

The Progress of Research for Mathematics ·
Physics · Mechanics and High New Technology
1996 (6)



数学·物理·力学·高新技术 研究进展

一九九六·第六期

焦善庆 主编

西南交通大学出版社

序

《数学·物理·力学·高新技术研究进展》走过了十年历程,在教授、专家、科技工作者及厂矿企业人士的共同努力下,已成为一个集基础研究及应用研究为一体的、具有一定影响的综合性科技文献。该第六卷论文,通过严格审查筛选,质量有所提高,在覆盖面和深广度方面都涉及到一些跨世纪的前沿课题,与当前科技的发展趋势吻合。封面及版式设计也有较大的改进与提高。

《数学·物理·力学·高新技术研究进展》是理论联系实际、基础研究与应用研究相互结合、相互激励、相互渗透的最佳渠道。没有深入扎实的基础研究为后盾,高、新技术就不可能获得快速发展,这是一个十分明确的道理。深信基础研究,它必将发挥自己应有的作用。

基础科学研究的不景气,是一个全球范围的问题。国际著名物理学家 Victor Weisskopf 1993 年在 CERN 曾严肃地指出:“我们正面临一场危机,不仅是粒子物理学的危机,而是整个基础科学的危机。基础科学,特别是高能物理学目前正处在危险之中”。他认为:“科学界应为此而受到责备,因为我们没有完成向公众解释基础研究的奇妙、深度和意义的任务”。他还指出“民族主义和过分专门化正自取其祸,为了抵制这种日益得势的“实利主义”,科学家有责任比以往更频繁地利用公开演讲、书籍和文章、新闻媒介及教育计划去解释科学使命,呼吁人们去了解自然规律,使公众了解到底什么是科学以及一切事物之间是如何相关联的”。Weisskopf 最后说:“基础科学是应用科学之本,舍本则树枯,科学需要受新奇事例激励的基础研究,不探索纯知识、纯学问,科学必不能发展”。这些观点颇具指导意义。

为培养跨世纪高科技建设人才的需求,美国首先以加强基础理论教学及基础研究为试点,并已取得成功经验在全国推广。日本也对自己以往执行的科技发展策略进行了总结和反思,加强了对基础教学和基础研究方面的投入。这些动向说明了基础研究与高技术发展之间的重要关系已逐步被公众所理解。我们国家对此也给予了高度重视,标志着我国的科技繁荣指日可待。

基础科学虽然目前处于平静期,但不会降到“临界线”之下。事实确实如此,1994 年基础研究方面发现了两项重大事例,其一是费米实验实验室发现了 t 夸克,并测出质量为 $m_t = (174 \pm 17) \text{Gev}$ 。其二是日本神冈的地下探测器发现了反常宇宙线事例,并立即获得全球另外三大探测基地的支持,此反常事例强有力地显示了“中微子振荡”现象的存在。这些发现包含着大量的新数学、新物理、新动力学机制以及新的高技术问题,推动了基础研究与高、新技术向更高的层次发展。

由此可见,十年来我们所坚持的方向是正确的,前途是光明的,我们要倍加努力,艰苦奋进,在基础研究与高、新技术相结合方面贡献自己的力量。

焦善庆

1996 年 3 月于西南交通大学 成都

全国第六届 MPMH 研究学术委员会

主任委员：焦善庆

委员：张纪岳 张世昌 陆泉康
彭守礼 王 锋 李继彬
赵为礼 刘西垣 管克英
燕居让 曹盛林 王新志
唐建民 杨永正

全国第六届 MPMH 研究组织委员会

主任委员：焦善庆

副主任委员：

数 学：李继彬 王 锋 赵为礼
管克英 廖亮源
物 理：张纪岳 张世昌 陆泉康
杨永正 赵树松
力 学：王新志 邱 荣 陈强顺
高新技术：唐建民 何景福 陈孟尧
出版界：谢世如 尧汝英 徐志东
秘 书 长：周凌云 江光佐 唐驾时

委员：

李继彬 (昆明工学院)	王 锋 (清华大学)	赵为礼 (吉林大学)
廖亮源 (孙文学院)	管克英 (北京航空航天大学)	燕居让 (山西大学)
刘西垣 (北京大学)	焦善庆 (西南交大)	张纪岳 (西北大学)
张世昌 (西南交大)	陆泉康 (复旦大学)	赵树松 (云南大学)
何大韧 (西北大学)	彭守礼 (云南大学)	王新志 (甘肃工大)
邱 荣 (福州大学)	曹盛林 (北师大)	何景福 (昆明 211 所)
王瑞章 (云南工学院)	唐建民 (第三军医大学)	杨永正 (西北大学)
郭 江 (自贡大学)	谢世如 (福建科技出版社)	江光佐 (西南交大)
兰其开 (自贡教院)	李 强 (中国工程物理研究院)	唐驾时 (湖南大学)
尧如英 (《大自然探索》)	王正荣 (北京西城电大)	张玉红 (佛山大学)
陈孟尧 (自贡大学)	郝建宇 (山西大同振华南街)	金渝光 (重庆师院)
俞允洪 (中科院数学所)	杨作东 (河南师大)	李传英 (西安交大)
徐 勇 (西南交大)	曾家刚 (西南交大)	李崇孝 (云南工学院)
郑文虎 (西昌师专)	潘留仙 (益阳师专)	林道方 (北京电力大学)

