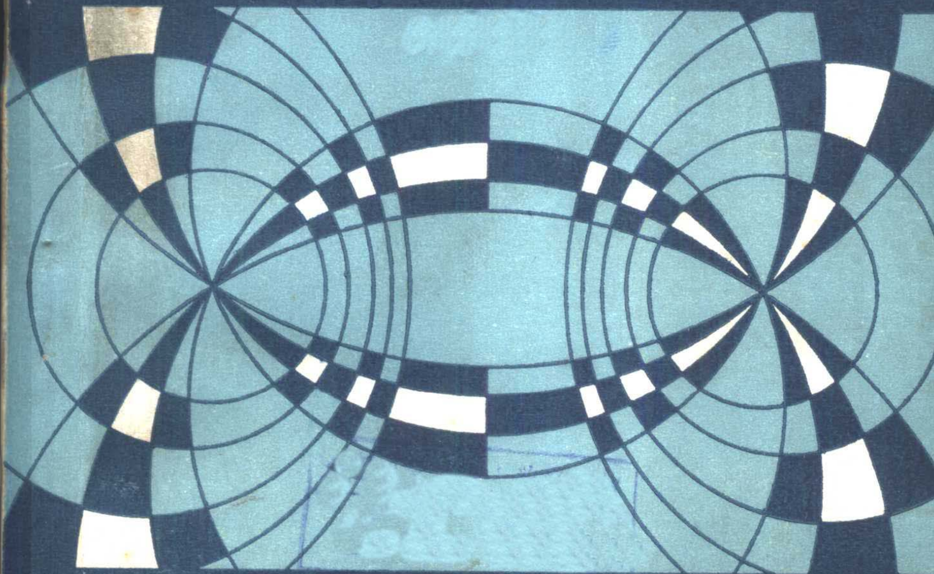
卢焕忠编著



场论及其应用

卢焕忠編著

坊论及其应用

李國平署簽

湖南科学技术出版社

场论及其应用
卢焕忠编著
责任编辑：胡海清
*
湖南科学技术出版社出版
（长沙市展览馆路14号）
湖南省新华书店发行　湖南省新华印刷二厂印刷
*
1981年9月第1版第1次印刷
开本：787×1092毫米 1/32　印张：6　字数：132,000
印数：1——5,600
统一书号：13204·38　　定价：0.64元

内 容 提 要

本书是作者在研究大量国内外文献的基础上撰写的。它比较系统地阐述了场的数学理论、方法与应用。全书贯穿着数学物理的内在联系，抓住问题的本质，以统一的方式处理各种提法，而独成体系。内容丰富、概念清楚、理论推导严谨、简便，方法明确，并有大量物理、力学、工程中的应用实例。对求解问题的思想方法、计算技巧作了较为细致的叙述。全书共分六章。第一章，综述了本书所需的预备知识。第二、三两章，详细地论述了场在空间区域上及一点上的变化特性，并研究了场的确定性问题，把场的分类、表述汇集成表，便于查考。第四章，简明地叙述了正交曲线坐标与坐标变换。第五章，系统地阐述如何使用场的数学理论来解决自然科学中的问题，对电磁场这一典型现象作了深刻的分析，并建立了数学模型、阐明了数理方程的定解问题。第六章，为读者提供我国著名数学家李国平教授的外微分形式的处理方式，它是简化和统一数学物理问题研究的重要工具。研究了外微分形式的许多重要性质，使场的量变关系及其表述得简到化和统一。

全书叙述简练，深入浅出，便于自学。可供大学理工科师生、工程技术人员、自然科学工作者，以及具有高等数学知识的读者阅读参考。

序

场论是数学物理研究的重要一支。

卢焕忠同志撰写的《场论及其应用》，充分注意从数学与物理的内在联系去阐明场的基本理论问题，颇为深入地讨论了电磁现象的数学结构。对外微分形式，研究了有关性质，简化和统一地处理了场论中的问题。外微分形式是很有用的数学工具，数学工作者已成功地用来解决一系列的几何与微分方程及物理中的问题，而许多人对它还较陌生。卢焕忠同志把外微分形式叙述得清楚、易懂，便于应用到许多科技领域，有助于研究工作的开展，特为作序。

