{x}f(t)\mathrm{d}t\\&=(t^2+\frac{t^3}{2})\Big|_{-1}^{0}+\int_{0}^{x}\frac{te^t}{(e^t+1)^2}\mathrm{d}t\\&=-\frac{1}{2}-\int_{0}^{x}t\mathrm{d}(\frac{1}{e^t+1})=-\frac{1}{2}-\frac{t}{e^t+1}\Big|_{0}^{x}+\int_{0}^{x}\frac{\mathrm{d}t}{e^t+1}\\&=-\frac{1}{2}-\frac{x}{e^x+1}+\int_{0}^{x}\frac{\mathrm{d}(e^t)}{e^t(e^t+1)}\\&=-\frac{1}{2}-\frac{x}{e^x+1}+\ln\frac{e^t}{e^t+1}\Big|_{0}^{x}=-\frac{1}{2}-\frac{x}{e^x+1}+\ln\frac{e^x}{e^x+1}+\ln 2\end{aligned}$$

$$\therefore\quad F(x)=\begin{cases}\dfrac{x^3}{2}+x^2-\dfrac{1}{2} & -1\leqslant x<0\\ \dfrac{xe^x}{e^x+1}-\ln(e^x+1)+\ln 2-\dfrac{1}{2} & 0\leqslant x\leqslant 1\end{cases}$$

(二) 极限的求法

1. 初等变换

【例 7】 求 $\lim\limits_{n\to\infty}[\frac{1}{1\times 3}+\frac{1}{3\times 5}+\cdots+\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}]$

解 $\because\quad \dfrac{1}{(2n-1)(2n+1)}=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{2n-1}-\dfrac{1}{2n+1}\right)$

$$\begin{aligned}\therefore\quad \text{原式}&=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}[(1-\frac{1}{3})+(\frac{1}{3}-\frac{1}{5})+\cdots+(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1})]\\&=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}(1-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{5}+\cdots+\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1})\\&=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}(1-\frac{1}{2n+1})=\frac{1}{2}\end{aligned}$$

【例 8】 求 $\lim\limits_{n\to\infty}(1+a)(1+a^2)\cdots(1+a^{2^n})\quad |a|<1$

解

$$\begin{aligned}\text{原式}&=\lim_{n\to\infty}\frac{(1-a)(1+a)(1+a^2)\cdots(1+a^{2^n})}{1-a}\\&=\lim_{n\to\infty}\frac{1-a^{2^{n+1}}}{1-a}\qquad(\because\quad |a|<1,\lim_{n\to\infty}\ a^{2^{n+1}}=0)\\&=\frac{1}{1-a}\end{aligned}$$

2. 重要极限

【例9】 求$\lim\limits_{m\to\infty}\left(1-\dfrac{n^2}{m^2}\right)^m$

解 原式$=\lim\limits_{m\to\infty}\left(1-\dfrac{n^2}{m^2}\right)^{-\frac{m^2}{n^2}\cdot(-\frac{n^2}{m^2})\cdot m}$

$$=\lim_{m\to\infty}\left(1-\frac{n^2}{m^2}\right)^{-\frac{m^2}{n^2}(-\frac{n^2}{m})}$$

$$=e^0=1$$

【例10】 已知$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x+C}{x-C}\right)^x=\int_{-\infty}^{C}te^{2t}\mathrm{d}t$,求$C$.

解 左边$=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x+C}{x-C}\right)^x=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{(1+\frac{C}{x})^x}{(1-\frac{C}{x})^x}=\dfrac{e^C}{e^{-C}}=e^{2C}$

右边$=\dfrac{1}{2}\int_{-\infty}^{C}t\mathrm{d}e^{2t}=\dfrac{1}{2}\left[te^{2t}\Big|_{-\infty}^{C}-\int_{-\infty}^{C}e^{2t}\mathrm{d}t\right]$

$$=\frac{1}{2}Ce^{2C}-\frac{1}{4}e^{2C}=e^{2C}\left(\frac{C}{2}-\frac{1}{4}\right)$$

由$e^{2C}=e^{2C}(\dfrac{C}{2}-\dfrac{1}{4})$ 得 $C=\dfrac{5}{2}$

3. 无穷小的运算性质

【例11】 求$\lim\limits_{x\to+\infty}(\cos\sqrt{x+1}-\cos\sqrt{x})$

解 原式$=\lim\limits_{x\to+\infty}-2\sin\left(\dfrac{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}{2}\sin\dfrac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}}{2}\right)$

$$=-2\lim_{x\to+\infty}\sin\frac{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}{2}\sin\frac{1}{2(\sqrt{x+1}+\sqrt{x})}$$