成如翼 (北京航空航天大学) 周凌云 (昆明工学院)
高素志 (北师大) 龚凤英 (河北建筑工程学院)
张绍飞 (北京航空航天大学) 姜 豪 (杭州大学)
何宗海 (西北大学) 王燕昌 (宁夏大学)
牛慧芳 (洛阳师专) 张玉珠 (山西经管学院)
张玉田 (北京邮电学院) 王 慧 (西南交大)

陈强顺 (同济大学)
朱文浩 (华中理工大学)
曾有栋 (上饶师专)
代启润 (信阳师院)
苏景顺 (河北建工学院)
徐志东 (西南交大出版社)

数学·物理·力学·高新技术研究进展

1996年 第六期

目 次

数学

奇异非线性 Robin 问题的奇摄动	赵为礼	1
二阶非线性微分方程零解的全局渐近稳定性	高素志	6
复共轭变分原理的建造及应用	柳长茂	9
拓扑熵大于零的一类 n 维自映射	金渝光	19
非负偏序 BCH—代数的性质	张冠军等	23
一类慢变系统的绝热不变量	万世栋等	26
Gauss 超几何方程的可积性与代数曲线解	成如翼等	30
非线性扰动脉冲微分系统解的估计	燕居让等	35
时变区间大系统的平稳振荡	张银萍等	38
无向简单图的一些拓扑特征的代数刻画	张绍飞	43
Lyapunov 矩阵方程与 Lyapunov 函数构造	黄力民	47
非线性方程组行处理法	杨本立	51
BCI—代数的 P —理想	姜 豪等	55
关于三阶非线性边值问题解的存在性和唯一性的注记	王国灿	59
On Rhoades' Open Questions	Lin Qihou	62
一类具有多个滞量的微分方程的周期解	李 琼等	65
广义不凸和 Kuhn—Tucker 条件	魏跃春等	70
应用随机理论确定油气藏的最佳生产井数	姚恒申等	75
受迫向日葵方程的周期解	曹进德等	80
具有振动系数的差分方程的振动性	张玉珠等	84
无穷计数序列的一个结果	张建军	88
关于一奇异积分方程的讨论	于晏悦	92
关于 Riccati 方程代数曲线解的判定	冯兆生	95
P —对称大型稀疏矩阵方程组解法	杨本立	103
关于微商应用的几点注记	邢富冲	109
二阶非线性脉冲微分方程解的渐近性	成登华等	112
函数级数的连续性定理的注记	马国祥等	114
正规子半模与商半模	曾凯平	116
自身迭代序列的敛散性及其极限的求法	田成科等	118
关于方程 $\frac{m}{n} = \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$	马国祥等	122

物理

重夸克动力学参数的味修正和质量谱	焦善庆 133
第二类三分子模型的涨落动力学	张纪岳等 137
内导体错位对腔回旋管功率和起振电流的影响	张世昌等 140
圆偏振激光场中氢原子的准能级计算	田人和等 143
原子核中的多夸克态	焦善庆等 147
受调制双光子激光通向混沌的道路	张纪岳等 152
一维经典 Kepler 问题的解	刘全慧等 157
中微子-原子核深度非弹性散射的 EMC 效应与亚夸克模型	郭江等 160
完全刚性壁的等效势	刘全慧等 166
$E/A = 35 \text{ MeV}$ 下 $^{14}\text{N} + ^{197}\text{Au}$ 反应的 Fermi-Dirac 关联	戴启润等 169
双极对板电晕放电的状态	徐国忠 173
论 Davydov 蛋白质孤子的生存临界温度	周凌云等 179
在极性晶体的非对称双立体结构中的光学声子模式	江光佐 181
一种新的用于强激光场中原子过程的微扰方法	陈宝振等 187
地球引力场对卫星有摄运动的一种计算方法	郑文虎 192
$e^- - \text{N}_2$ 散射总截面测量	王泽勇 196
二氧化硅陷阱化动力学与参量分析	刘钟毅等 199
椭圆阵列衍射光栅空间光强计算机模拟	王慧等 205
光栅衍射缺级的条件和级次	魏安赐 208
核套环模型及论证	李培官 212
密绕超导磁体的稳态稳定分析	彭海东等 219
核物理中的混沌问题	张秀荣等 224
电磁感应现象的可逆性	曹良腾 228
关于引力极限的一个推导	郝建宇 230
论介质中 $\vec{E} = \vec{E}_0/\epsilon$ 成立的放宽条件	徐志东等 233
载流闭合刚性线圈在非均匀磁场中所受磁力问题	苏景顺等 236
有心力场中二体运动轨道的矢量解法	杨万明等 239
利用能量函数处理物理问题	潘留仙 242
加速运动电荷电磁辐射研究	张永照等 245
由实验曲线求气体分子速率分布函数	马祯祥 249
关于光速 C 数值不变的一个悖论	郝建宇 252
用拉氏乘子法求刚体惯量主轴	杨波等 254
磁岛二维塌缩的时标分析	王蜀娟 257

