普通高等工科院校基础课规划教材

线性代数学习指导

施声久　主　编
耿玉仙　副主编

机械工业出版社
China Machine Press

本书根据教育部颁发的线性代数课程教学基本要求，参考硕士研究生入学考试大纲，总结、梳理教材中各章的基本概念、基本理论和计算方法，提示内容重点和学习难点，选择典型范例精讲，并配有相当数量的练习题，题目难度适中，也兼顾考研要求。本书可作为线性代数课程的教学参考书，也可作为考研的复习应考用书。

图书在版编目（CIP）数据

线性代数学习指导/施声久主编．—北京：机械工业出版社，2002.7
普通高等工科院校基础课规划教材
ISBN 7-111-10425-0

Ⅰ.线…　Ⅱ.施…　Ⅲ.线性代数－高等学校－教材
Ⅳ.O151.2

中国版本图书馆CIP数据核字（2002）第041246号

机械工业出版社（北京市百万庄大街22号　邮政编码100037）
责任编辑：郑　丹　版式设计：霍永明　责任校对：张　媛
封面设计：陈　沛　责任印制：路　琳
北京机工印刷厂印刷·新华书店北京发行所发行
2002年7月第1版第1次印刷
1000mm×1400mm B5·7.25印张·239千字
0 001—3 000册
定价：16.50元

序

人类已经满怀激情地跨入了充满机遇与挑战的21世纪。这个世纪要求高等教育培养的人才必须具有高尚的思想道德，明确的历史责任感和社会使命感，较强的创新精神、创新能力和实践能力，宽广的知识面和扎实的基础。基础知识水平的高低直接影响到人才的素质及能力，关系到我国未来科学、技术的发展水平及在世界上的竞争力。由于基础学科本身的特点，以及某些短期功利思想的影响，不少人对大学基础教育的认识相当偏颇，我们有必要在历史的回眸中求前车之鉴，在未来的展望中创革新之路。我们必须认真转变教育思想，坚持以邓小平同志提出的“三个面向”和江泽民同志提出的“三个代表”为指导，以培养新世纪高素质人才为宗旨，以提高人才培养质量为主线，以转变教育思想观念为先导，以深化教学改革为动力，以全面推进素质教育和改革人才培养模式为重点，以构建新的教学内容和课程体系、加大教学方法和手段改革为核心，努力培养素质高、应用能力与实践能力强、富有创新精神和特色的应用性的复合型人才。

基于上述考虑，中国机械工业教育协会、机械工业出版社、江苏省教育厅（原江苏省教委）和江苏省及省外部分高等工科院校成立了教材编审委员会，组织编写了大学基础课程系列教材，作为加强教学基本建设的一种努力。

这套教材力求具有以下特点：

(1) 科学定位。本套教材主要用于应用性本科人才的培养。

(2) 综合考虑、整体优化，体现“适、宽、精、新、用”。

所谓“适”，就是要深浅适度；所谓“宽”，就是知识面要宽些；所谓“精”，就是要少而精；所谓“新”，就是要跟踪应用学科前沿，推陈出新，反映时代要求；所谓“用”，就是要理论联系实际，学以致用。

(3) 强调特色。就是要体现一般工科院校的特点，符合一般工科院校基础课教学的实际要求。

(4) 以学生为本。本套教材应尽量体现以学生为本，以学生为中心的教育思想，不为教而教。注重培养学生自学能力和扩展、发展知识能力，为学生今后持续创造性学习打好基础。

尽管本套教材想以新思想、新体系、新面孔出现在读者面前，但由于是一种新的探索，难免有这样那样的缺点甚至错误，敬请广大读者不吝指教，以便再版时修正和完善。

本套教材的编写和出版得到了中国机械工业教育协会、机械工业出版社、江苏省教育厅以及各主审、主编和参编学校的大力支持与配合，在此，一并表示衷心感谢。

普通高等工科院校基础课规划教材编审委员会

主任　殷翔文

2002年3月

前　言

线性代数是高等工科院校的一门重要的理论基础课程。随着计算机的广泛使用，计算技术的迅猛发展，线性代数这门课程的重要性愈来愈突出。它不仅是学习后续课程以及进行理论研究和工作实践的必要基础，而且对培养学生的能力也起着重要作用。为了指导学生学好这门课程，加深学生理解所学的内容，提高学生综合运用知识解决实际问题的能力，我们精心编写了这本《线性代数学习指导》。

