

[联邦德国] W·金士博 著

水环境 数学模型

中国建筑工业出版社

5112

7/8044

水环境数学模型

[联邦德国] W·金士博 著

第一篇 杨汝均 侯然杰 编纂

第二篇 刘兆昌 张兰生 编纂
程声通 张天柱



中国建筑工业出版社

本书共两篇，第一篇用较形象直观的方法阐述了数学模型的基本概念、建立数学模型的方法和步骤、河流湖泊数学模型基本方程的建立及求解的方法。在较详细地阐述了有关地面水数学模型的基本理论之后，介绍了有实用价值的河流、水库和湖泊的温度模型、水质模型及综合的水质——生态模型等。最后，本篇简要阐明了线性规划和动态规划方法的原理以及它们在水质管理和规划中的应用。为了便于对电子计算机尚不熟悉的读者研读本篇，附录中介绍了关于电子计算机的一般知识和 TI-58/59 高级可编程计算器的使用方法。

第二篇较全面地论述了地下水资源的水量和水质问题。包括地下水流动和污染物迁移的原理、水流基本方程、求解水流方程的数值解（差分法和有限元法）、参数估值方法；区域性污染物迁移模型的基本方程、求解迁移模型的方法（解析法、差分法、有限元法、特例曲线法和随机步行法）。本篇的特点是在重要章节之后附有算例及其计算机程序，以便进行地下水水量和水质的预测及管理；既有一定理论深度，又比较通俗易懂，便于读者掌握及应用。

水 环 境 数 学 模 型

[联邦德国] W·金士博 著

第一篇 杨汝均 侯然杰 编纂

第二篇 刘兆昌 张兰生 编纂
程声通 张天柱

*

中国建筑工业出版社出版(北京西郊百万庄)

新华书店北京发行所发行 各地新华书店经售

中国建筑工业出版社印刷厂印刷(北京阜外南礼士路)

*

开本：787×1092毫米 1/16 印张：27¼ 字数：656 千字

1987年10月第一版 1987年10月第一次印刷

印数：1—4,320册 定价：5.50元

统一书号：15040·5206

序

随着人们对水资源问题和水质问题的日益关注,迫切要求掌握用于水资源和水质的预测、模拟和管理的定量化工具。现在有关地面水体中的混合和扩散、地下水流动和污染物迁移原理的优秀著作很多。然而对于一个希望把实际问题抽象成数学模型从而能在电子计算机上应用这些模型来解决实际问题的环境工程师和水文地质工程师而言,在掌握基本概念和解决实际问题的能力之间仍存在一定的距离。本书旨在帮助读者建立起这两方面之间的联系。

我于1979和1983年先后两次到中国讲学。前一次讲学是在中国科学院环境化学研究所,题目是《环境问题的数学模型》;后一次是在清华大学讲学,题目是《地下水水量、水质数学模型》。在为这两次讲学的备课过程中形成了《水环境数学模型》(Mathematical Modeling of the Aquatic Environment)的雏形,并在讲学时第一次使用了现在写在本书中的许多内容。

本书包括了讲学时所准备的全部关于水环境数学模型的内容、讲学后所补充的水环境模型理论研究和实际应用的新材料以及许多附加的背景资料。本书的目标是使具有环境工程、水文地质、水力学和其他专业知识的读者能够熟悉与水环境有关的地面水和地下水数学模型,能独立编写有关的计算机程序以及利用数学模型解决一些自己面临的实际问题。为了达到这个目标,最好的途径是读者自己逐步深入研究从基本方程的解法起直到具体计算机程序的编写为止的每一个步骤。然后,通过试运行产生若干组对照数据,再反复修改程序以适合于应用。为此,本书详细介绍了在地面水水质模拟和地下水水量、水质模拟中常用的数值计算方法。同时,在地面水部分提供了十二个可在TI-58/59型计算器上运行的程序,在地下水部分提供了可以在Apple II个人电脑及其兼容机上运行的十八个用Apple II BASIC语言编写的程序。读者应该可以很容易地把所提供的程序移植到其他型号的个人电脑上使用。

本书在所有的地方都力求给出较直观形象的解释,并不单纯追求数学上的严密。为此,应向数学家们致歉。不过我还是建议读者在读本书的同时深入研究一下有关的数学基础,这对深入学习和提高研究的兴趣是很有益的。我期望本书在中国出版能使中国的读者感到地面水和地下水数学模型不仅是有用的而且也是有趣的。

在本书出版之际衷心感谢马科斯·蒲朗克学会、清华大学、中国科学院和德意志联邦共和国学术交流机构为我在华讲学所提供的财政支持。

本书稿为两次讲学用讲义及其他外文资料汇编成两篇,第一篇请杨汝均、侯然杰,第二篇请刘兆昌、张兰生、程声通、张天柱编纂。我审读了全部中文稿,对他们出色的工作表示衷心感谢。