李 国 平

1981年3月22日

目　　录

前　言……………………………………………………………………(1)

第一章　若干预备知识综述……………………………………………(3)

§1　矢量及其运算 ……………………………………………………(3)

1.1　矢量概念 …………………………………………………………(3)

1.2　矢量运算法则 ……………………………………………………(4)

1.3　矢量的直角坐标表示及其代数运算 ……………………………(7)

1.4　矢量的分析运算 …………………………………………………(11)

§2　微分算子 …………………………………………………………(14)

§3　微积分的若干概念 ………………………………………………(17)

3.1　曲线、曲面与区域 ………………………………………………(17)

3.2　积分元素法 ………………………………………………………(17)

3.3　微积分中值公式 …………………………………………………(22)

§4　立体角 ……………………………………………………………(23)

§5　迭加原理 …………………………………………………………(25)

第二章　场…………………………………………………………(26)

§1　场的概念 …………………………………………………………(26)

§2　场的积分性质 ……………………………………………………(33)

2.1　矢通量 ……………………………………………………………(35)

2.2　矢通量的物理意义 ………………………………………………(36)

2.3　旋转量 ……………………………………………………………(40)

2.4　旋转量的物理意义 ………………………………………………(43)

§3　场积分之间的关系 ………………………………………………(48)

3.1　矢通量与三重积分关系 …………………………………………(48)

3.2 旋转量与矢通量关系 ……………………………………(51)
3.3 矢通量$\Phi_0 = 0$的条件 ……………………………………(55)
3.4 旋转量为零的条件 ……………………………………(58)
第三章 场的空间变化率 ……………………………………(67)
§1 数量场的梯度 ……………………………………(67)
1.1 梯度概念 ……………………………………(67)
1.2 梯度计算与性质 ……………………………………(71)
1.3 梯度场与场积分关系 ……………………………………(78)
§2 矢量场的散度 ……………………………………(81)
2.1 散度概念 ……………………………………(81)
2.2 散度计算与性质 ……………………………………(84)
2.3 散度场与场积分关系 ……………………………………(90)
2.4 格林第一、第二公式 ……………………………………(92)
§3 矢量场的旋度 ……………………………………(94)
3.1 旋度概念 ……………………………………(94)
3.2 旋度计算与性质 ……………………………………(98)
3.3 旋度场与散度场、梯度场的关系 ……………………………………(102)
3.4 旋度场与场积分关系 ……………………………………(105)
3.5 调和场与调和函数 ……………………………………(107)
§4 场的确定性，各种关系表 ……………………………………(111)
4.1 场的确定性 ……………………………………(111)
4.2 场的各种关系表 ……………………………………(112)
表1 积分关系 ……………………………………(113)
表2 微分关系 ……………………………………(113)
表3 积分与微分关系 ……………………………………(114)
表4 场的分类 ……………………………………(114)
表5 静电场 ……………………………………(115)
表6 静磁场 ……………………………………(115)

第四章　正交曲线坐标系与场的计算 ……(117)
§1　空间正交曲线坐标系 ……(117)
1.1　正交曲线坐标系 ……(117)
1.2　柱面坐标系 ……(119)
1.3　球面坐标系 ……(120)
§2　场积分的表示 ……(122)
§3　场的空间变化率表示 ……(125)
3.1　梯度表示式 ……(126)
3.2　散度表示式 ……(127)
3.3　旋度表示式 ……(129)
第五章　场论在电磁场理论中的应用 ……(133)
§1　连续性方程与麦克斯韦方程 ……(133)
1.1　连续性方程 ……(134)
1.2　麦克斯韦方程 ……(135)
§2　静态场方程 ……(139)
2.1　电位方程 ……(139)
2.2　磁位方程 ……(143)
§3　时变场方程 ……(147)
3.1　$\vec{E}$和$\vec{H}$的波动方程 ……(147)
3.2　$\vec{A}$和V的波动方程 ……(153)
3.3　集肤效应与热传导方程 ……(160)
§4　数理方程定解问题 ……(161)
第六章　场的外微分形式 ……(165)
§1　外微分形式 ……(165)
§2　外微分算子 ……(168)
§3　场的外微分形式 ……(173)
§4　电磁场的外微分形式 ……(177)
外国人名译名对照表 ……(181)