力学

正交各向异性圆板非线性振动	王新志等	262
用理性方法建立 5 节点特殊杂交应力元	杜太生	266
静载荷作用下旋转扁壳的非线性自由振动	王永岗等	271
多级隔振系统优化设计的共轭梯度法	支希哲等	276
系数为阶变量的线性常微分方程的初值解及其在力学中的应用	王燮山等	279
非线性非完整系统相对平衡状态的稳定性	罗绍凯	285
结构动力响应计算的随机有限元直接积分方法	张森文	290
一种改进的数字散斑相关法	张东升等	298
严重循环载荷下工字形截面杆的弹塑性屈曲	揭敏等	302
用 P 型有限元分析层合板的应力	刘克成	307
斜碰撞问题的再研究	李强	311
最大主应力值及方向的最简测定法	王瑞章	316
转子系统结构动力修改的灵敏度方法	杨萍	319
质点组三大运动定理探疑	肖泰明等	323

应用技术

柴油机燃烧室内壁的温度振荡研究	焦善庆	328
双掩模法镀制超高斯激光反射镜	熊俊等	333
$C_{60}Br_{24}$ 的合成及 C_{60} 、 C_{70} 质谱峰位移移动的研究	戴剑锋	336
双离子束溅射淀积 DLC 膜的导电特性	刘贵昂	339
新颖磁冰箱热力学原理的探讨	徐志东	343
皮肤组织对激光的吸收规律要点	唐建民	346
石油工程液体表面界面特性的测试	杨永正等	348
不等辐激励平面衍射光栅三维空间光强的计算机模拟	王慧等	351
电路中互易定理的特殊证明方法	张永照等	355
COPD 患者膈肌疲劳时膈肌电图对时域和频域分析	刘刚等	357
激光全息干涉术的一个应用	崔宪普	363
超声波技术应用	焦雨	366
一种新型总线—PCI	张海林等	368
昆明亚高原气候特征对人体的作用	陈东银等	371
工程上的消震	任全年等	374

The Progress of Research for Mathematics • Physics • Mechanics and High New Technology

1996(6)

Contents

Mathematics

The Singular Perturbation of Singular Nonlinear Robin Problem	Zhao Wei li	1
On Global Asymptotic Atability of Second Order Nonlinear Differential equation	Gao Suzhi	6
On Establishing of Complex Coujugate Variational Principle and Its Applications	Liu Changmao	9
A Class of N-dimensional Self-mappings of the Topological Entropy Larger than Zero.	Jin Yuguang	19
On Properties of Non-negative Partial Ordered BCH-Algebra	Zhang Guanjum etc.	23
A Dass of Adiabatic Invariants of Slowly—Time Varying System	Wang Shidong etc.	26
The Integrability and Algebraic Curve Solution of Guass Hypergeometric Equation	Chen Ruyi etc.	30
Estimate of the Solutions of Nonlinear Perturbed Impulsive Differential Systems	Yan Jurang etc.	35
Stationary Oscillation of Time-varying System in large-scale Interval	Zhang Yinping etc.	38
The Algebraic Descriptions of Some Topological Characters for Non-oriented Simple Graph	Zhang Shaofei	43
Lyapunov Matrix Equation and the Structure of Lyapunov function	Huang Limin	47
Row Action Method for Nonlinear Equation System	Yang Benli	51
On P-Ideals of a BCI-Algebra	Jiang Hao etc.	55
Remarks on Existence and Uniqueness for Third Order Nonlinear Boundary Value Problems	Wang Guocan	59
On Rhoades Open Questions	Lin Qihou	62
On Periodic Solution of a Class of Differential Equations with Some Delayed Quantities	Li Qiong etc.	65
Generalized Invariant Convex and the Kuhn-Tucker Conditions	Wei Yaochen etc.	70
Application of Random Theory in Determining the Optimum Producing Well Numbers for oil and Gas Deposit	Yao Hengshen etc.	75

Periodic Solution of the Forced Sunflower Equation	Cao Jinde etc.	80
Oscillations of Difference Equations with Oscillating Coefficients	Zhong Yuzhu etc.	84
A Result of the Infinite Counting Sequence	Zhang Jianjun	88
On the Solutions of a Singular Integral Equation	Yu Yanyue	92
On Algebraic Curve Solution of a Class of Riccati Equation	Feng Zhaosheng	95
Solution of Linear Equation System with P-symmetric Large-scale Sparse Matrix	Yang benli	103
A Few Remarks on Applications of Derivatives	Xing Fuchong	109
Asymptotic Behavior of Solutions of Second-order Nonlinear Impulsive Differential Equations	Cheng Denghua etc.	112
Notes on Continuous Theory about Function Series	Ma Guoxiceng etc.	114
Normal Subsemimodules and Quotient Semimodules	Zeng Kaiping	116
Convergence-Divergence of Self-Iterate Sequence and Computation of its Limit	Tian chengke etc.	118
Equation $\frac{m}{n} = \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$	Ma Guoxiang etc.	122
On Difference for Consecutive Eigenvalue of Kohn-Laplacian Operator Polynomial	Guo Dinghui	126

