

01.2-164V.C<sub>2</sub>

Elementarmathematik  
vom höheren Standpunkte aus

F. 克 莱 因 ( 德 ) 著

高观点下的初等数学

第 一 卷

算 术 代 数 分 析

舒 湘 芹 陈 义 章 杨 钦 樑 译

齐 民 友 审

湖 北 教 育 出 版 社

F. 克莱因 (德) 著

# 高观点下的初等数学

第一卷

算术 代数 分析

舒湘芹 陈义章 杨钦樑译

齐民友审

湖北教育出版社

**高观点下的初等数学**

第 一 卷

算术·代数·分析

F. 克莱因(德)著

舒湘芹 陈义章 杨钦樑 译

齐民友 审

湖北教育出版社出版、发行 新华书店湖北发行所经销

江西印刷公司排版 湖北教育出版社印刷厂印刷

850×1168毫米32开本 10.75印张 3插页 244 000字

1989年11月第1版 1989年11月第1次印刷

印数：1—1 000

ISBN 7—5351—0409—6/G·339

定价：5.00元

## 第 一 版 序

我向数学界、特别是向中学数学教师奉献的这一卷新书，应该看作是“中学数学教学讲义”，尤其是去年由杜伯纳（Teubner）出版社出版的、席马克与我合著的“数学教学组织”一书的续篇。那时我们所关心的是向数学家介绍种种不同的教学方法，而目前我所关心的是数学教学内容的种种进展。我的努力方向是充分结合当今的数学教学方法，从现代数学科学观点出发，向数学教师以及已成熟的学生介绍数学教学的内容及基础，但要尽可能做到简洁、有启发性、也有说服力。我不准备仿照韦伯和韦尔斯坦因两人那种有系统的讲法，只想象实际讲课中那样，随机应变，自由发挥。

这样的写作大纲，在我和席马克去年四月出版的那本书的序言中已有提及，目前仅仅贯彻于本卷算术、代数、分析这三个部分中。我曾希望，尽管有许多困难，席马克先生会挤出时间把我的讲义整理好付印。不过怪我不好，不断要求他把时间用在我们两人都感兴趣的其他教学法问题上。很快就发现，当初的计划不能完成，特别是不能在短期内完成。可是要想对刚刚浮现的那些教学问题发挥真正的影响，非要在短期内完成不可。于是象前几年那样，只得求助于一种比较简便的方法，将我的讲义付之石印，尤其是因为我现在的助手——欧内斯特·海林格博士特别胜任这个工作。我们不应当低估海林格博士付

出的劳动。把一个教师在偶然条件影响下讲的话整理成通顺的记录，这不是一件轻而易举的事。通常要印刷出版就要做到叙述精确、解释一致，可是讲课的人往往做不到这一步。

对于是否继续出版有关数学教学的著作，至少是在几何方面，我很犹豫。我仅希望这一卷石印的书能促使高中数学教师再度运用独立思考，确定讲授教学材料的最好方法。这本书的目的只不过是起到智力启发作用，而不能当作一本详尽的手册。至于手册之类，应该让积极从事中学教学的老师来写。某些人可能误会，以为我的书还有别的什么目的，这样想就错了。特别应说明，德国自然科学家及医师协会教学委员会拟的课程大纲不是我写的，只是在我的协作下由一批优秀的中学数学教师写成的。

最后，关于本书的叙述方法，我只要说明一下，象以往一样，我在这里作出的努力，就是把几何直觉与算术公式的精确性结合起来，而我感到特别高兴的是能遵循各种理论的历史发展，理解今天教学上互相平行的几种教授方法的显著差别。

克莱因

1908年6月于哥丁根

### 第 三 版 序

自从施普林格公司令人钦佩地出版了我的科学著作集以后，经柯兰特教授的建议，该公司又提出以书本形式出版我的

讲义，因为这些讲义本来是1890年以后以石印印刷形式出现的，除了少量存本外，现已售缺。

前由杜伯纳出版社接手发行的这几卷讲义，主要是以往几十年中我的各个助手的笔记稿。一开始我就知道，如果不找年青人帮助，我是无力担负起修改的任务的。好久以前，我就表示过这样一个信念，人超过一定的年纪，就不该发表独立的作品。上了年纪的人也许有资格对一本新书的写作进行一般的指导，但已无能力详细整理材料，把文献中的新进展都考虑进去。因此，在保证向我提供充分协助之后，我才接受了施普林格出版公司的提议。