前　言

场论在物理、力学、电工理论、无线电、化学、生物、计算机科学等许多科技部门都有着广泛的应用，是数学物理的一个分支。

场论是研究场的表征量的变化特性及其数学物理结构为主题的数学理论与方法。

本书目的是想比较系统而严格地阐述场的数学理论、方法及其应用。所以，在安排和阐述内容时，就想在理论上和应用方面构成一个体系。

因此，在写作过程中注意到：(1)在基本概念方面，希望采取最能表现其本质和客观属性的一种定义，同时讲明逻辑关系、实际背景、物理解释与使用；(2)理论推导与计算，可以帮助人们正确去解释和认识自然现象的量变关系、变化结果、预测未来，通过对每一命题的证明和列举的许多例题，希望能从不同角度阐明这一点；(3)场论应用虽然具有广泛性，但要系统地叙述各个领域的应用是有困难的，且不便于深入。所以，有侧重地选择典型现象，通过模型的建立，希望能阐明正确使用数学方法，可以促进达到一定的物理目的；(4)便于自学，涉及的到许多数学物理知识，几乎自给自足。如上所述，不尽全面，但这种考虑和叙述方式也许还是一种新尝试，有待进一步改进和提高。

本书从着手写作到定稿经过多次反复修改，征求意见。得到李国平教授、李森林教授、肖伊莘教授、周怀生教授、彭肇

凡副教授及其他许多同志的帮助和鼓励。最后由李森林教授、李维副教授、陆尚强副教授审阅。何灿芝同志等阅读了手稿。作者对他们表示衷心的感谢！

由于水平所限，尽管竭力而为，书中缺点错误仍难免，恳请批评指正。

作　者

一九八〇年九月于湖南大学

第一章　若干预备知识综述

本章为以后几章提供必要的预备知识。

§1　矢量及其运算

矢量方法，在科学技术中是基础性的数学工具。

本节，简要地综述矢量的运算法则

1.1　矢量概念　矢量是与数量（即只有数值大小的量，又称纯量或标量）不同的一种量；例如，作用力、物体运动的速度、电场强度、磁场强度等，就是属于这样的量。

定义　既有数值大小又有确定方向的量，称为矢量（或向量），用$\vec{A}$，$\vec{a}$或用黑体字$\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{a}$等来表示。

矢量在几何上表示一有向线段，有向线段的起点P和终点M分别称为矢量的起点和终点，此时，记$\vec{A}=\overrightarrow{PM}$（如图1—1）。

矢量$\vec{A}$数值的大小是指该有向线段的长度，称为矢量$\vec{A}$的模，记为$|\vec{A}|$。所以，矢量的模是一个非负数。

当矢量的模为1时，则该矢量称为单位矢量，当矢量的模为零时，则该矢量称为零矢量，简单地记作0；显然，零矢量的起点与终点重合，其方向是不定的。

设t为参度量，如果每给定t的一个数值，就有一个确定的矢量与之对应，则这种矢量称为t的矢量函数，记作$\vec{A}=\vec{A}(t)$

当矢量的起点固定时，让矢量的终点变动，则终点的运动轨迹，称为矢量的矢端曲线。设矢量$\vec{A}$的起点为P，终点为M，于

是，矢量$\vec{A}$的矢端曲线，是矢量终点位置的函数，即，$\vec{A} = \vec{A}(M)$（如图1—2）。

图1—1

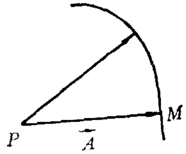


图1—2

1.2 矢量运算法则 设非零矢量$\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$，我们规定：

$\vec{a} = \vec{b}$，表示$\vec{a}$，$\vec{b}$的方向相同，模相等。

$\vec{a} = -\vec{b}$，表示$\vec{a}$，$\vec{b}$的方向相反，模相等。

$\vec{a} + \vec{b}$，表示$\vec{a}$与$\vec{b}$之和，是以$\vec{a}$，$\vec{b}$为邻边（设$\vec{a}$与$\vec{b}$不平行），作平行四边形$ABDC$，则对角线矢量$\overrightarrow{AD} = \vec{a} + \vec{b}$（如图1—3）。这称为矢量加法的平行四边形法则。因为$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BD} = \vec{b}$，故$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD} = \vec{a} + \vec{b} = \overrightarrow{AD}$，这样，又得矢量加法的三角形法则：在矢量$\vec{a}$的终点作一矢量等于$\vec{b}$，则由$\vec{a}$的起点到$\vec{b}$的终点的有向线段便是$\vec{a} + \vec{b}$。易知矢量加法满足交换律和结合律：

$$\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a},$$

$$\vec{a} + (\vec{b} + \vec{c}) = (\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c}$$