∵ 当$x\to+\infty$时,$\sin\dfrac{1}{2(\sqrt{x+1}+\sqrt{x})}$为无穷小量,且$\left|\sin\dfrac{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}{2}\right|\leqslant 1$有界

∴ 原式$=0$

4. 无穷小量分出法

【例12】 求$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(2x-1)^{20}(3x+4)^{30}}{(4x-3)^{50}}$

解 原式$=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(2-\frac{1}{x})^{20}(3+\frac{4}{x})^{30}}{(4-\frac{3}{x})^{50}}=\dfrac{2^{20}\cdot 3^{30}}{4^{50}}=\dfrac{3^{30}}{4^{40}}$

【例13】 求$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\ln n}{\ln(\sqrt{n^2+a^2}-n)}$

解 原式$=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\ln n}{\ln\dfrac{(\sqrt{n^2+a^2}-n)(\sqrt{n^2+a^2}+n)}{\sqrt{n^2+a^2}+n}}$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\ln n}{\ln a^2 - \ln n - \ln(1+\sqrt{1+(\frac{a}{n})^2})}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\frac{\ln a^2}{\ln n} - 1 - \frac{\ln\sqrt{1+(\frac{a}{n})^2}+1}{\ln n}} = -1$$

注:对 $x\to\infty$ 或 $n\to\infty$ 时的$\frac{\infty}{\infty}$型未定式应首先采用无穷小量分出法.

5. 罗必塔法则

【例 14】 求$\lim\limits_{x\to 0^+}\sqrt[x]{\cos\sqrt{x}}$

分析:当 $x\to 0^+$ 时,$(\cos\sqrt{x})\to 1$,而$\frac{1}{x}\to+\infty$,故原式是 1^∞ 未定式,可用重要极限或罗必塔法则求解.

解法 1 $\lim\limits_{x\to 0^+}\sqrt[x]{\cos\sqrt{x}} = \lim\limits_{x\to 0^+}(\cos\sqrt{x})^{\frac{1}{x}} = \lim\limits_{x\to 0^+}[1-(1-\cos\sqrt{x})]^{\frac{1}{x}}$

$$= \lim_{x\to 0^+}\left(1-2\sin^2\frac{\sqrt{x}}{2}\right)^{-\frac{1}{2\sin^2\frac{\sqrt{x}}{2}}\cdot\frac{-2\sin^2\frac{\sqrt{x}}{2}}{x}}$$

$$= \exp\lim_{x\to 0^+}\frac{-2\sin^2\frac{\sqrt{x}}{2}}{\left(\frac{\sqrt{x}}{2}\right)^2\cdot 4} = e^{-\frac{1}{2}}$$

解法 2 设 $y=\sqrt{x}$,则

原式$= \lim\limits_{y\to 0^+}(\cos y)^{1/y^2}$

$$= \exp\lim_{y\to 0^+}\frac{\ln(\cos y)}{y^2} = \exp\lim_{y\to 0^+}\frac{-(\sin y/\cos y)}{2y}$$

$$= \exp\lim_{y\to 0^+}\left(-\frac{\sin y}{y}\cdot\frac{1}{2\cos y}\right) = e^{-\frac{1}{2}}$$

【例 15】 求$\lim\limits_{x\to\infty}[\sqrt[3]{(x+a)(x+b)(x+c)}-x]$

解 原式$= \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt[3]{(1+\frac{a}{x})(1+\frac{b}{x})(1+\frac{c}{x})}-1}{\frac{1}{x}}$ $\quad(\frac{0}{0})$

$$= \lim_{x\to\infty}\frac{1}{3}\left[(1+\frac{a}{x})(1+\frac{b}{x})(1+\frac{c}{x})\right]^{-\frac{2}{3}}\cdot\frac{[(1+\frac{a}{x})(1+\frac{b}{x})(1+\frac{c}{x})]'}{(1/x)'}$$

$$= \frac{1}{3}\lim_{x\to\infty}[a(1+\frac{b}{x})(1+\frac{c}{x})+b(1+\frac{c}{x})(1+\frac{a}{x})+c(1+\frac{a}{x})(1+\frac{b}{x})]$$

$$= \frac{1}{3}(a+b+c)$$

【例 16】 设 $f'(x)$ 连续，$f(0)=0, f'(0)\neq 0$，求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_0^{x^2} f(t)\mathrm{d}t}{x^2\int_0^x f(t)\mathrm{d}t}$.