Wolfgang Kinzelbach于斯图加特

1986年7月

AS90/04

目 录

第一篇 地面水数学模型	
第一章 环境问题的数学模型	3
§ 1.1 数学模型概述	3
1.1.1 数学模型在环境科学中的应用	3
1.1.2 数学模型的分类	4
1.1.3 建立数学模型的步骤	4
§ 1.2 建立数学模型的一个简单实例——王岛的狼	5
§ 1.3 植物-麋-狼生态模型的解	8
1.3.1 模型方程的解析解	8
1.3.2 模型的数值解及求数值解的 TI-59 程序	9
第二章 一维迁移方程	13
§ 2.1 河流的一维迁移方程	13
2.1.1 水量平衡(连续性方程)	13
2.1.2 污染物的迁移方程	14
§ 2.2 三维迁移方程	17
§ 2.3 与迁移方程有关的水力学部分	18
2.3.1 迁移方程中的水力学参数	18
2.3.2 确定弥散系数 D 的方法	18
§ 2.4 河口的一维迁移方程	23
§ 2.5 湖泊的迁移方程	24
第三章 基本迁移方程的解	25
§ 3.1 基本迁移方程的解析解	25
3.1.1 稳态解	25
3.1.2 特征线法	27
3.1.3 具有简单边界条件和线性源与漏时的解析解	28
3.1.4 纵向浓度剖面的确定	29
3.1.5 一个用来计算某种示踪物向下游移动时的浓度分布的 TI-58/59 程序	31
3.1.6 一维模型的局限性	32
§ 3.2 用有限差分法解迁移方程	34
3.2.1 显式差分体系	34
3.2.2 解显式差分体系用的 TI-59 程序	35
3.2.3 隐式差分体系	39
3.2.4 解算隐式差分体系(3-49)用的 TI-59 程序	42
3.2.5 有限段法	47
3.2.6 差分方程的推广	47
§ 3.3 用有限元法解迁移方程	49
3.3.1 有限元法的基本原理	49
3.3.2 有限元方程的解算公式	51
3.3.3 有限元法解迁移方程的实例	54
第四章 水体的温度模型	55
§ 4.1 水与大气之间的热交换	55
4.1.1 辐射	55
4.1.2 蒸发	55
4.1.3 对流	56
4.1.4 总热流量	56
§ 4.2 关于河流温度的一个模型	56
§ 4.3 线性化的温度模型	58
§ 4.4 深湖与水库的温度模型	63
4.4.1 深湖与水库里的温度分布	63
4.4.2 建立湖泊温度模型的主要假设	64
4.4.3 MIT 温度模型的数值计算方法	65
第五章 水质模型	70
§ 5.1 生化需氧量(BOD)	70
§ 5.2 细菌的生长	75
§ 5.3 溶解氧(DO)	78
5.3.1 河流里的主要耗氧过程	78
5.3.2 确定 K_2 的方法	78
5.3.3 Streeter-Phelps 模型的几种修正形式	79
5.3.4 基本 Streeter-Phelps 模型的解	80
5.3.5 关于底泥与呼吸耗氧、光合作用和硝化作用的影响	82

§ 5.4 污水排入河流对氧平衡的影响.....86	6.2.9 数值算例.....147
§ 5.5 模型参数的确定.....94	§ 6.3 动态规划.....152
5.5.1 线性回归方法.....94	6.3.1 一个简单的实例.....152
5.5.2 非线性参数估计.....95	6.3.2 动态规划的应用实例.....155
5.5.3 一个二维参数估计的例子.....97	附录A TI-58/59可编程序高级电子计算器的使用方法.....161
5.5.4 用多项式拟合数据.....102	A.1 基本概念.....161
5.5.5 用多项式拟合数据的数值例.....102	A.1.1 电子计算机的基本组成及其功能.....161
§ 5.6 QUAL-Ⅱ综合水质模型.....104	A.1.2 电子计算机程序.....162
5.6.1 QUAL-Ⅱ简介.....104	A.2 TI-58/59的使用方法.....163
5.6.2 各水质变量之间的相互关系.....104	A.2.1 TI-58/59各功能单元的构成.....163
5.6.3 河流系统的概念化.....105	A.2.2 TI-58/59各操作键的功能.....164
5.6.4 模型的方程.....105	A.3 TI-58/59的实用程序.....169
5.6.5 模型的水力学部分.....106	A.3.1 用近似公式计算水温 $T^{\circ}\text{C}$ 时饱和溶解氧浓度.....169
5.6.6 模型的反应项 $-\frac{dC}{dt}$106	A.3.2 线性回归.....170
5.6.7 模型方程组的解.....110	A.3.3 用牛顿法求函数的零点.....173
§ 5.7 河口的BOD-DO模型.....111	A.3.4 计算整数 n 的阶乘.....174
5.7.1 有限段模型方程.....112	A.3.5 求微分方程的解.....176
5.7.2 河口的稳态模型.....113	附录B 主要符号的意义.....178
5.7.3 河口的非稳态模型.....115	参考文献.....180
5.7.4 河口的二维模型.....117	
5.7.5 Pascagoula—河口模型.....118	
§ 5.8 湖泊与水库的水质模型.....120	
5.8.1 Vollenweider模型.....120	
5.8.2 Baca与Arnett湖泊模式.....121	
第六章 数学模型在河流与河口水质管理中的应用.....127	
§ 6.1 水质管理问题概述.....127	
6.1.1 河流的水质管理.....128	
6.1.2 河口的水质管理.....130	
§ 6.2 线性规划.....132	
6.2.1 一个简单的实例.....132	
6.2.2 线性规划问题的标准形式.....133	
6.2.3 单纯形法.....135	
6.2.4 一般的线性规划问题.....137	
6.2.5 求解一般线性规划问题的两步法.....138	
6.2.6 单纯形法的框图.....139	
6.2.7 单纯形法的TI-59程序.....140	
6.2.8 线性规划的应用实例.....143	
	第二篇 地下水数学模型
	第一章 引言.....189
	第二章 区域地下水流动的模拟.....191
	§ 2.1 应用范围.....191
	§ 2.2 水流现象和水流基本方程.....191
	第三章 水流方程的数值解法.....195
	§ 3.1 水流方程的解析法及其应用的局限性.....195
	§ 3.2 差分法.....198
	3.2.1 离散化: 标准情况—承压含水层.....198
	3.2.2 显式法.....203
	3.2.3 隐式法: 直接求解方程.....209
	3.2.4 隐式法: 迭代求解方程(1).....217
	3.2.5 隐式法: 迭代求解方程(2).....224