这几卷曾以石印刊行的讲义分成两类。较早写的一部分是我不断讲授的专门的讲义，写这些讲义，纯粹是为了使下一学期的学生手头有我已经研究过并建议作为进一步研究基础的材料。这包括非欧几何、高等几何、超几何函数、线性微分方程、黎曼面及数论讲义。与此对比，我还出版了几本本来就准备给广大读者看的石印讲义，即：

一)《微积分在几何中的应用》，这是C. H. 缪勒根据他的笔记整理的，该书的目的是为了填补应用数学的需要与纯数学的新近研究成果之间的空白。

二)和三)《高观点下的初等数学》两册，这是E. 海林格根据他的笔记整理的，目的在于促使中学数学及理科教师了解他们在大学里学的东西、特别是纯数学研究对于他们教学的重要性。

第二类讲义看来不必作彻底的修改，有的地方作若干润色，同时补充一些注解就可以了。值此出版之际，采取了初步的加工。二)、三)一)（按此顺序）册合成一大册，内分一、二、三卷，冠以《高观点下的初等数学》的书名。这样把一)册

与二)、三)册合并,理解应用数学在现代中学教育中日益重要的教师,是会欢迎的。

同时,第一类讲义的修改也已从“非欧几何”一书开始。但是要把那本书整理得严谨而全面,并照顾到最新的科学进展,非要作比较彻底的修改不可。我的大致计划就是如此。现在就本书的第一卷说几句话。

我重印了本卷1908年版的序,是因为它讲清了这一卷的产生经过<sup>①</sup>。同样石印刊印的第二版(1911年),没有作重大的修改,次要的附注现已收进正文,不另提及。本版基本上保留了第一版的正文<sup>②</sup>,但含有成书当时的特点,否则就必须改变全书的结构,失去一致性。不过第一版出版以来16年中,科学已有进展,我们的中学教学体系也发生了很大的变化,而且还在变化之中。这种情况在弗特博士和我合写的附录中已经考虑到了。弗特博士还对本书作了必要的文字风格上的修改,照料了印刷事宜(包括插图),所以我对他表示真诚的感谢。我以前的几个同事——海林格先生、弗迈尔先生以及哥丁根的A. 瓦尔特先生,在校读清样时都提出了许多有益的建议。特别要感谢弗迈尔及比利希先生编了人名表及索引(中译本中已删去——译者)。出版家朱利叶斯·施普林格在极其困难的条件下出版我这本书,又一次说明了他刊行数学著作的决心名不虚传。

克莱因

1924年复活节于哥丁根

---

① 这里提到的我的同事R. 席马克于伏案工作时心脏病突然发作,已于1912年逝世,卒年31岁。

② 新的评注放在括符内。

## 英文版序

费利克斯·克莱因教授是德国有名的数学研究家。他也是一位循循善诱的教师。他以罕见的天才，集一切数学领域的知识于一身，并善于领悟这一切领域之间的相互关系。他认为使学生了解数学并不是孤立的各门学问，而是一个有机的整体，是他作为一个教师的明显职责。他对中学数学教学有深刻的兴趣，不仅关心应该教些什么内容，而且关心怎样教才是最有效的方法。多年来在哥丁根大学为德国中学数学教师及在校学生开设讲座，已成了他的习惯。他一贯努力缩短中学和大学之间的差距，从传统的漠不关心中激起中学教师对高等数学的兴趣，把中学数学教学引向健康发展的方向；同时也努力扭转大学的态度及教学方向，使之承认中学的正常地位，使数学教育前后一贯。

克莱因教授的这些讲义最终印成三卷，名为《高观点下的初等数学》。这是一本无比珍贵的著作，同样可作大学教师和中学教师的参考。无论就材料安排的巧妙或就讨论方式的引人入胜来说，目前都没有一本书可以同这本书相比。本卷英文版是上述著作的第一卷。它的出版是哥丁根大学柯兰特教授建议的结果。出版的目的是满足英语国家现任数学教师及未来数学教师的需要。我们诚恳地希望，我们的译作虽然有点意译，但是保持了原著的精神。