$\vec{a} - \vec{b}$，表示$\vec{a}$与$\vec{b}$之差，是$\vec{a}$与$(-\vec{b})$之和，即$\vec{a} - \vec{b}$

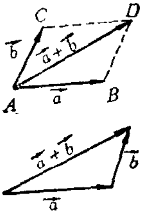


图1—3

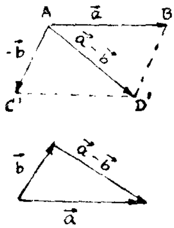


图1—4

$=\vec{a}+(-\vec{b})$，因此，由矢量加法法则，可以得到矢量减法的相应法则：以 $\vec{a}$，$-\vec{b}$ 为邻边，作平行四边形 $ABD'C'$，则对角线 $\overrightarrow{AD'}=\vec{a}-\vec{b}$（平行四边形法则）；在 $\vec{a}$ 的起点作一矢量等于 $\vec{b}$，则由 $\vec{b}$ 的终点到 $\vec{a}$ 的终点的有向线段便是 $\vec{a}-\vec{b}$（如图1—4）。

夹角，矢量 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 的**夹角**，是将 $\vec{a}$，$\vec{b}$ 平移到同一起点，在 $\vec{a}$，$\vec{b}$ 决定的平面内，一矢量的正向绕起点旋转到与另一矢量的正向重合时所成的角（如图1—5），记作

$$\theta=(\vec{a},\ \vec{b})=(\vec{b},\ \vec{a})，并规定0\leqslant\theta\leqslant\pi。$$

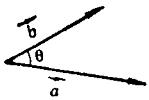


图1—5

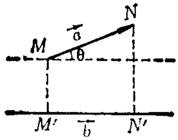


图1—6

投影，$\vec{a}$ 在 $\vec{b}$ 上的**投影**，是 $\vec{a}$ 的模乘上 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 的夹角 θ 的余弦，记作 $(\vec{a})_{\vec{b}}$ 或 $Prj_{\vec{b}}\vec{a}$，即，$(\vec{a})_{\vec{b}}=|\vec{a}|\cos\theta$。所以，$(\vec{a})_{\vec{b}}$ 是一个带有符号的数值，它的绝对值，等于过 $\vec{a}$ 的起点 M 和终点 N，分别作垂直于 $\vec{b}$ 的平面，与 $\vec{b}$ 的交点 M' 和 N' 间的线段的长度（如图1—6）。显然，当 $\theta=0$ 时，$(\vec{a})_{\vec{b}}=|\vec{a}|$，$\vec{a}\parallel\vec{b}$ 且同方向；当 $0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ 时，$(\vec{a})_{\vec{b}}<0$；当 $\theta=\pi$ 时，$(\vec{a})_{\vec{b}}>0$；当 $\theta=\dfrac{\pi}{2}$ 时，$(\vec{a})_{\vec{b}}=0$，$\vec{a}\perp\vec{b}$；当 $\dfrac{\pi}{2}<\theta<\pi$ 时，$(\vec{a})_{\vec{b}}=-|\vec{a}|$，$\vec{a}\parallel\vec{b}$ 且反方向。

数量 λ 与矢量 $\vec{a}$ 的乘积 $\lambda\vec{a}$，其中 $\lambda\neq0$ 的常数，当 $\lambda>0$ 时，$\lambda\vec{a}$ 与 $\vec{a}$ 方向相同，且 $|\lambda\vec{a}|=\lambda|\vec{a}|$；当 $\lambda<0$ 时，$\lambda\vec{a}$ 与 $\vec{a}$ 方向相反，且 $|\lambda\vec{a}|=-\lambda|\vec{a}|$。易知，

$$\lambda(\vec{a}+\vec{b})=\lambda\vec{a}+\lambda\vec{b}；$$

若 $\vec{a}^0$ 是非零矢量 $\vec{a}$ 方向上的单位矢量，则有

$$\vec{a}=|\vec{a}|\vec{a}^0,\quad 即\quad \vec{a}^0=\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}.$$