3.2.6 在其它类型含水层中的 应用	232	第六章 区域性 污染物 迁移 模型	335
3.2.7 结果的 曲线 表达	235	§ 6.1 应用范围	335
3.2.8 一个完整的模型及应用	242	§ 6.2 现象与基本方程	336
§ 3.3 有限元法	259	第七章 求解迁移方程的方法	346
3.3.1 稳态 模型	259	§ 7.1 解析解	346
3.3.2 用Galerkin法解非稳态 模 型	274	§ 7.2 忽略弥散的近似	357
3.3.3 结果的图形 表示法	294	7.2.1 轨线和 迁移时间	357
第四章 参数 估值	301	7.2.2 模型应用于含水层 的净化	368
§ 4.1 根据抽水试验识别参数	301	7.2.3 流速场的 计算	377
§ 4.2 估计降水对地下水的补给	309	§ 7.3 差分法	379
§ 4.3 通过标定数值模型识别参数	317	§ 7.4 有限元法	385
第五章 地下水的管理问题	320	§ 7.5 特征曲线法	400
§ 5.1 最优化问题的公式化	320	§ 7.6 随机步行法	403
§ 5.2 单纯形算法	323	§ 7.7 迁移模型的应用范围	417
		附录A 符号表	420
		参考文献	423

第一篇

地面水数学模型

[联邦德国] W·金士博 著

杨汝均 编 纂
侯然杰

第一章 环境问题的数学模型

§1.1 数学模型概述

1.1.1 数学模型在环境科学中的应用

环境科学工作者的主要任务是防止环境污染、改善环境质量、使环境管理趋于合理化和最优化,乃至最终达到人与自然环境的平衡。在完成这一艰巨任务的过程中,人们常常遇到这样一些问题:

(1) 为了改善一条有机污染严重,溶解氧浓度低于给定标准的河流的水质,可能需要建设一座污水处理厂。在规划设计这个污水处理厂之前应该明确回答处理厂应当建在什么地方、规模多大以及处理效率多高等问题。

(2) 一座计划中的发电厂准备把它的冷却水排入附近河流,为了评价电厂建成后是否会对河流构成热污染,环保部门必须根据它的设计排水量和水温确定所能造成的河水温升,以便进一步确定这种温升是否会对水生生态系统,特别是对鱼类产生明显影响。

(3) 过量的营养物质(如含磷、氮的物质)流入湖泊或水库会造成水体富营养化。为了防止某一湖泊或水库发生富营养化,应该把流入的营养物质限制在什么水平上也是在实际工作中常常需要解决的问题。

我们还可以举出很多与上述问题类似的问题。但是仅从上面提出的几个实际问题中,我们就可以发现一个共同特征:为了解决这类问题,往往需要了解各作用因素之间的定量关系,以及人类活动产生的各种废物(如废热)与环境质量参数的关系等。例如,作为三大环境要素之一的水体的质量,往往用其中所含有毒物质浓度、水温、浊度、溶解氧浓度、藻类及其它各种物质的浓度来表示;在未受人类活动影响的自然水体中和已受污染的水体中,前述这些参数的值是不同的;当由于人类活动所产生的废水和废热大量排入水体,使水质状态的改变超过一定限度时,我们就说水体受到了污染。那么输入强度和这些水质参数变化之间到底具有怎样的定量关系呢?这正是数学模型所能回答的问题。当然,数学模型并不一定同时给出输入与所有水质参数的定量关系,随着所研究问题的不同,有时只需要给出某一个或几个重要水质参数与输入的关系。一旦给出了输入与水质参数的关系,即一旦建立起描述那种定量关系的数学模型,我们就可以用它来解决前面所列举的各类实际问题。