Physics

The Flavour Correction and Mass Spectrum of Dynamic Parameters of Heavy Quark	Jiao Shanjing	133
Fluctuating Dynamics for Trimolecular Model of the Second Class	Zhang Jiyue etc.	137
Influence of Inner-rod Misalignment on Power and Starting Current in a Coaxial Cavity Cyrotron	Zhang Shichang etc.	140
Calculation for the Quasi-level of Hydrogen Atoms in the Laser Field with Circular Polarization	Tian Renhe etc.	143
The Multiquark states of Atomic Nucleus	Jiao Shanjing etc.	147
Routes Chaos for Modulated Two-Photon Lasers	Zhang Jiyue etc.	152
Solution for One-dimensional Kepler's Problem	Liu Quanhui etc.	157
The EMC Effect in Deep-inelastic Neutrino-nucleus Scattering and Subquark Model	Guo Jiang etc.	160
Equivalent Potential for Perfect Rigid Wall	Liu Quanhui etc.	166
Fermi-Dirac Correlation in $N+^{197}\text{Au}$ at $E/A=35\text{MeV}$	Dai Qi run etc.	169
Corona Regime of Dual Bar Against a Plane	Xu Guozhong	173
A method to Calculate the Perturbation of a Satellite Caused by the On Critical Temperature of Subsistence of Davydov Protein Soliton	Zhou lingyum etc.	179

Optical-Phonon Modes in Asymmetric semiconductor Double Heterostructures	Jiang Guangzuo 181
A New Perturbative Approach to Atomic processes in Strong Laser Fields	Chen Baozhen etc. 187
A Calculation Method to the Perturbation of a Satellite Caused by the Gravitation Field of the Earth.	Zheng Wenhui 192
The Measurement for $e^- - N_2$ Scattering Cross-Section	Wang Zheyong 196
The Trap Dynamic of SiO_2 and its Parameter Analysis	Liu Zhongyi etc. 199
The Computer Simulation for Diffraction Light Intensity in Elliptical Array Grating	Wang Hui etc. 205
The Condition of Order Deficiency of Grating Diffraction and Order of Order	Wei Anci 208
The Modal of Nuclear Toggle and its Identification	Li Peiguan 212
Analysis of Stability Close-packed Superconducting Magnet	Peng Haidong etc. 219
The Chaos Problem in Nuclear Physics	Zhang Xiurong etc. 224
On the Reversible of Electromagnetic Induction	Chao Liangten 228
A Derivation about Limit of Gravitation	Hao Jianyu 230
On the Extensive Condition for Holding of $\vec{E} = \vec{E}_0/\epsilon_r$ in Dielectric Media	Xu Zhidong etc. 233
The Problem of the Received Magnetic Force for Loaded Closed Rigid Coil in Inhomogeneous Magnetic field	Su Jingshun etc. 236
A Vector Solution to the two-body Moving Orbit in the Central Force Field	Yang Wanming etc. 239
Solving physical Problem Through Energy Function	Pan Liuxian 242
The Investigation for Electromagnetic Radiation of the Accelerated Electric Charge	Zhang Yongzhao etc. 245
Getting Molecular Speed Function of Gas From Experiment Curve	Ma Zhenxiang 249
A Paradox About Unchanged Light Velocity C	Hao Jianyu 252
Lagrange Multiplier Technique on Calculating Principal Axis of Inertia for a Rigid Body	Yang Bo etc. 254
Time Scale In the Two-Dimensional Collapse Process of Magnetic Islands	Wang Shujuan 257

Mechanics

The Nonlinear Vibration in Orthogonal Anisotropic Circular Plate	Wang Xingzhi etc. 262
5-Nodes Special Hybrid Stress Element by a Rational Method	Du Taisheng 266
Nonlinear Free Vibration of Shallow Shells of Revolution under the Static Loads	

.....	Wang Yonggang etc.	271
The Conjugate Gradient Method in Optimum Design of Multistage Nonvibration System	Zhi Xizhe etc.	276
The Initial Value Solutions of Linear Ordinary Differential Equations with Stepped Variables and its Applications to Mechanics	Wang Xieshan etc.	279
Stability for the Manifold of Relative Equilibrium States of Nonlinear Nonholonomic Systems	Luo shaokai	285
The Stochastic Finite Element-direct Integration Method (SFE-DI) for Dynamic Response of Structure	Zhang Shenwen	290
A Modified Digital Speckle Correlation Method	Zhang Dongsheng etc.	298
The Elastic and plastic Buckle for Spindle with I-modal Cross Section under Severe Circulating Loading	Jie Ming etc.	302
The Stress Analysis of Laminated Composite Plates with P-version Finite Element Method	Liu Kecheng	307
The Continuative Consideration on Oblique Collision of Particles	Li Qiang	311
A Simpiest Method to Determine Direction and Maximal Value of Principal Stress	Wang Ruizhang	316
The Sensitive Method for Structure Dynamic Correction in Rotar System	Yang Ping	319
The Exploration Concerning for Some Doubtful Points in the Three Theorems upon Motion of a System of Particles	Xiao Taiming etc.	323