解 原式 $\xlongequal{\left(\frac{0}{0}\right)} \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)\cdot 2x}{2x\int_0^x f(t)\mathrm{d}t + x^2 f(x)}$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{2f(x)}{2\int_0^x f(t)\mathrm{d}t + xf(x)} \qquad \left(\frac{0}{0}\right)$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{2f'(x)}{3f(x)+xf'(x)} = \infty$$

6. 等价无穷小替换

【例 17】 求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan^3(2x)}{x^4}\left(1-\dfrac{x}{\mathrm{e}^x-1}\right)$

解 原式 $= \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan^3(2x)}{x^3}\cdot\dfrac{\mathrm{e}^x-1-x}{x(\mathrm{e}^x-1)}$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{(2x)^3}{x^3}\cdot\frac{\mathrm{e}^x-1-x}{x^2} \quad [x\to 0 \text{时}, \tan(2x)\sim 2x,\quad \mathrm{e}^x-1\sim x]$$

$$= 8\lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{e}^x-1}{2x}$$

$$= 8\lim_{x\to 0}\frac{x}{2x} = 4$$

【例 18】 求 $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{x^x-(\sin x)^x}{x^2\arctan x}$

解 原式 $= \lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{-x^x\left(\mathrm{e}^{x\ln\frac{\sin x}{x}}-1\right)}{x^3}$

$$= \lim_{x\to 0^+}(-x^x)\lim_{x\to 0^+}\frac{x\ln\dfrac{\sin x}{x}}{x^3}$$

$$= -\exp\lim_{x\to 0^+}\frac{\ln x}{1/x}\cdot\lim_{x\to 0^+}\frac{\ln\left[1+\left(\dfrac{\sin x}{x}-1\right)\right]}{x^2}$$

$$= -\exp\lim_{x\to 0^+}\frac{1/x}{-(1/x^2)}\cdot\lim_{x\to 0^+}\frac{\dfrac{\sin x}{x}-1}{x^2}$$

$$= -\mathrm{e}^0\lim_{x\to 0^+}\frac{\sin x - x}{x^3} = -\lim_{x\to 0^+}\frac{\cos x-1}{3x^2}$$

$$= -\lim_{x\to 0^+}\frac{-(x^2/2)}{3x^2} = \frac{1}{6}$$

7. 用泰勒公式展开(*)

【例 19】 求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\mathrm{e}^x\sin x - x(1+x)}{x^3}$

解 $\because$ $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + o(x^2) \qquad \sin x = x - \frac{x^3}{3!} + o(x^3)$

$$\therefore \quad \text{原式} = \lim_{x\to 0} \frac{\left[1 + x + \frac{x^2}{2!} + o(x^2)\right]\left[x - \frac{x^3}{3!} + o(x^3)\right] - x(1+x)}{x^3}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\frac{x^3}{2!} - \frac{x^3}{3!} + o(x^3)}{x^3} = \frac{1}{3} + \lim_{x\to 0} \frac{o(x^3)}{x^3} = \frac{1}{3}$$

注:用泰勒公式展开时的阶数要依确定的幂指数展开,如此例中要依分母将分子展开到3阶为止.

8. 利用导数的定义

【例20】 设 $f(u)$ 为可微函数,且 $f(0) = 0$,求

$$\lim_{t\to 0} \frac{\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant t^2} f(\sqrt{x^2+y^2})\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{\pi t^3}$$

解 原式 $= \lim\limits_{t\to 0} \dfrac{\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^t rf(r)\mathrm{d}r}{\pi t^3}$

$$= \lim_{t\to 0} \frac{2\pi t f(t)}{3\pi t^2} = \lim_{t\to 0} \frac{2}{3} \cdot \frac{[f(t) - f(0)]}{t}$$

$$= \frac{2}{3} f'(0)$$

9. 利用中值定理

【例21】 求$\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin(\sin x) - \sin x}{x^3}$