本书根据教育部颁发的线性代数课程教学基本要求，参考硕士研究生入学考试大纲，总结梳理了线性代数的主要内容，力求突出教材中的重点和难点，着重分析解题思路，帮助学生纠正学习中易犯的错误。本书各章均按知识结构、基本要求、内容提要、范例精讲、练习与测试、答案与提示六个部分编写。书中所选择的范例比较有代表性，练习题A难度适中，练习题B适当兼顾考研要求，自测题主要帮助学生检查各章的学习情况，所有题型都和硕士研究生入学试题相一致。本书既可以作为学生的学习指导书和教师的教学参考书，也可以作为考研读者的复习应考用书。

本书的第1、2章由施声久编写，第3、4章由郭跃华编写，第5、6章由耿玉仙编写，最后由施声久定稿。南京大学教授、博士生导师秦厚荣认真、仔细地审阅了全部书稿，并提出了许多宝贵意见，在此谨表示衷心的感谢。由于编者水平的限制，本书难免还有疏漏和不足之处，恳请读者批评指正。

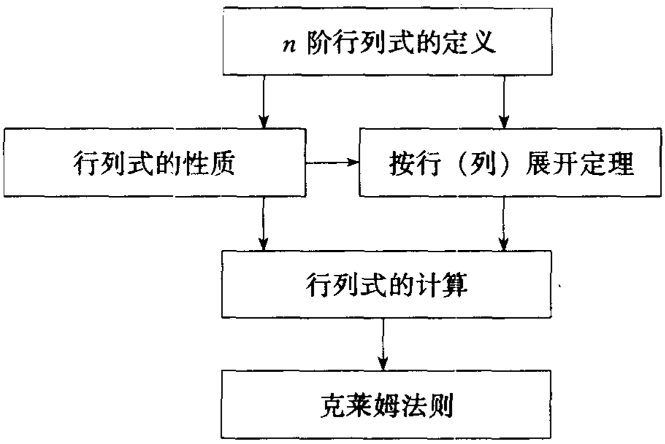
编者

2002年2月

目　录

第1章 行列式

知识结构



基本要求

1）理解 n 阶行列式的定义和性质。
2）熟练掌握行列式的计算方法。
3）掌握克莱姆法则。

内容提要

1. 全排列与逆序数

（1）全排列　由 n 个数 1，2，……，n 组成的一个有序数组 i_1，i_2，…，i_n 称为一个 n 元全排列，简称排列。n 元全排列共有 n！个。

（2）逆序和逆序数　由小到大排列 $12\cdots n$ 称作顺序排列，也称作标准排列。

若排列 $i_1i_2\cdots i_n$ 中元素 i_k 前有比 i_k 大的数，则称元素 i_k 有逆序。若有 t_k 个数比 i_k 大，则称元素 i_k 的逆序数为 t_k。

排列 $i_1i_2\cdots i_n$ 中所有元素的逆序数之和 $t=\sum\limits_{k=1}^{n}t_k$ 称为该排列的逆

序数，记作 $t\ (i_1i_2\cdots i_n)$。

(3) 奇排列和偶排列　当 $t\ (i_1i_2\cdots i_n)$ 为奇数时，排列 $i_1i_2\cdots i_n$ 称为奇排列。当 $t\ (i_1i_2\cdots i_n)$ 为偶数时，排列 $i_1i_2\cdots i_n$ 称为偶排列。

所有 n 元排列中，奇排列和偶排列各有 $\frac{1}{2}n!$ 个。

(4) 对换　排列 $i_1\cdots i_k\cdots i_s\cdots i_n$ 中交换任意两个元素 i_k 和 i_s 的位置，称为一次对换。排列经一次对换改变一次奇偶性。

任意一个 n 元奇（偶）排列，总可经奇（偶）数次对换变为标准排列。

2. n 阶行列式的定义

由 n^2 个元素 a_{ij} $(i,\ j=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$ 组成的符号

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

表示所有均匀分布组元素乘积的代数和，称作 n 阶行列式。所谓均匀分布组是指各行各列都取到且仅取一个元素组成的元素组。每一项的符号是：当这一项中 n 个元素的行标排列为顺序排列时，列标排列若为偶排列，则取正号；若为奇排列，则取负号。即