Applied Techniques

The Research on Temperature Oscillation in the Wall of Combustion Chamber of Diesel Engine	Joan Shanqing	328
Coating super-Guass Laser Reflection Mirror by double Mask Method	Xiong Jun etc.	333
The Investigation of Synthesis of $C_{60}Br_{24}$ and of the Shift of Ms peak of C_{60} and G_{70}	Dai Jianfeng	336
Conductivity Property of DLC Films Prepared by Dual-ion Beam Sputtering Method	Liu Guiang	339
Discussions on the Thermodynamic principle for New Magnetic Refrigerator	Xu Zhidong	343
The Highlights of Absorbion Rule of Laser by Skin Organism	Tang Jianming	346
Measureing Characteristics of Liquid Surface and Interface for Petroleum Engineering	Yan Yongzheng etc.	348
The Computer Simulation for 3D Space Light Intersity Of Plan Diffraction Grating with Unequal Amplitude Impulsion	Wang Hui etc.	351
The Special Verification for the Reciprocal Law of the Electric Circuit		

.....	Zhang Yongzhao etc.	355
Time Domain and Spectral Analysis of Diaphragmatic Electromyogram		
During Fatigue in COPD Patients	Liu Gang etc.	357
An Application of Laser Hologram Interferometric Technique	Chui Xianpu	363
The Applications of Supersonic Technique	Jiao Yu	366
A New Type of Bus-PCI	Zhang HaiLing etc.	368
The Action of the Climate of Subplateau in Kunming on Human Body		
.....	Chen Dongyin etc.	371
Eliminating Vibration in Engineering	Ren Quan liang etc.	374

奇异非线性 Robin 问题的奇摄动

赵为礼

(吉林大学数学系 长春 130023)

【摘要】 本文考虑比文[1—4]所讨论的更为广泛的含小参数 $\epsilon > 0$ 的二阶非线性奇摄动 Robin 问题等。

【关键词】 非线性 奇摄动 Robin 问题

二阶非线性常微分方程奇摄动边值问题的研究,不仅在理论上具有重要意义,而且在诸如流体力学、生物化学、生态学、天体力学、理论物理、近代控制论等领域中都有着广泛的应用。对这类问题,以往大量的工作通常所研究的是当其中微分方程所含小参数为零时,方程降价的情形。

文[1—4]研究了以寻求 Poisson 方程的径向对称解为背景的二阶非线性奇摄动边值问题,其特点是当含于微分方程中的小参数为零时,方程未必降价,并且其退化问题可能在所论区间的一端点处出现奇性。这类问题的研究,是许多已有工作(例如,文[5—7])的某些结果的推广。

本文考虑比文[1—4]所讨论的更为广泛的含小参数 $\epsilon > 0$ 的二阶非线性奇摄动 Robin 问题

$$\begin{cases} a(x, y, y', \epsilon) y'' = f(x, y, y', \epsilon), & (1) \\ a_0 y(0, \epsilon) - b_0 y'(0, \epsilon) = A_0, a_1 y(1, \epsilon) + b_1 y'(1, \epsilon) = A_1, & (2) \end{cases}$$

其中, $a_i \geq 0, b_i \geq 0, A_i (i = 0, 1)$ 均为常数,且 $a_i + b_i > 0 (i = 1, 2)$ 。

当 $\epsilon = 0$ 时,边值问题(1),(2)退化为

$$\begin{cases} a(x, u, u', 0) u'' = f(x, u, u', 0), & (3) \\ a_1 u(1) + b_1 u'(1) = A_1 & (4) \end{cases}$$

我们这里所面临的问题是,不仅当 $\epsilon = 0$ 时方程(1)未必降价,而且退化问题(3),(4)以及奇摄动边值问题(1),(2)之于 $[0, 1]$ 上都可能存在多点处出现奇性。这类新的奇异非线性奇摄动 Robin 问题,似乎至今还未被讨论过。

本文讨论了边值问题(1),(2)解的存在性及其渐近估计。

设 $\epsilon_0 > 0$ 为某常数, $\Omega = [0, 1] \times \mathbb{R}^2 \times [0, \epsilon_0]$, 并且假设

H_1 , 退化问题(3),(4)存在解 $u = u(x) \in C^2[0, 1]$

H_2 , $a, a_y, a_{y'}, a_\epsilon \in C(\Omega)$, 且对每一 $\epsilon \in [0, \epsilon_0]$ 及任一函数 $y(x) \in C^1[0, 1], \int_0^1 a^{-1}(x, y(x), y'(x), \epsilon) dx < \infty$ 。此外,存在 $g(x, \epsilon) \in C^1([0, 1] \times [0, \epsilon_0])$, 使得于 Ω 上, $0 \leq a \leq g$, 且当 $(x, \epsilon) \in [0, 1] \times [0, \epsilon_0]$ 时, $g > 0$ 。

H_3 , $f, f_y, f_{y'}, f_\epsilon \in C(\Omega)$, 且当 $(x, y, \epsilon) \in [0, 1] \times \mathbb{R} \times (0, \epsilon_0)$ 时

$$f(x, y, y', \epsilon) = o(|y'|^2) \quad (|y'| \rightarrow \infty)$$

H_4 , 存在定义于 $[0, 1] \times [0, \epsilon_0]$ 上的函数 $h(x, \epsilon)$, 当 $(x, \epsilon) \in [0, 1] \times (0, \epsilon_0]$ 时, $h > 0$ 且 h_x 存在, 使得于 Ω 上, $f_y - a_y u'' \leq -h$

H_5 , 存在常数 $m, r > 0$, 使得于 Ω 上, $f_\gamma - a_\gamma u'' \geq m$, 当 $(x, \epsilon) \in [0, 1] \times (0, \epsilon_0)$ 时, $r(g^{-1}h)^2 - (g^{-1}h)' + m \geq 0$ 且 $g^{-1}h^2(r - r^2) + rg(g^{-1}h)' + m \geq 0$.