点积，两矢量 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 的点积(或称内积)，是 $\vec{a}$，$\vec{b}$ 的模与 $\vec{a}$，$\vec{b}$ 夹角θ的余弦的乘积，记作 $\vec{a}\cdot\vec{b}$，即 $\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cos\theta$，它是一个数量，所以，又称数量积．显然，

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|(\vec{b})_{\vec{a}}=|\vec{b}|(\vec{a})_{\vec{b}};$$

而 $\vec{a}\perp\vec{b}$ 的充要条件为

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=0.$$

易知，下列关系式成立：

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{a}(交换律)$$

$$\vec{a}\cdot(\vec{b}+\vec{c})=\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{a}\cdot\vec{c}(分配律)$$

$$\lambda(\vec{a}\cdot\vec{b})=\lambda\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{a}\cdot\lambda\vec{b},$$

$$\vec{a}\cdot\vec{a}=|\vec{a}|^2.$$

叉积，两矢量 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 的叉积(又称外积或矢量积)，记作 $\vec{a}\times\vec{b}$，是垂直于 $\vec{a}$，$\vec{b}$ 所决定的平面的一个矢量，它的正向，从 $\vec{a}$ 到 $\vec{b}$ 组成“右手法则”(如图1—7)，而它的模

$$|\vec{a}\times\vec{b}|=|\vec{a}||\vec{b}|\sin\theta,$$

$$\theta=(\vec{a},\ \vec{b}).$$

不难看出，$|\vec{a}\times\vec{b}|$在数值上等于以 $\vec{a}$，$\vec{b}$ 为邻边的平行四边形面积(如图1—7) $\vec{a}\parallel\vec{b}$ 的充要条件为 $\vec{a}\times\vec{b}=0$；而且下列等

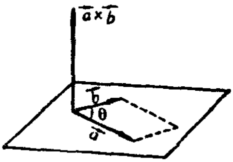


图1—7

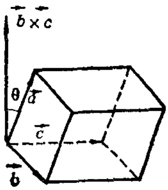


图1—8

式成立：

$$\vec{a}\times\vec{b}=-\vec{b}\times\vec{a},$$

$$(\lambda\vec{a})\times\vec{b}=\lambda(\vec{a}\times\vec{b}),$$

$$\vec{a}\times(\vec{b}+\vec{c})=\vec{a}\times\vec{b}+\vec{a}\times\vec{c}.$$

混合积，三个矢量$\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$的混合积，通常指$\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c})$，是一个数量，即

$$\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c})=|\vec{a}||\vec{b}\times\vec{c}|\cos\theta$$

（θ是$\vec{a}$与$\vec{b}\times\vec{c}$的夹角），不难看出，这个数量的绝对值，等于以$\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$为棱边的平行六面体的体积（如图1—8）。$\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$共面的充要条件

$$\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c})=0;$$

而且，下列等式成立：

$$\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c})=\vec{b}\cdot(\vec{c}\times\vec{a})=\vec{c}\cdot(\vec{a}\times\vec{b}),$$

$$\vec{a}\cdot(\vec{a}\times\vec{b})=\vec{b}\cdot(\vec{a}\times\vec{b})=0。$$

三重矢积，是三个矢量$\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$的叉积$\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c})$，是一个矢量。不难推出，下列等式成立：

$$\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c})=\vec{b}(\vec{a}\cdot\vec{c})-\vec{c}(\vec{a}\cdot\vec{b}).$$

1.3 矢量的直角坐标表示及其代数运算

从§1.1、§1.2知道，矢量概念及其运算法则是与坐标系的选择无关的，而作为几何上的有向线段来运算。这样，就可根据解决问题的需要，适当选择坐标系，以使矢量方法更便于应用。直角坐标系，是最常见、最基本的一种坐标系。