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=\sum_{j_1j_2\cdots j_n}(-1)^{t(j_1j_2\cdots j_n)}a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}$$

n 阶行列式 D 也可记作 $\Delta\ (a_{ij})$ 或 $\det\ (a_{ij})$。

3. 行列式的性质

1) 行列式与它的转置行列式相等：$D=D^{\mathrm{T}}$。

2) 行列式交换两行，记作 $r_i\leftrightarrow r_j$（或交换两列，记作 $c_i\leftrightarrow c_j$），行列式仅改变符号。

3) 行列式中某行（或列）的公因子 k 可以提到行列式符号外面，记作 $r_i\div k$（或 $c_i\div k$）。即用一个数乘以行列式等于用这个数乘以行列式中的任意一行（或列）。

4) 若一个行列式中有两行（或列）元素完全相同，或对应元素成比例，或有一行（或列）元素全为零，则行列式等于零。

5）若 n 阶行列式D 中第j 行（或列）元素都是两数之和，则 D 可以分拆成两个行列式的和：$D=D_1+D_2$，其中 D_1 和 D_2 中第 j 行（或列）的元素分别取第一个和第二个数，而 D_1 和 D_2 中其余的元素均与 D 相同。

6）把行列式某一行（或列）的各元素乘以同一个数后加到另一行（或列）对应的元素上，记作 r_i+kr_j（或 c_i+kc_j），行列式的值不变。

4. 几种特殊的行列式

（1）二阶行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$$

记忆用对角线法则：

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

实线乘积减去虚线乘积。

（2）三阶行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}$$

$$-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{11}a_{23}a_{32}$$

记忆用对角线法则：

$$\begin{array}{ccccc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \end{array}$$

实线乘积之和减去虚线乘积之和。

（3）三角形行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & & \boldsymbol{O} \\ & a_{22} & \\ * & & \ddots \\ & & & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & & * \\ & a_{22} & \\ \boldsymbol{O} & & \ddots \\ & & & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$$

$$\begin{vmatrix} \boldsymbol{O} & & & a_{1n} \\ & & a_{2n-1} & \\ & \iddots & & \\ a_{n1} & & & * \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} & * & & a_{1n} \\ & & a_{2n-1} & \\ & \iddots & & \boldsymbol{O} \\ a_{n1} & & & \end{vmatrix}$$

$$= (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} a_{1n}a_{2,n-1}\cdots a_{n1}$$

(4) 对角形行列式

$$\begin{vmatrix} \lambda_1 & & & \boldsymbol{O} \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ \boldsymbol{O} & & & \lambda_n \end{vmatrix} = \lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n$$

$$\begin{vmatrix} \boldsymbol{O} & & & \lambda_1 \\ & & \lambda_2 & \\ & \iddots & & \\ \lambda_n & & & \boldsymbol{O} \end{vmatrix} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n$$

(5) 分块三角形行列式

$$\begin{vmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{O} \\ * & \boldsymbol{B} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{A} & * \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{B} \end{vmatrix} = |\boldsymbol{A}||\boldsymbol{B}|$$

$$\begin{vmatrix} \boldsymbol{O} & \boldsymbol{A} \\ \boldsymbol{B} & * \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} * & \boldsymbol{A} \\ \boldsymbol{B} & \boldsymbol{O} \end{vmatrix} = (-1)^{m\times n} |\boldsymbol{A}||\boldsymbol{B}|$$

其中$|\boldsymbol{A}|$和$|\boldsymbol{B}|$分别为 m 和 n 阶行列式。

(6) 范德蒙行列式

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & \cdots & x_n^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{1\leqslant j<i\leqslant n} (x_i - x_j)$$

5. 余子式和代数余子式

n 阶行列式中划去元素a_{ij}所在的行和列，余下元素构成的 $n-1$ 阶行列式 M_{ij}称为元素a_{ij}的余子式，而 $A_{ij} = (-1)^{i+j}M_{ij}$称为$a_{ij}$的代数余子式。

6. 行列式按行（列）展开定理及推论

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ik} A_{jk} = a_{i1}A_{j1} + a_{i2}A_{j2} + \cdots + a_{in}A_{jn} = \begin{cases} D & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$$