英文版译者



洛杉矶加利福尼亚大学数学教授

E. R. 赫德里克

贝克莱加利福尼亚大学数学教授

C. A. 诺布尔

## 中 译 本 序

德国数学家F. 克莱因的名著《高观点下的初等数学》(以下简称《初等数学》)一书,是克莱因的助手们根据他在哥丁根大学讲课内容整理而成的,分上下两卷,上卷“算术、代数、分析”(第三版)于1924年、下卷“几何”于1925年出版;英译本于1939年出版。六十多年过去,数学面貌已有很大变化,但《初等数学》一书,至今读来仍然感到十分亲切。这是因为,其内容主要是基础数学,其观点蕴含着真理,而当时德国数学教育中的不少问题,在今日之我国也仍然存在。克莱因声称本书是为中学教师和成熟的大学生写的,但按其内容,所有对数学有一定了解的人都可以从中获得教益和启发。

《初等数学》涉及的面很广,除正文四大部分外,还有两个附录:“关于 $e$ 和 $\pi$ 的超越性证明”和“集合论”。每一大部分的写法和通常很不相同,而且其内容有不少超出通常写法的习惯范围。例如在“算术”部分写了四元数;在几何部分写了高维(以至无穷维)空间,并且随时讲到历史和应用。特别是数学的两个基本对象——形与数结合起来了:讲算术、代数、分析时,总是充分运用丰富的几何图象,而讲几何时,用的是代数

工具，又不乏几何语言。他还以大量篇幅阐述数学的各种概念和方法的发展与完善过程以及数学教育演化的经过。显然，克莱因认为，教师对这些应当掌握或了解。

克莱因认为，数学专业大学生学到的专业知识不少，而许多重要的，以及在中学任教中用得着的部分却往往被忽视了。《初等数学》正是着眼于弥补这些缺憾，揭示数学各部分之间的联系，指出它们的共性，它们产生与成长的内因、外因和过程以及它们的应用等等。

克莱因喜欢用“融合”这个词，《初等数学》也确实体现了初等数学同高等数学的融合，数学各部分的融合，几何观念和算术观念的融合，感性与理性的融合等等。可以认为，全书是以上各种融合的融合。

克莱因所采用的书名表明，他认为教师应具备较高的数学观点。理由是，观点越高，事物越显得简单。例如在实数域里不好理解的某些东西，从复数域的观点看，就清楚了；在欧氏空间里某些不好解释的现象，从射影空间的观点看，就有满意的说明。

通过变换群来阐明不同几何的本质及其相互关系，本是克莱因伟大创见之一。《初等数学》用了很大篇幅来论述欧氏几何、仿射几何和射影几何的关系。我认为，中学几何是欧氏几何，但也涉及图形的仿射性质（如三角形的重心）和射影性质（如三点共线），如果教师能区别各种性质，在教学中自然是有利的。

在讲述数学的历史时，克莱因强调对事物认识深化的必然性（这不排除偶然性）。某些新概念的出现，是由于客观条件已经成熟而非产生不可。例如，负数和复数的出现，是不以数学家的意志为转移的。我个人以为，了解一些历史是很有意义

的。我们的课程往往分别构成首尾完整的逻辑体系，应当使学生在学习中充分领会到数学是如何逐步成长起来的，它又将如何继续发展。

《初等数学》多处谈到公理体系，特别是关于数的公理和几何公理。克莱因认为，公理不能脱离直觉，不能排除人对客观事物的认识，因而反对那样一种观点，认为公理可以随心所欲地选取，只要它们彼此相容，即不产生矛盾就可以了。他把数学比作一棵树，公理比作树的根，当树逐渐长大时，躯杆和枝叶向上长，同时根也向下长。因此既没有最后的终点，也没有最初的始点，即没有进行教学的绝对基础。但是数学作为一个演绎的逻辑结构，其公理体系占有极其重要的地位，不了解它就不能了解数学的本质和全貌。

要想全面概括《初等数学》这本丰富多采的巨著的特色是困难的。可以说，它展示的数学科学是一个不断发展着的有机整体；克莱因所设计的数学教育是一个随着数学发展而不断更新的连续过程。