归纳起来,数学模型在解决实际环境问题中的应用主要可以分成两大类:

(1) 在环境规划和管理中的应用:例如制定环境标准和排放标准,确定减少排放污染物的数量,对不同治理方案的经济性和有效性进行比较等等。

(2) 在环境影响评价和环境质量预测方面的应用:例如对规划中的新建工程项目、经济区进行环境影响评价,对城市结构变化、人口增长、能源结构改变和经济高速发展可能造成的环境质量变化进行预测等等。

不难发现在各类应用中有一个共同的特点,即要求对问题有预见能力,而这正是数学模型的主要优点之一。由于这一优点,使数学模型成为解决各种复杂环境问题的有力工具。

1.1.2 数学模型的分类

对数学模型进行分类的方法很多,这里主要考虑与环境有关的数学模型的分类。通常可以按模型的空间维数、时间的相关性、数学方程的特征和确定性的状态等来对环境数学模型进行分类。要详细讨论这些分类方法将需要很大篇幅,本书只讨论其中几种主要分类方法:

(1) 模型的空间维数

事实上,自然界的一切现象都是在三维空间里发生的,水质现象也不例外。因此,描述水质现象的数学模型也应该是一个解释为在三维空间中的函数。但是,在处理某些具体问题,为了减少数学处理上的复杂性,更多地是在给定的假设基础上使用二维甚至一维的模型。例如在一般情况下,可以用一个一维模型来描述一条河流,用一个二维模型来描述一个大而浅的湖泊。有时甚至可以用一个零维(即不包含空间变量)的模型来描述一个完全混合的湖泊。按照系统工程概念,把那些不含空间变量的(即零维的)模型称为集中参数模型;称那些具有连续空间变量的模型为分布参数模型,处理起来比较复杂;而那些具有离散空间变量的数学模型则介于两者之间,甚至更接近于集中参数模型,因此处理起来,特别是使用计算机处理时就方便多了。

(2) 数学模型的时间相关性

含有时间变量的数学模型能够描述水质随时间变化的规律,因此这类模型被称为动态模型;而那些不含时间变量的模型则只能描述平衡状态的水质情况,因此称其为稳态模型。根据所要解决的问题的不同性质,可分别采用具有不同时间相关性的模型。例如制定排放标准、确定减少排放量时需要使用临界条件下的稳态模型;而当我们要了解一次污染事故后河流中的水质分布时则必须要用动态模型。

(3) 模型特征的其他分类

按模型变量是否为随机变量,可以把数学模型分为确定性模型和非确定性模型两类。当变量含有随机特性(即非确定性)时,则称为随机模型;当变量不含有随机特性时,则称为确定性模型。本文只考虑确定性模型,它们的形式是一个或一组微分方程。

按模型方程中变量的阶次又可以把数学模型分成线性模型和非线性模型。模型方程中变量的阶次不全是一次的叫做非线性模型,否则叫做线性模型。非线性模型在数学上处理比较困难,因此如有可能应尽量使用线性模型。

1.1.3 建立数学模型的步骤^{[1.1][1.2][1.3]}

建立一个实际环境问题的数学模型一般可以分五步,这五个步骤是:

(1) 概念化

这一步包括选择适当的模型变量,确定变量之间的相互影响与变化规律,写出描述这些关系的数学方程。应当指出,这一步所得到的结果往往不是唯一的,模型的形式取决于所需解决问题的性质。一个模型只能反映它所描述的现象的基本特征,只是真实世界的一种近似。因此,在满足问题要求的前题下,应该使用尽可能简单的模型形式。

(2) 考察模型的一般特性

这一步包括考察模型的平衡特征、稳定性和灵敏性(灵敏性是反映模型参数变化时模型解的变化情况的一种特性)。如果这一步不能得到令人满意的结果就回到前两步重新做起。

(3) 确定模型参数

在模型方程中,通常含有一些取常数值参数。这些参数的数值需要用某种方式加以确定,如经验公式、实验室试验或数学方法等等。但是,不管用什么方法,必须使得到的参数值在代入模型后能较好地重现观测数据。当两个模型重现数据的能力相同时,通常选用含有参数较少的模型。如果这一步得不到令人满意结果就再回到前两步重新做起。

(4) 模型的检验

经过上述三个步骤之后,已经得到了一个能较好地重现确定参数时所用数据的数学模型。但是,这个模型重现其它观测数据的能力还不得而知,因此还必须检验模型是否具有预言能力。所谓检验就是用独立于确定参数时所用数据的新观测数据与模型的计算值相比较。如果达到预期精度,则说明所建立的模型是成功的,否则要重复前面三步的工作。