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ki} A_{kj} = a_{1i} A_{1j} + a_{2i} A_{2j} + \cdots + a_{ni} A_{nj} = \begin{cases} D & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$$

7. 行列式的常用计算方法

1）利用性质把行列式化简成三角形行列式、范德蒙行列式或其他已知值的行列式。

2）利用性质及按行（列）展开定理逐次降阶。

3）利用性质及展开定理建立递推公式。

4）利用其他技巧性计算方法。

8. 克莱姆法则

(1) 非齐次线性方程组

设非齐次线性方程组为

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \qquad \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

若其系数行列式

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \neq 0$$

则方程组有唯一解

$$x_1 = \frac{D_1}{D}, \quad x_2 = \frac{D_2}{D}, \quad \cdots, \quad x_n = \frac{D_n}{D}$$

其中 D_j 是系数行列式 D 中第 j 列的元素用方程组的常数项 b_1，b_2，$\cdots$，b_n 替代而得到的行列式（$j=1$，2，$\cdots$，n）。

(2) 齐次线性方程组

齐次线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = 0 \\ \qquad \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = 0 \end{cases}$$

有非零解的充要条件是系数行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=0$$

或者说，齐次线性方程组只有零解的充要条件是 $D\neq 0$。

本章重点

n 阶行列式的概念和性质，以及利用行列式的性质和按行（列）展开定理计算行列式。

范例精讲

填空题

例 1 设 $D=\Delta(a_{ij})$ 是五阶行列式，则 D 中的项 $a_{43}a_{15}a_{24}a_{32}a_{51}$ 的符号取________。

答 负号。

讲评 将 $a_{43}a_{15}a_{24}a_{32}a_{51}$ 整理成 $a_{15}a_{24}a_{32}a_{43}a_{51}$，$t(54231)=9$ 是奇数。

例 2 设 $|\boldsymbol{A}|$ 是五阶行列式（$\boldsymbol{A}$ 为方阵），其中 $a_{12}=a_{23}=0$，则按定义展开式中为零的项至少有____项。

答 42。

讲评 $|\boldsymbol{A}|$ 按定义展开式中共有 5! 项，其中含 a_{12} 和 a_{23} 的项各有 4! 项，而同时含有 a_{12} 和 a_{23} 的项有 3! 项，因此展开式中含 a_{12} 或 a_{23} 的项共有 $2\times 4!-3!=42$ 项。

例 3 $\begin{vmatrix} 53 & 50 & 104 \\ 99 & 100 & 195 \\ 151 & 150 & 300 \end{vmatrix}=$________。

答 1000。

讲评 第 1 列的元素与第 2 列较接近，第 3 列的元素与第 2 列元素的 2 倍较接近，因此

$$\begin{vmatrix} 53 & 50 & 104 \\ 99 & 100 & 195 \\ 151 & 150 & 300 \end{vmatrix} \xlongequal[c_3-2c_2]{c_1-c_2} \begin{vmatrix} 3 & 50 & 4 \\ -1 & 100 & -5 \\ 1 & 150 & 0 \end{vmatrix} \xlongequal{c_2\times\frac{1}{50}} 50\begin{vmatrix} 3 & 1 & 4 \\ -1 & 2 & -5 \\ 1 & 3 & 0 \end{vmatrix}=1000$$

例 4 $\begin{vmatrix}1&1&1&0\\1&1&0&1\\1&0&1&1\\0&1&1&1\end{vmatrix}=$________。

答 -3。

讲评 本题可用多种方法计算，但要注意四阶及四阶以上行列式不适于采用对角线法则。

解 1 化简为三角形行列式

$$\begin{vmatrix}1&1&1&0\\1&1&0&1\\1&0&1&1\\0&1&1&1\end{vmatrix}\xlongequal[r_3-r_1]{r_2-r_1}\begin{vmatrix}1&1&1&0\\0&0&-1&1\\0&-1&0&1\\0&1&1&1\end{vmatrix}\xlongequal{r_4+r_2+r_3}\begin{vmatrix}1&1&1&0\\0&0&-1&1\\0&-1&0&1\\0&0&0&3\end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{r_2\leftrightarrow r_3}-\begin{vmatrix}1&1&1&0\\0&-1&0&1\\0&0&-1&1\\0&0&0&3\end{vmatrix}=-3$$