值此中译本出版之际，我想谈一点希望。我国有许多人象克莱因那样关心数学教师的培养与提高，关心数学教育改革，并为此做了些实事。《初等数学》中译本的现实意义就在于，它将促进这两方面工作的进程。但是德文本出版已过了63年，英译本出版也过了49年。现代数学已发生了极大变化，新成果、新概念、新观点、新学科层出不穷。我热切希望我国高水平的数学多面手会写出更结合我国实际的、现代化的《高观点下的初等数学》。这样一本书出版，将是我国数学教育史上的一件大事。

吴大任

1988年7月于南开大学

# 目 录

前 言	1
-----	---

## 第一部分 算 术

<b>第一章 自然数的运算</b>	7
§ 1.1 学校里数的概念的引入	7
§ 1.2 运算的基本定律	10
§ 1.3 整数运算的逻辑基础	12
§ 1.4 整数运算的实践 <sup>①</sup>	
<b>第二章 数的概念的第一个扩张</b>	20
§ 2.1 负数	21
§ 2.2 分数	27
§ 2.3 无理数	31
<b>第三章 关于整数的特殊性质</b>	38
<b>第四章 复数</b>	62
§ 4.1 通常的复数	62
§ 4.2 高阶复数、特别是四元数	66
§ 4.3 四元数的乘法——旋转和伸展	75
§ 4.4 中学复数教学	86
附：关于数学的现代发展及一般结构	89

## 第二部分 代 数

<b>第五章 含未知数的实方程</b>	101
---------------------	-----

<sup>①</sup> 此节中译本略。——译者

§ 5.1	含一个参数的方程	101
§ 5.2	含两个参数的方程	103
§ 5.3	含三个参数 $\lambda$ 、 $\mu$ 、 $\nu$ 的方程	111
<b>第六章</b>	<b>复数域方程</b>	120
§ 6.1	代数的基本定理	120
§ 6.2	含一个复参数的方程	123
1.	“纯”方程	131
2.	二面体方程	137
3.	四面体、八面体、二十面体方程	143
4.	续：建立正规方程	149
5.	关于正规方程的解	156
6.	用超越函数将正规无理数单值化	160
7.	借助根式求解	165
8.	化简一般方程为正规方程	169

### 第三部分 分 析

<b>第七章</b>	<b>对数与指数函数</b>	172
§ 7.1	代数分析的系统讨论	172
§ 7.2	理论的历史发展	175
§ 7.3	中学里的对数理论	186
§ 7.4	函数论的观点	188
<b>第八章</b>	<b>角函数</b>	194
§ 8.1	角函数理论	195
§ 8.2	三角函数表	204
1.	纯粹的三角函数表	205
2.	对数三角函数表	207
§ 8.3	角函数的应用	210

1. 三角学、特别是球面三角学.....	210
2. 小振动理论，特别是单摆的理论.....	225
3. 用角函数的级数(三角级数)表达周期函数 .....	229
4. 关于函数一般概念的 插话 .....	241
<b>第九章 关于无穷小演算本身.....</b>	<b>250</b>
§ 9.1 无穷小演算中的一般考虑 .....	250
§ 9.2 泰勒定理 .....	270
§ 9.3 历史的与教育学上的考虑 .....	285
<b>附    录</b>	
I 数 $e$ 和 $\pi$ 的超越性.....	289
II 集合论.....	300
1. 集合的势 .....	300
2. 一个集合的元素的排列.....	320

## 前 言

近年来<sup>①</sup>，在大学数学教师及其他理科教师中间，对如何更好地培养未来中学师资产生了广泛的兴趣。这确实是一种新的现象。在此之前，长期以来，大学里的人只关心他们的科学本身，从来不想一想中学的要求，甚至不考虑同中学数学的衔接。结果如何？新的大学生一入学就发现，他面对的问题好象同中学里学过的东西一点也没有联系似的。当然他很快就完全忘了中学学的东西。但是毕业以后当了教师，他们又突然发现，要他们按老师的教法来教传统的初等数学。由于缺乏指导，他们很难辨明当前教学内容和所受大学数学训练之间的联系，于是很快就坠入相沿成习的教学方法，而他们所受的大学训练至多成为一种愉快的回忆，对他们的教学毫无影响。