定理 1. 假设 $H_1 - H_5$ 成立, 并且当 $\epsilon > 0$ 充分小时, $a_1 - b_1 r(g^{-1}h)(1, \epsilon) \geq 0$. 则当 $\epsilon > 0$ 充分小时, 边值问题 (1), (2) 存在解 $y = y(x, \epsilon)$, 使得当 $0 \leq x \leq 1$ 时,

$$|y(x, \epsilon) - u(x)| \leq \frac{|a_0 u(0) - b_0 u'(0) - A_0|}{a_0 + b_0 r(g^{-1}h)(0, \epsilon)} \exp\{-r \int_0^x (g^{-1}h)(t, \epsilon) dt\} + C\epsilon, \quad (5)$$

其中 C 为正的常数.

证明. 根据 $H_1 - H_5$, 存在 $M > 0$, 使得当 $0 \leq x \leq 1, 0 \leq \epsilon \leq \epsilon_0$ 时,

$$|f_\gamma(x, u(x), u'(x), \epsilon) - a_\gamma(x, u(x), u'(x), \epsilon)u''(x)| < M$$

设于 $0 \leq x \leq 1, 0 < \epsilon \leq \epsilon_0$ 上,

$$\bar{\omega}(x, \epsilon) = u(x) - \frac{\rho |a_0 u(0) - b_0 u'(0) - A_0|}{a_0 + b_0 \gamma(g^{-1}h)(0, \epsilon)} \exp\{-\gamma \int_0^x (g^{-1}h)(t, \epsilon) dt\} - Mm^{-1}\epsilon,$$

$$\underline{\omega}(x, \epsilon) = u(x) + \frac{(1 - \rho) |a_0 u(0) - b_0 u'(0) - A_0|}{a_0 + b_0 \gamma(g^{-1}h)(0, \epsilon)} \exp\{-\gamma \int_0^x (g^{-1}h)(t, \epsilon) dt\} + Mm^{-1}\epsilon,$$

其中

$$\rho = \begin{cases} 0, & a_0 u(0) - b_0 u'(0) < A_0 \\ 1, & a_0 u(0) - b_0 u'(0) \geq A_0 \end{cases}$$

则可以验证, 对每一充分小的 $\epsilon > 0$, $\bar{\omega}(x, \epsilon), \underline{\omega}(x, \epsilon)$ 满足文 [8] 定理 1 (略加适当变通) 的所有条件, 于是再根据假设条件便不难证明当 $\epsilon > 0$ 充分小时, 边值问题 (1), (2) 存在满足 (5) 式的解 $y = y(x, \epsilon)$.

推论 1. 假设 $H_1 - H_5$ 成立. 若 $a_0 u(0) - b_0 u'(0) = A_0$ 或者 $b_1 = 0$, 则定理 1 的结论仍然成立.

定理 2. 假设 $H_1 - H_5$ 成立. 若 $a_1 > 0$, 且

$$\frac{(g^{-1}h)(1, \epsilon)}{a_0 + b_0 \gamma(g^{-1}h)(0, \epsilon)} \exp\{-\gamma \int_0^1 (g_0^{-1}(g^{-1}h)(t, \epsilon) dt\} = O(\epsilon) (\epsilon \rightarrow 0),$$

则定理 1 的结论仍然成立.

证明. 按假设知, 存在常数 $M_1, M_2 > 0$, 使得当 $0 \leq x \leq 1, 0 \leq \epsilon \leq \epsilon_0$ 时

$$|f_\gamma(x, u(x), u'(x), \epsilon) - a_\gamma(x, u(x), u'(x), \epsilon)u''(x)| < M_1,$$

当 $\epsilon > 0$ 充分小时,

$$\frac{mb_1 \gamma(g^{-1}h)(1, \epsilon) |a_0 u(0) - b_0 u'(0) - A_0|}{a_1 [a_0 + b_0 \gamma(g^{-1}h)(0, \epsilon)]} \exp\{-\gamma \int_0^1 (g^{-1}h)(t, \epsilon) dt\} \leq M_2 \epsilon$$

记 $M = M_1 + M_2$, 并且当 $0 \leq x \leq 1$ 及 $\epsilon > 0$ 充分小时, 仿定理 1 的证明来构造 $\bar{\omega}(x, \epsilon)$ 与

$\underline{\omega}(x, \epsilon)$. 从而, 再由假设条件并根据文 [8] 定理 1 (略加适当变通) 便可完成定理 2 的证明.