(5) 模型的应用

在这一步是使用所建立的模型去试着解决原先提出的问题,如果模型达不到解决问题的要求,那么仍然要重复上述各步骤,直到能用所建立的模型满意地解决原问题为止。

这里需要指出:在使用模型时始终要记住导出模型方程时的条件,不要在应用它们时超出模型所适用的范围。现场观测数据是建立数学模型的基础,数学模型不过是把观测数据条理化的一种方法。

下一节,通过一个简单的实例以便形象地说明建立数学模型的具体过程。

§1.2 建立数学模型的一个简单实例——王岛的狼^[1.5]

这个模型旨在定量地描述美国王岛上植物、麋和狼之间的相互依存关系。这个岛上存在一个很大的麋群,它们靠岛上的植物为生。岛上还存在一个实际上仅仅靠麋为生的狼群。有人对岛上麋与狼的数量进行了长期观察,通过定性分析画出了一个如图1-1所示的结构模型。这个结构模型启发我们可以用储存和通过这个食物链中的能量来描述植物—麋—狼之间的数量关系。因而我们把食物链中每个隔室中储存的能量定为模型的变量。经研究知道:一只狼平均具有37240kcal 能量,一只麋平均具有413000kcal 能量。在植物隔室里的平均生产率按可利用的入射太阳辐射能的3%来估计,约为7500 kcal/m²·y。食物链处于平衡状态时,各隔室含有的能量可画成如图1-2所示的“能量金字塔”。根据能量平衡关系,可以写出该生态系统的概念模型方程。使用图1-1中的符号,该系统模型方程如下:

$$\frac{dE_1}{dt} = F_{01} - (F_{10} + F_{12} + F_{14} + F_{15}) \quad (1-1)$$

$$\frac{dE_2}{dt} = F_{12} - (F_{20} + F_{23} + F_{25}) \quad (1-2)$$

$$\frac{dE_3}{dt} = F_{23} - (F_{30} + F_{35}) \quad (1-3)$$

为了把上述的概念模型转换成数学模型,我们必须确定方程(1-1)、(1-2)和(1-3)中 F_{ij} 的具体形式。确定 F_{ij} 后的系统方程(即数学模型)可以是线性表达式也可以是非线性表达式,这取决于问题的性质和要求。通常,大多数生态系统是不能用线性模型来描述的,但是我们现在的主要目的是说明建立数学模型的具体过程,因此为了简单起见用

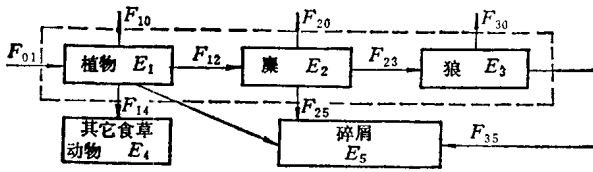


图 1-1 植物-麋-狼结构模型

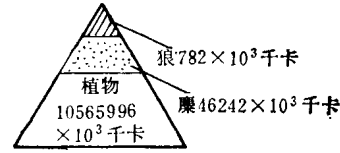


图 1-2 能量金字塔

线性模型来近似这个简单的生态系统。假定食物链中的所有的能量流 F_{ij} 都与施主隔室中所储存的能量成正比（这是一个与一级反应相似的假定），即：

$$F_{ij} = \phi_{ij} E_i \quad (1-4)$$

于是模型方程可以被写作如下形式：

$$\frac{dE_1}{dt} = F_{01} - (\rho_{10} + \tau_{12} + \tau_{14} + \mu_{15}) E_1 = F_{01} - L_1 E_1 \quad (1-5)$$

$$\frac{dE_2}{dt} = \tau_{12} E_1 - (\rho_{20} + \tau_{23} + \lambda_{25}) E_2 = \tau_{12} E_1 - L_2 E_2 \quad (1-6)$$

$$\frac{dE_3}{dt} = \tau_{23} E_2 - (\rho_{30} + \lambda_{35}) E_3 = \tau_{23} E_2 - L_3 E_3 \quad (1-7)$$

式中 ρ ——呼吸速率；
 τ ——供给速率；
 μ ——死亡速率；
 λ ——其它能量消耗的速率；
 L ——总的衰减速率。

式中的下标 i 表示隔室号，双下标 ij 表示从隔室 i 到隔室 j 。不难看出，在这个模型中较高的营养水平的变化不能影响较低的营养水平，显然从生物学角度看这是不合理的。例如按上述模型，如果在瞬间打死所有的狼，麋群的数量不会发生变化，这显然是荒谬的。为克服这一缺陷，可以按与基本的 Lotka-Volterra 竞争关系相似的形式改写能量流的表达式为：

$$F_{ij} = \phi_{ij} E_i (1 - \alpha_{ij} E_j) \quad (1-8)$$

这样我们就能够模拟受主对施主的反馈作用^[1,6]，反馈的强度可以通过改变常数 α_{ij} 来调整。然而如果引入常数 α_{ij} 就需要根据观测数据来确定更多的未知常数，这会使问题复杂化，而且无助于旨在说明建立数学模型的过程这个目的。因此，仍采用线性模型，虽然粗糙些，但是可以最低限度地描述实际系统的一些基本特征。