现在的改革运动就是要克服这种对中学教学和大学教学都没有帮助的双重的不连贯性。一方面要努力在中学教材中注入由现代数学进展得来与现代文化相一致的新观念（本书中将不断有机会探讨这一点）；另一方面又试图在大学教育中把中学

---

<sup>①</sup> 再请注意：本卷文字几乎与1908年石印本完全相同，以后几年加进去的内容已收入附录。

教师的需要考虑进去。我现在为你们开设的这样一个综合的课程，我认为正是帮助你们提高的最重要的方式之一。我所针对的学生绝不是初学者。我预计你们已经都熟悉数学各主要领域的要点。我时常要讨论代数、数论、函数论等问题，但不得不放弃细节。因此，要跟上我的思路，你们必须对这些领域有相当的了解。我的始终如一的任务是向你们指明一般课程中没有充分指明的各个数学领域中种种问题的相互联系，尤其是强调这些问题与中学数学问题的关系。我希望通过这种方式使你们更易于掌握从大量放在你们面前的知识中汲取促进教学的养料的能力。而你们进行学术研究的真正目标，我认为就在于掌握这种能力。

现在请让我向你们提出几份近期的文件，其中包含许多宝贵的材料，说明对教师的培养已产生了广泛的兴趣。首先我想到1907年9月德累斯顿自然科学家会议上的发言，我们德国自然科学家及医师协会教育委员会向大会提出了关于未来数学和理科教师科学培养的建议。你们可以在这个委员会的全文报告<sup>①</sup>最后一节找到这些建议。自1904年以来，这个教育委员会一直在讨论有关数学等自然科学教育的全部问题，现已结束活动。我鼓励你们不仅注意这些建设，而且注意这个很有趣的报告其余部分。在德累斯顿会议结束以后不久，在9月25日于塞尔召开的德国语文学家及中学语文教师会议上，发生了同样的辩论。当然，是把数学教学改革当作语文学界平行改革的一环进行了讨论。在我作了有关数学等自然科学教学改革的目的报

---

① 《Die Tätigkeit der Unterrichtskommission der Gesellschaft deutscher Naturforscher und Ärzte》，A. 格茨默编，莱比锡及柏林，1908年。



告之后，P·温德兰(P·Wendland)(布列斯劳)就考古学问题作了发言，亚历山大·布兰德尔(Al·Brandl)(柏林)作了现代语言的发言，最后由爱德乐·哈奈克(Ad·Harnack)(柏林)作了历史与宗教的发言。上述四个发言一起收入一本小册子<sup>①</sup>，我特别建议你们一读。我希望，这个引人注目的开端会发展成为我们自然科学家与语文学家之间的进一步合作，造成友好合作及相互理解的精神，因为过去双方关系虽然不能说是敌对，也至少不够协调。我们要永远培植这样良好的关系，即使我们有时在内部偶尔说他们一两句不好听的话，他们也可能说我们几句不好听的话。要记住，你们以后要到中学里与语文教师共事，这就需要相互理解与合作。

除了我们数学界以外的上述改革努力，我还想提到几本书，这几本书同样以数学教学为方向，对我这些讲座极为重要。三年以前，我第一次抱着类似的目的开了一次讲座。我那时的助手席马克收集了材料，其中第一部分已出版<sup>②</sup>。那本书里考虑到了包括大学在内的各种类型学校以及各类学校的数学教学和共同兴趣等之类的问题。在下面的讲座中我会时时提到上述书中的内容，但不加以重复，以便深化这些讨论。那本书所讨论的，是学校中数学教学的安排，现在要讨论的是数学教学的内容。如果下面经常提到学校中数学教学的实际情况，那么，我

---

① 《Universität und Schule》，P·温德兰、Al·布兰德尔、Ad·哈奈克的发言，莱比锡，1907年。

② F·克莱因：《Vorträge über den mathematischen Unterricht an höheren Schulen》R·席马克整理。第一部分：《Von der Organisation des mathematischen Unterrichts》，莱比锡，1907年以后提到时，这本书称为《克莱因—席马克合著本》。