解 $\because$ $\sin(\sin x) - \sin x = (\sin x - x)\cos[\theta(x - \sin x) + x] \quad (0 < \theta < 1)$

$$\therefore \quad \text{原式} = \lim_{x\to 0} \frac{\cos[\theta(x - \sin x) + x](\sin x - x)}{x^3}$$

$$= \cos 0 \lim_{x\to 0} \frac{\cos x - 1}{3x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{-\sin x}{6x} = -\frac{1}{6}$$

10. 用准则

【例22】 求$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{1^2}{n^3+1} + \dfrac{2^2}{n^3+2} + \cdots + \dfrac{n^2}{n^3+n}\right)$

解 设 $x_n = \dfrac{1^2}{n^3+1} + \dfrac{2^2}{n^3+2} + \cdots + \dfrac{n^2}{n^3+n}$

则 $\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n} i^2}{n^3+n} \leqslant x_n \leqslant \dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n} i^2}{n^3+1}$

$$\therefore \quad \frac{\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}}{n^3+n} \leqslant x_n \leqslant \frac{\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}}{n^3+1}$$

而 $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}}{n^3+n} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}}{n^3+1} = \dfrac{1}{3}$

$\therefore\quad \lim\limits_{n\to\infty} x_n = \dfrac{1}{3}$

【例 23】 求 $\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^1 \dfrac{x^{2n}}{1+x}\mathrm{d}x$

解 $\because\quad 0\leqslant\int_0^1 \dfrac{x^{2n}}{1+x}\mathrm{d}x\leqslant\int_0^1 x^{2n}\mathrm{d}x = \dfrac{1}{2n+1}$

而 $\lim\limits_{n\to\infty}0 = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{2n+1} = 0$

$\therefore\quad \lim\limits_{n\to\infty}\int_0^1 \dfrac{x^{2n}}{1+x}\mathrm{d}x = 0$

【例 24】 设 $f'(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续,证明:

$$\lim_{\lambda\to\infty}\int_a^b f(t)\sin\lambda t\,\mathrm{d}t = 0$$

证明
$$\begin{aligned}\int_a^b f(t)\sin\lambda t\,\mathrm{d}t &= \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}\Big(-\frac{\cos\lambda t}{\lambda}\Big)\\ &= -\frac{1}{\lambda}f(t)\cos\lambda t\Big|_a^b + \int_a^b \frac{\cos\lambda t}{\lambda}f'(t)\,\mathrm{d}t\\ &= -\frac{1}{\lambda}[f(b)\cos\lambda b - f(a)\cos\lambda a] + \frac{1}{\lambda}\int_a^b f'(t)\cos\lambda t\,\mathrm{d}t \qquad ①\end{aligned}$$

式 ① 中第一项当 $\lambda\to\infty$ 时趋于 0,而

$$0\leqslant\Big|\int_a^b f'(t)\cos\lambda t\,\mathrm{d}t\Big|\leqslant\int_a^b |f'(t)|\,\mathrm{d}t$$

$\therefore\quad \lim\limits_{\lambda\to\infty}\dfrac{1}{\lambda}\int_a^b f'(t)\cos\lambda t\,\mathrm{d}t = 0 \quad\Rightarrow\quad \lim\limits_{\lambda\to\infty}\int_a^b f(t)\sin\lambda t\,\mathrm{d}t = 0$

【例 25】 已知 $x_n = \dfrac{1+2x_{n-1}}{1+x_{n-1}}\quad (n=1,2,\cdots)$, $x_0 = 0$. 证明:$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 存在,并求其值.

证明 $\because\quad x_1 = \dfrac{1+2x_0}{1+x_0} = 1 > x_0 = 0$

(1) 设 $x_k > 0$

则 $x_{k+1} = \dfrac{1+2x_k}{1+x_k} = 1 + \dfrac{x_k}{1+x_k} > 0$

由数学归纳法知 $x_n > 0\quad (n=1,2,\cdots)$

(2) 设 $x_k > x_{k-1}$

则
$$\begin{aligned}x_{k+1} - x_k &= \frac{1+2x_k}{1+x_k} - \frac{1+2x_{k-1}}{1+x_{k-1}}\\ &= \frac{x_k - x_{k-1}}{(1+x_k)(1+x_{k-1})} > 0\end{aligned}$$
由数学归纳法知 $x_n < x_{n+1}$

即 x_n 单调增加

又 $x_n = \dfrac{1+2x_{n-1}}{1+x_{n-1}} = 1 + \dfrac{x_{n-1}}{1+x_{n-1}} < 2$

$\therefore\quad \lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 存在.