现在把方程 (1-5) 至 (1-7) 写成矩阵的形式，通过考察系统矩阵 A 可以分析这个体系的稳定性：

$$\begin{pmatrix} \frac{dE_1}{dt} \\ \frac{dE_2}{dt} \\ \frac{dE_3}{dt} \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} -L_1 & 0 & 0 \\ \tau_{12} & -L_2 & 0 \\ 0 & \tau_{23} & -L_3 \end{pmatrix}}_A \begin{pmatrix} E_1 \\ E_2 \\ E_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} F_{01} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (1-9)$$

系数矩阵 A 的特征值一般是复数, 如果它们都有负的实部, 当时间趋近无穷大时 ($t \rightarrow \infty$) 系统即趋于稳定。只要考察一下方程的解, 就会很容易地理解这一点: 方程的解里含有以 e 为底的指数项 (其指数为特征值与时间 t 的乘积), 如果特征值实部是正的, 方程的解就会随时间增大而趋于无穷大, 系统就是不稳定的。在这个例子里, 系统矩阵的特征值是 $-L_1$, $-L_2$ 和 $-L_3$, 因此系统是渐近稳定的。

令 $\frac{dE_i}{dt} = 0$, 可以得到系统达到稳定时的能量尺度, 它们是:

$$E_{1\infty} = \frac{F_{01}}{L_1} \quad (1-10)$$

$$E_{2\infty} = \frac{\tau_{12} F_{01}}{L_1 L_2} \quad (1-11)$$

$$E_{3\infty} = \frac{\tau_{23} \tau_{12} F_{01}}{L_1 L_2 L_3} \quad (1-12)$$

人类的活动在以不同方式改变着一个生态系统中的参数 (如有毒污染物可以增加死亡率, 热污染可以增加水环境中的代谢速率等等)。灵敏性分析可以帮助我们找出对群体变化是敏感的那些参数, 也可以帮助我们发现必须以高精度确定的那些参数。举例说, 可以通过计算 $|\partial E_i / \partial P|$ 或标准表达式 $|(\partial E_i / E_i) / (\partial P_i / P_i)|$ 来考察平衡点如何随参数值的改变而变化, P_i 代表任一参数。

在这个例子中, 可以很容易地依据观测数据来确定模型参数 (假定系统处于平衡状态而且 $\Phi_{ij} = \frac{F_{ij}}{E_i}$)。但是, 通常的模型参数估计工作却是一件十分枯燥的事, 它需要使用特殊的数学方法对观测数据加以处理, 以得到参数值, 目前已形成了有关数学模型的一个特定的研究领域, 感兴趣的读者可阅读有关文献。本例中的观测数据见表 1-1, 其中有的数据是直接测量得到的, 有的则是通过间接测量估算得到的。

基本数据和计算得到的参数值

表 1-1

基 本 数 据	E_{10} cal/m ² ·y	E_{20} cal/m ² ·y	E_{30} cal/m ² ·y	F_{01} cal/m ² ·y	F_{10} cal/m ² ·y	F_{15} cal/m ² ·y	F_{12} cal/m ² ·y
	12000	0.43	0.0014	7500	3500	3600	19.4
参 数	F_{14} cal/m ² ·y	F_{20} cal/m ² ·y	F_{25} cal/m ² ·y	F_{23} cal/m ² ·y	F_{30} cal/m ² ·y	F_{35} cal/m ² ·y	岛的面积 m ²
	380.6	9.2	10.1	0.085	0.076	0.009	544 × 10 ⁶
参 数	L_1 1/y	L_2 1/y	L_3 1/y	τ_{12} 1/y	τ_{23} 1/y		
	0.625	45.12	60.72	0.00162	0.198		

最后介绍一下关于模型的检验。由于我们只是把这个模型作为介绍建立数学模型的过程的简单例子, 所以在数学上不够严密, 也不能试图对它进行严格的检验。但是, 从这个模型我们仍然可以引伸出一些结论, 这些结论可以较好地与观察结果相对照 (这些观测数据应该独立于用于参数估计的数据)。例如, 对系统加上一个振荡的输入 F_{01} 来检验这个食物链中的群体 E_1 、 E_2 和 E_3 时, 它们也表现出振荡特性, 它们的振荡幅度按植物、麋

和狼的顺序递减,而且狼隔室的振荡落后于麋隔室的振荡。另一方面,参数改变后从旧的平衡点到一个新的平衡点所需要的时间也接近于观察值。尽管如此,仍然能从模型中发现一些明显的矛盾。例如,假设在某个时刻使狼的数量变为零(比如将狼全部杀死),结果狼群会在不到一年的时间内重新恢复,显然这是荒谬的。产生这种错误结果的原因,是由于我们的假设超出了模型的使用范围。有了经过检验的数学模型,就可以用它来解决开始建立模型时所提出的实际问题了。尽管这里所建立的数学模型只是一个简单的生态系统的例子,仍然可以利用这个模型来回答一些管理问题。例如假设希望在岛上开辟一个猎场,猎取一定数量的麋,那么由于麋数量的减少,会使该生态系统趋向什么样的新平衡点、达到新平衡点需要多长时间呢?读者不妨自己去试着用前述模型来回答上述问题。