（一） 矢量在直角坐标系下的表示。引进空间直角坐标系OXYZ（如图1—9），将矢量$\vec{A}$的起点置于坐标原点，终点置于另一点M，则$\vec{A}=\overrightarrow{OM}$。这样，决定一个矢量，就相当于决定矢

量终点的位置；反之，空间任一点也可以确定起点在坐标原点，而终点在该点的一个矢量。所以，空间点M与矢量$\overrightarrow{OM}$，是一一对应的。因而，把M的坐标(x,y,z)，称为矢量$\overrightarrow{OM}$的坐标。

设α,β,γ表示矢量$\vec{A}=\overrightarrow{OM}$分别与$X,Y,Z$轴正向的夹角（如图1—9），称为$\vec{A}$的**方向角**。因为

$$x=(\vec{A})_X=|\vec{A}|\cos\alpha,$$
$$y=(\vec{A})_Y=|\vec{A}|\cos\beta,$$
$$z=(\vec{A})_Z=|\vec{A}|\cos\gamma,$$

所以，矢量$\vec{A}$的坐标x,y,z又称为$\vec{A}$在坐标轴方向上的投影。由于，$\vec{A}$的方向可由

$$\cos\alpha=\frac{x}{|\vec{A}|},$$

$$\cos\beta=\frac{y}{|\vec{A}|},$$

$$\cos\gamma=\frac{z}{|\vec{A}|}$$

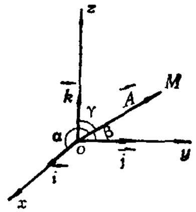


图1—9

来确定；从而，$\cos\alpha$，$\cos\beta$，$\cos\gamma$称为$\vec{A}$的方向余弦。规定$0\leqslant\alpha,\beta,\gamma\leqslant\pi$。

设$\vec{i}$，$\vec{j}$，$\vec{k}$分别为X，Y，Z轴方向上，起点在坐标原点的单位矢量；（如图1—9），称为**基本单位矢量**；而$x\vec{i}$，$y\vec{j}$，$z\vec{k}$分别称为$\vec{A}$在X，Y，Z轴上的分矢量。由矢量的加法法则，易知

$$\vec{A}=x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k},$$

上式就称为矢量$\vec{A}$的**坐标表示式**（或称投影表示式），常简记为

$$\vec{A}=\{x,y,z\}。$$

由两点距离公式，得

$$|\vec{A}| = \sqrt{x^2+y^2+z^2}。$$

若$\vec{A}$是参数t的函 数$\vec{A}=\vec{A}(t)$，则

$$\vec{A}(t)=\{x(t),y(t),z(t)\},$$

$$|\vec{A}(t)| = \sqrt{x^2(t)+y^2(t)+z^2(t)};$$

显然，$\vec{A}(t)$的矢端曲线，是一空间曲线，其方程为

$$\begin{cases} x=x(t), \\ y=y(t), \\ z=z(t). \end{cases}$$

（二）矢量的代数运算　通过矢量的坐标表示式，使得矢量的运算，化为数量（矢量的坐标）与基本单位矢量的运算来实现。

设$\vec{A}=\{x,y,z\}$，$\vec{a}=\{x_1,y_1,z_1\}$，$\vec{b}=\{x_2,y_2,z_2\}$；则不难推得下列常用的公式：

（1）　$\vec{A}$的方向余弦：

$$\cos\alpha=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}},$$

$$\cos\beta=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}},$$

$$\cos\gamma=\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}.$$

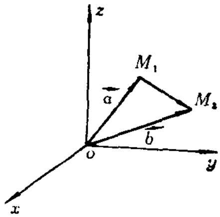


图1—10

（2）　$\lambda\vec{A}=\{\lambda x,\lambda y,\lambda z\}$.

（3）　$\vec{a}\pm\vec{b}=\{x_1\pm x_2,y_1\pm y_2,z_1\pm z_2\}$;

若$\vec{c}=\overrightarrow{M_1M_2}$（如图1—10），且$M_1(x_1,y_1,z_1)$，$M_2(x_2,y_2,z_2)$，因为

$$\overrightarrow{M_1M_2}=\overrightarrow{OM_2}-\overrightarrow{OM_1}=\vec{b}-\vec{a}$$

于是$\vec{c}=\{x_2-x_1,y_2-y_1,z_2-z_1\}$.