若将条件 H_4, H_5 分别更换为

H_4' 存在常数 $k > 0$, 使得于 Ω 上, $f_\gamma - a_\gamma u'' \leq -k$

H_5' 于 Ω 上, $f_\gamma - a_\gamma u'' \geq 0$, 且存在常数 $\gamma, d > 0$, 使得当 $0 \leq x \leq 1, 0 < \epsilon \leq \epsilon_0$ 时, $\gamma k + g' \geq 0$ 且

$$k(1 - \gamma) - g' \geq 0, \quad k - 4dg \geq 0$$

则我们有如下的

定理 3. 假设 $H_1 - H_3, H_4'$ 与 H_5' 成立. 若当 $\epsilon > 0$ 充分小时, $a_1 \geq b_1 \cdot \max\{krg^{-1}(1,$

$\epsilon, 2d\}$, 则当 $\epsilon > 0$ 充分小时, 边值问题 (1), (2) 存在解 $y = y(x, \epsilon)$, 使得当 $0 \leq x \leq 1$ 时,

$$|y(x, \epsilon) - u(x)| \leq \frac{|a_0 u(0) - b_0 u'(0) - A_0|}{a_0 + b_0 \gamma k g^{-1}(0, \epsilon)} \exp\{-\gamma k \int_0^x g^{-1}(t, \epsilon) dt\} + C\epsilon,$$

其中 C 为正的常数。

证明. 设 $M > 0$ 及 ρ 均为定理 1 的证明中所指出者, 且于 $0 \leq x \leq 1, 0 < \epsilon \leq \epsilon_0$ 上, 设

$$\begin{aligned} \omega &= u(x) - \frac{\rho |a_0 u(0) - b_0 u'(0) - A_0|}{a_0 + b_0 \gamma k g^{-1}(0, \epsilon)} \exp\{-\gamma k \int_0^x g^{-1}(t, \epsilon) dt\} \\ &\quad - \epsilon M (kd)^{-1} \exp\{2d(1-x)\}, \\ \bar{\omega}(x, \epsilon) &= u(x) + \frac{(1-\rho) |a_0 u(0) - b_0 u'(0)|}{a_0 + b_0 \gamma k g^{-1}(0, \epsilon)} \exp\{-\gamma k \int_0^x g^{-1}(t, \epsilon) dt\} \\ &\quad + \epsilon M (kd)^{-1} \exp\{2d(1-x)\} \end{aligned}$$

则类似于定理 1 的证明便不难推断定理 3 的结论。

推论 2. 假设 H_1-H_3, H_4' 与 H_5' 成立, 若 $a_0 u(0) - b_0 u'(0) = A_0$ 且 $a_1 \geq 2b_1 d$, 则定理 3 的结论仍然成立。

现将条件 H_5 更之为

H_5'' 存在常数 $m, \gamma > 0$ 以及定义于 $[0, 1] \times (0, \epsilon_0]$ 上关于 x 都可导的非负函数 $p(x, \epsilon)$ 与正值有界函数 $q(x, \epsilon)$, 使得于 Ω 上, $|f, -a, u''| \leq m$, 当 $(x, \epsilon) \in [0, 1] \times (0, \epsilon_0]$ 时, $(g^{-1}h - p)' - \gamma(g^{-1}h - p)' - \gamma^2 g(g^{-1}h - p)^2 + \gamma h(g^{-1}h - p) - m \geq 0$,
 $g(q' - q^2) + hq - m \geq 0$

定理 4. 假设 H_1-H_4 与 H_5'' 成立. 若 $b_1 = 0$, 则当 $\epsilon > 0$ 充分小时, 边值问题 (1), (2) 有解 $y = y(x, \epsilon)$, 使得当 $0 \leq x \leq 1$ 时,

$$|y(x, \epsilon) - u(x)| \leq \frac{|a_0 u(0) - b_0 u'(0) - A_0|}{a_0 + b_0 \gamma (g^{-1}h - p)(0, \epsilon)} \exp\{-\gamma \int_0^x (g^{-1}h - p)(t, \epsilon) dt\} + C\epsilon,$$

其中 C 为正的常数

证明. 设 $M > 0$ 及 ρ 均为定理 1 的证明中所指出者, 且于 $0 \leq x \leq 1, 0 < \epsilon \leq \epsilon_0$ 上, 令

$$\begin{aligned} \omega(x, \epsilon) &= u(x) - \frac{\rho |a_0 u(0) - b_0 u'(0) - A_0|}{a_0 + b_0 \gamma (g^{-1}h - p)(0, \epsilon)} \exp\{-\gamma \int_0^x (g^{-1}h - p)(t, \epsilon) dt\} \\ &\quad - \epsilon M m^{-1} (\exp\{\int_x^1 q(t, \epsilon) dt\} - 1), \\ \bar{\omega}(x, \epsilon) &= u(x) + \frac{(1-\rho) |a_0 u(0) - b_0 u'(0) - A_0|}{a_0 + b_0 \gamma (g^{-1}h - p)(0, \epsilon)} \exp\{-\gamma \int_0^x (g^{-1}h - p)(t, \epsilon) dt\} \\ &\quad + \epsilon M m^{-1} (\exp\{\int_x^1 q(t, \epsilon) dt\} - 1) \end{aligned}$$

则仿定理 1 的证明便可得到定理 4 的结论。

注 1. 对于我们所讨论的这类一般奇异非线性微分方程的奇摄动 Robin 问题, 似乎不可能得到其解的微商的渐近估计式。

注 2. 仔细分析文 [8] 定理 1 的证明, 并根据 [9, Heidel 定理], 上述结果的假设条件 H_5 都可以改进为: $f, f_y, f_{yy}, f_{yy'} \in C(\Omega)$, 且当 $\epsilon > 0$ 充分小, $0 \leq x \leq 1, \omega(x, \epsilon) \leq y \leq \bar{\omega}(x, \epsilon)$ 时,

$$f(x, y, y', \epsilon) = O(|y'|^2) \quad (|y'| \rightarrow \infty),$$

其中, $\omega(x, \epsilon)$ 与 $\bar{\omega}(x, \epsilon)$ 为相应结果的证明中所指出者。

下面我们举例说明本文结果的应用

例 1 考虑方程

$$2(\varepsilon x)^{1/2} y'' = (\varepsilon y^2 + m)y - (\varepsilon \arctg(y'))^2 + k)y' - \varepsilon(x^5 + 1) \quad (6)$$

之满足条件(2)的边值问题, 其中 $m \geq 0, k > 1$ 均为常数.