关于环境数学模型的应用,本书以后每一章都要涉及到,因此这里就不再详细讨论。描述重金属、PCB等有毒污染物在食物链中积累过程的数学模型与上述生态模型有着十分类似的形式。以后还会看到,在把模型付诸应用时,很重要的一个步骤就是对模型方程求解。为了使读者对本书后几章中经常用到的两种模型方程解的形式有所了解,本章的最后拟以这个简单的生态系统模型为例,向读者介绍一下这个问题,至于更详尽的讨论则留待以后各章处理。

§ 1.3 植物-麋-狼生态模型的解

1.3.1 模型方程的解析解

已经看到,描述这个简单生态系统的数学模型方程是一组常系数一阶线性常微分方程组。根据微分方程理论,当微分方程的等号右边的 F_{0i} 项取某些特定形式时方程有解析解,否则必须求助于数值解法。这里提供一种求解析解的逐项积分方法。当微分方程具有如下标准形式时:

$$\frac{dx}{dt} + \beta_1 x = f(t) \quad (1-13)$$

式中 x ——任意变量;

t ——时间;

β_1 ——常数;

$f(t)$ ——含时间变量 t 的数学表达式。

如果 $f(t)$ 的形式是 β_2 、 $\beta_2 t^k$ 、 $\beta_2 e^{t_2 t}$ 、 $\beta_2 t^k e^{t_2 t}$ 这几项中的任意一项或某几项的和时,微分方程(1-13)可以用逐项积分法解析求解,相应的解的形式如表1-2所示。

对于前述生态模型,我们只要依次对模型中的每个方程重复使用表1-2,并利用初始条件 $E_i(0) = E_{i,0}$ (下标 i 的意义同前)就能得到它的解析解。解的表达式是:

$$E_1(t) = \left(E_{10} - \frac{F_{01}}{L_1} \right) e^{-L_1 t} + \frac{F_{01}}{L_1} \quad (1-14)$$

$$E_2(t) = \left(E_{20} - \frac{\tau_{12} F_{01}}{L_1 L_2} - \frac{\tau_{12} (E_{10} - F_{01}/L_1)}{L_2 - L_1} \right) e^{-L_2 t} + \frac{\tau_{12} (E_{10} - F_{01}/L_1)}{L_2 - L_1} e^{-L_1 t} + \frac{\tau_{12} F_{01}}{L_1 L_2} \quad (1-15)$$

$$\begin{aligned}
E_3(t) = & \left[E_{30} - \frac{\tau_{23}}{L_3 - L_2} \left(E_{20} - \frac{\tau_{12} F_{01}}{L_1 L_2} - \frac{\tau_{12}(E_{10} - F_{01})/L_1}{L_2 - L_1} \right) - \frac{\tau_{23} \tau_{12} F_{01}}{L_1 L_2 L_3} \right. \\
& \left. - \frac{\tau_{23} \tau_{12}(E_{10} - F_{01}/L_1)}{(L_3 - L_1)(L_2 - L_1)} \right] e^{-L_3 t} + \frac{\tau_{23}}{L_3 - L_2} \left(E_{20} - \frac{\tau_{12} F_{01}}{L_1 L_2} \right. \\
& \left. - \frac{\tau_{12}(E_{10} - F_{01}/L_1)}{L_2 - L_1} \right) e^{-L_2 t} + \frac{\tau_{23} \tau_{12}(E_{10} - F_{01}/L_1)}{(L_3 - L_1)(L_2 - L_1)} e^{-L_1 t} \\
& + \frac{\tau_{23} \tau_{12} F_{01}}{L_1 L_2 L_3}
\end{aligned} \quad (1-16)$$

微分方程 (1-13) 的解^[1,7]

表 1-2

项 目	微分方程		取决于系数的解			
	左侧	右侧	$\beta_1=0, \xi_1 \neq 0$	$\beta_1+\xi_1 \neq 0$ $\beta_1 \neq 0, \xi_1 \neq 0$	$\beta_1+\xi_1=0$ $\beta_1 \neq 0, \xi_1 \neq 0$	$\xi_1=0$
1	$\frac{dx}{dt} + \beta_1 x = \beta_2$		$\beta_2 t + C$	$\frac{\beta_2}{\beta_1} + C e^{-\beta_1 t}$	—	—
2	$\frac{dx}{dt} + \beta_1 x = \beta_2 t^K$		$\frac{\beta_2}{K+1} t^{K+1} + C$	$\beta_2 f(K) + C e^{-\beta_1 t}$	—	—
3	$\frac{dx}{dt} + \beta_1 x = \beta_2 e^{\xi_2 t}$		$\frac{\beta_2}{\xi_2} e^{\xi_2 t} + C$	$\frac{\beta_2}{\xi_2 + \beta_1} e^{\xi_2 t} + C e^{-\beta_1 t}$	$\beta_2 t e^{-\beta_1 t} + C e^{-\beta_1 t}$	同 1
4	$\frac{dx}{dt} + \beta_1 x = \beta_2 t^K e^{\xi_2 t}$		$\frac{\beta_2}{\xi_2} e^{\xi_2 t} f(K) + C$	$\frac{\beta_2}{\xi_2 + \beta_1} e^{\xi_2 t} f(K) + C e^{-\beta_1 t}$	$\frac{\beta_2}{K+1} t^{K+1} e^{-\beta_1 t} + C e^{-\beta_1 t}$	同 2
5	$\frac{dx}{dt} + \beta_1 x = 0$		C	$C e^{-\beta_1 t}$	—	—