解 2 用降阶法

$$\begin{vmatrix}1&1&1&0\\1&1&0&1\\1&0&1&1\\0&1&1&1\end{vmatrix}\xlongequal[r_3-r_1]{r_2-r_1}\begin{vmatrix}1&1&1&0\\0&0&-1&1\\0&-1&0&1\\0&1&1&1\end{vmatrix}\xlongequal{\text{按}c_1\text{展开}}\begin{vmatrix}0&-1&1\\-1&0&1\\1&1&1\end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{r_2+r_3}\begin{vmatrix}0&-1&1\\0&1&2\\1&1&1\end{vmatrix}\xlongequal{\text{按}c_1\text{展开}}\begin{vmatrix}-1&1\\1&2\end{vmatrix}=-3$$

解 3 用公式

$$\begin{vmatrix}1&1&1&0\\1&1&0&1\\1&0&1&1\\0&1&1&1\end{vmatrix}\xlongequal[r_2-r_3-r_4]{r_1-r_2}\begin{vmatrix}0&0&1&-1\\0&0&-2&-1\\1&0&1&1\\0&1&1&1\end{vmatrix}$$

$$=(-1)^{2\times2}\begin{vmatrix}1&-1\\-2&-1\end{vmatrix}\begin{vmatrix}1&0\\0&1\end{vmatrix}=-3$$

例 5 $D_5=\begin{vmatrix}2&1&0&0&0\\1&2&1&0&0\\0&1&2&1&0\\0&0&1&2&1\\0&0&0&1&2\end{vmatrix}=$________。

答 6。

讲评 本题可化成三角形行列式，也可用展开定理建立递推关系再计算。

解 1 $$D_5\xlongequal[\substack{r_4-\frac{3}{4}r_3\\ r_5-\frac{4}{5}r_4}]{\substack{r_2-\frac{1}{2}r_1\\ r_3-\frac{2}{3}r_2}}\begin{vmatrix}2&1&0&0&0\\0&\frac{3}{2}&1&0&0\\0&0&\frac{4}{3}&1&0\\0&0&0&\frac{5}{4}&1\\0&0&0&0&\frac{6}{5}\end{vmatrix}=2\times\frac{3}{2}\times\frac{4}{3}\times\frac{5}{4}\times\frac{6}{5}=6$$

解 2

$$D_5\xlongequal[\text{展开}]{\text{按}r_1}2D_4-\begin{vmatrix}1&1&0&0\\0&2&1&0\\0&1&2&1\\0&0&1&2\end{vmatrix}=2D_4-\begin{vmatrix}2&1&0\\1&2&1\\0&1&2\end{vmatrix}=2D_4-D_3$$

得递推关系 $D_5-D_4=D_4-D_3$，重复使用这个递推关系得

$$D_5-D_4=D_4-D_3=D_3-D_2=D_2-D_1=3-2=1$$

又得递推关系

$$D_5=D_4+1=D_3+2=D_2+3=D_1+4=2+4=6$$

一般来说，对于形如

$$\begin{vmatrix}a&b&&&\\c&a&b&&\\&c&a&\ddots&\\&&\ddots&\ddots&b\\&&&c&a\end{vmatrix}$$

的行列式均可考虑用递推法。

例 6 $D=\begin{vmatrix}0&0&7&2&0\\0&0&9&5&0\\0&0&3&4&0\\2&1&-1&-2&7\\5&2&1&3&4\end{vmatrix}=$ ________。

答 0。

讲评 本题的特点是零元素比较多，计算时可以充分利用。

解 1 $D\xlongequal{r_5-2r_4}\begin{vmatrix}0&0&7&2&0\\0&0&9&5&0\\0&0&3&4&0\\2&1&-1&-2&7\\1&0&3&7&-10\end{vmatrix}\xlongequal[\text{展开}]{\text{按}c_2}\begin{vmatrix}0&7&2&0\\0&9&5&0\\0&3&4&0\\1&3&7&-10\end{vmatrix}=0$