首先讨论 $m > 0$ 的情形.

此时边值问题(6), (2)的退化问题

$$ku' - mu = 0, \quad a_1 u(1) + b_1 u'(1) = A_1$$

的解为 $u = A_1(a_1(a_1 + b_1 mk^{-1}))^{-1} \exp\{mk^{-1}(x-1)\}$, 则不难验证(于 H_2, H_4 中分别有 $g(x, \varepsilon) = x + \varepsilon, h(x, \varepsilon) = k$, 并于 H_5 中 $\gamma_1 = k^{-1}$) 条件 H_1-H_5 成立. 于是, 若 $a_1 \geq b_1(k-1)$ 或 $A_1(a_0 m^{-1}k - b_0) \exp\{-mk^{-1}\} - A_0(a_1 m^{-1}k + b_1) = 0$ 或 $b_1 = 0$, 则根据定理 1 与推论 1 可知, 当 $\varepsilon > 0$ 充分小时, 边值问题(6), (2)存在解 $y = y(x, \varepsilon)$, 使得当 $0 \leq x \leq 1$ 时,

$$|y(x, \varepsilon) - u(x)| \leq \frac{\varepsilon |A_1(a_0 m^{-1}k - b_0) \exp\{-mk^{-1}\} - A_0(a_1 m^{-1}k + b_1)|}{[a_0 \varepsilon + b_0(k-1)](a_1 m^{-1}k + b_1)} \left(\frac{\varepsilon}{x + \varepsilon}\right)^{k-1} + c_1 \varepsilon \quad (7)$$

其中 $c_1 > 0$ 为常数; 若 $b_0 \neq 0$ 或 $k \geq 2$, 则根据定理 2, 当 $\varepsilon > 0$ 充分小时, 边值问题(6), (2)有解 $y = y(x, \varepsilon)$, 使得当 $0 \leq x \leq 1$ 时, (7) 式成立.

其次讨论 $m = 0$ 的情形.

此时边值问题(6), (2)(其中 $a_1 > 0$) 的退化问题

$$u' = 0, \quad a_1 u(1) + b_1 u'(1) = A_1$$

的解为 $u = a_1^{-1} A_1$, 则可以验证(于 H_5' 中取 $\gamma = 1 - k^{-1}, d = k/8$) 条件 H_1-H_3, H_4' 与 H_5' 成立. 于是, 若 $a_1 \geq b_1 \cdot \max\{k-1, k/4\}$ 或者 $a_0 a_1^{-1} A_1 - A_0 = 0, a_1 \geq b_1 k/4$, 则根据定理 3 与推论 2, 当 $\varepsilon > 0$ 充分小时, 边值问题(6), (2)存在解 $y = y(x, \varepsilon)$, 使得当 $0 \leq x \leq 1$ 时,

$$|y(x, \varepsilon) - u(x)| \leq \frac{\varepsilon |a_0 a_1^{-1} A_1 - A_0|}{a_0 \varepsilon + b_0(k-1)} \left(\frac{\varepsilon}{x + \varepsilon}\right)^{k-1} + C_2 \varepsilon$$

其中 $c_2 > 0$ 为常数.

例 2 考虑方程

$$\begin{aligned} & (1/4)(x^2 + 3\varepsilon)^{1/2} \{2 + \arctg[\varepsilon(y^2 + y')]\} y'' \\ & = 5x + (\exp\{-\varepsilon y^2\} - 1)y/2 - [\varepsilon(y')^{q/2} + 5]y' \end{aligned} \quad (8)$$

之满足条件(2)(其中 $b_1 = 0$) 的边值问题, 则 $u = x - 1 + A_1/a_1$ 是边值问题(8), (2)的退化问题

$$xu'' + 10u' = 10x, \quad a_1 u(1) = A_1$$

的解, 易见此于 H_2, H_4, H_5'' 中依次有 $g(x, \varepsilon) = x + \varepsilon, h(x, \varepsilon) = 5, m = 2$. 若再于 H_5'' 中取 $\gamma = 2/5, p = 0, q = 2$, 则根据定理 4 便知, 当 $\varepsilon > 0$ 充分小时, 边值问题(8), (2)存在解 $y = y(x, \varepsilon)$, 使得当 $0 \leq x \leq 1$ 时,

$$|y(x, \varepsilon) - u(x)| \leq \frac{\varepsilon |a_0 A_1 - a_1 A_0 - a_0 a_1|}{a_1(a_0 \varepsilon + 2b_0)} \left(\frac{\varepsilon}{x + \varepsilon}\right)^2 + c\varepsilon,$$

其中 $c > 0$ 为常数.