注 1. C 为与初始条件有关的积分常数。

解 2. $f(K) = \sum_{m=1}^{K+1} [K! t^{(m-1)} (-1)^{(K+m-1)}] / [(m-1)! \beta_1^{(K+2-m)}]$

1.3.2 模型的数值解及求数值解的 TI-59 程序

我们在前面已经指出对于植物-麋-狼生态系统, 还可以使用精确性更高的标准 Lotka-Volterra 竞争方程来描述。这样数学模型的形式就变为:

$$-\frac{dE_1}{dt} = a_1 + a_2 E_1 + a_3 E_1^2 + a_4 E_1 E_2 \quad (1-17)$$

$$\frac{dE_2}{dt} = b_1 E_1 E_2 + b_2 E_2 + b_3 E_2^2 + b_4 E_2 E_3 \quad (1-18)$$

$$\frac{dE_3}{dt} = c_1 E_2 E_3 + c_2 E_3 + c_3 E_3^2 \quad (1-19)$$

这是一个非线性方程组, 因此不能用前述解析方法求解, 但是如果将这个方程组变成如下形式:

$$E_1(t + \Delta t) = E_1(t) + \frac{dE_1}{dt}(t) \Delta t \quad (1-20)$$

$$E_2(t + \Delta t) = E_2(t) + \frac{dE_2}{dt}(t) \Delta t \quad (1-21)$$

$$E_3(t + \Delta t) = E_3(t) + \frac{dE_3}{dt}(t) \Delta t \quad (1-22)$$

那么就可以给出用欧拉法解这个方程组的TI-59计算机程序(关于TI-59计算机的使用方法请看附录A)。在这个程序中我们所用的参数值是: $a_1 = 750$, $a_2 = -0.047$, $a_3 = 0$, $a_4 = -0.036$, $b_1 = 0.00036$, $b_2 = -3.612$, $b_3 = -0.015$, $b_4 = -5$, $c_1 = 1$, $c_2 = -0.29$, $c_3 = -100$ 。采用的时间步长为 $\Delta t = 0.1$ 年, 计算时间区间为 30 年, 初始条件 $E_1(0) = 16000$, $E_2(0) = 0.1$, $E_3(0) = 0.001$ 。

1. 程序的框图见图1-3。

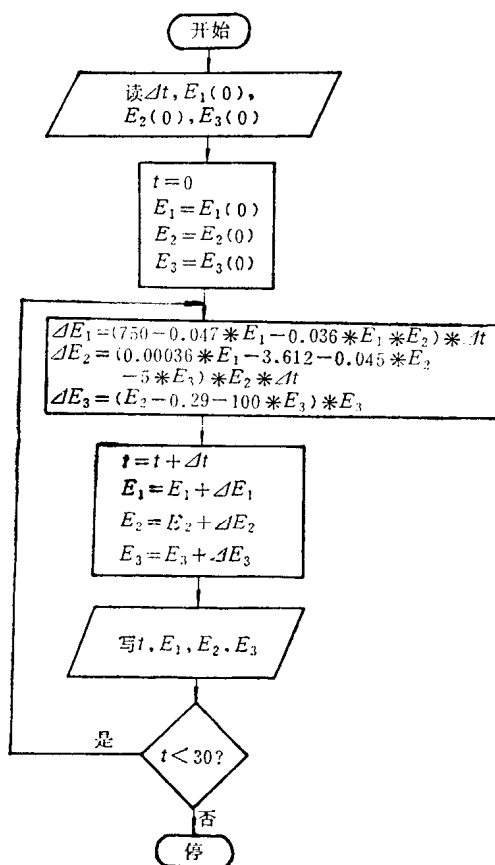


图 1-3 用欧拉法解王岛生态模型

2. 标号与变量存储位置见表1-3及表1-4。

表 1-3

标 号	作 用
A	输入时间步长 Δt
B	输入起始值 $E_1(0)$
C	输入起始值 $E_2(0)$
D	输入起始值 $E_3(0)$
E	开始运算

表 1-4

变量名	地 址	变量名	地 址
Δt	00	t	04
E_1	01	ΔE_1	05
E_2	02	ΔE_2	06
E_3	03	ΔE_3	07