(c_1 和 c_4 成比例)。

解 2

$$D_5\xlongequal{c_3\leftrightarrow c_5}-\begin{vmatrix}0&0&0&2&7\\0&0&0&5&9\\0&0&0&4&3\\2&1&7&-2&-1\\5&2&-10&7&3\end{vmatrix}=-(-1)^{2\times 3}\begin{vmatrix}2&1\\5&2\end{vmatrix}\begin{vmatrix}0&2&7\\0&5&9\\0&4&3\end{vmatrix}=0$$

例 7 $\begin{vmatrix}x&-x&-1&x\\2&2&3&x\\-7&10&4&3\\1&-7&1&x\end{vmatrix}$ 是____次多项式，其常数项是____。

答 二；-48。

讲评 按 r_1 展开即得 $D=xA_{11}-xA_{12}-A_{13}+xA_{14}$，其中 A_{11}、A_{12}、A_{13}分别是 x 的一次式，A_{14}是常数，故 D 是二次多项式。令 $x=0$ 即可得到多项式的常数项：

$$\begin{vmatrix}0&0&-1&0\\2&2&3&0\\-7&10&4&3\\1&-7&1&0\end{vmatrix}\xlongequal[\text{展开}]{\text{按}r_1}(-1)\begin{vmatrix}2&2&0\\-7&10&3\\1&-7&0\end{vmatrix}\xlongequal[\text{展开}]{\text{按}c_3}3\begin{vmatrix}2&2\\1&-7\end{vmatrix}=-48$$

或按定义求常数项，第 1 行只能取 a_{13}，第 4 列只能取 a_{34}，所以常数项应为 $-a_{13}a_{21}a_{34}a_{42}+a_{13}a_{22}a_{34}a_{41}=-42-6=-48$。

例 8 设 $f(x)=\begin{vmatrix} x-a_{11} & -a_{12} & -a_{13} & -a_{14} \\ -a_{21} & x-a_{22} & -a_{23} & -a_{24} \\ -a_{31} & -a_{32} & x-a_{33} & -a_{34} \\ -a_{41} & -a_{42} & -a_{43} & x-a_{44} \end{vmatrix}$，则 x^3 的系数是____。

答 $-\sum_{i=1}^{4} a_{ii}=-(a_{11}+a_{22}+a_{33}+a_{44})$。

讲评 按行列式的定义，每一项均是不同行、不同列元素的乘积，含 x^3 的项必须有主对角线上三个元素的乘积，则第 4 个元素必是主对角线上剩余的一个元素，即 x^3 只能在 $(x-a_{11})(x-a_{22})(x-a_{33})(x-a_{44})$ 中出现，可见 x^3 的系数应为 $-\sum_{i=1}^{4} a_{ii}$。

单项选择题

例 9 设 $D=\Delta(a_{ij})$ 为六阶行列式，则____为 D 中带负号的项。

A $a_{12}a_{23}a_{34}a_{45}a_{56}$　　B $a_{61}a_{52}a_{43}a_{34}a_{25}a_{16}$

C $a_{21}a_{32}a_{43}a_{16}a_{55}a_{64}$　　D $a_{21}a_{32}a_{43}a_{54}a_{65}a_{66}$

答 B。

讲评 A 中只有五个元素，D 中含有 a_{65} 和 a_{66}，故都不是均匀分布组，即不是六阶行列式中的项，B 和 C 都是均匀分布组，且

B $a_{61}a_{52}a_{43}a_{34}a_{25}a_{16}=a_{16}a_{25}a_{34}a_{43}a_{52}a_{61}$，$t(654321)=15$，

C $a_{21}a_{32}a_{43}a_{16}a_{55}a_{64}=a_{16}a_{21}a_{32}a_{43}a_{55}a_{64}$，$t(612354)=6$。

故 B 带负号，C 带正号。

例 10 与 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$ 的值相等的行列式是________。

A $\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} & 3 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & 5 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & 9 \end{vmatrix}$　　B $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{11}-a_{21} & a_{12}-a_{22} & a_{13}-a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$

C $\begin{vmatrix} a_{11}-a_{21} & a_{12}-a_{22} & a_{13}-a_{23} \\ a_{21}-a_{31} & a_{22}-a_{32} & a_{23}-a_{33} \\ a_{31}-a_{11} & a_{32}-a_{12} & a_{33}-a_{13} \end{vmatrix}$