典型羣的几何学

J. 狄多涅著

科学出版社

J. DIEUDONNÉ

LA GÉOMÉTRIE DES GROUPES CLASSIQUES

SPRINGER-VERLAG

1955

內 容 簡 介

本书主要包括任意体上的典型羣的构造，典型羣的自同构及同构，以及矩陣几何学三方面的內容，特别是近十几年来这些方面的成果．书中对这三部分的結果叙述比較完备，而且对主要結果都給出完全的或至少是綱領性的証明．书末附有較詳細的参考文献．本书对于想了解这方面成果的数学工作者是方便的，对于从事这方面研究的数学工作者更是有帮助的．

典 型 羣 的 几 何 学

J. 狄 多 涅 著

万 哲 先 譯

科 学 出 版 社 出 版 （北京朝阳門大街 117 号）

北京市书刊出版业营业許可証出字第 061 号

中国科学院印刷厂印刷　新华书店总經售

1960 年 7 月第 一 版　书号：2227　字数：116,000

1960 年 7 月第一次印刷　开本：787×1092 1/27

（京）00001—11,500　印张：5 1/3

定价：0.66 元

序　　言

本书所闡述的理論中絕大部分是过去本丛书[1]中出版过的范德威尔登 (B. L. van der Waerden)：綫性变换羣 (Gruppen von Linearen Transformationen)一书第一部分所討論的对象。 二十年来在这方面所发表的論文之多反映了这个理論的領域之广，而这些論文又在很多方面使已往研究这些問題的观点趋于融合。另一方面，在我們所指出的范围里，給出目前已經得到的比上书中更为完整的証明似乎是不成問題了，至少由此指明一些原則常是可能的。

在綫性变换羣中，本书只考虑到所謂“典型羣”[2]，而所研究的問題只是羣論中的“初等”部分，即主要围繞子羣和同态这两个概念的那一部分。这个理論牽涉到比較复杂的概念的那些部分，例如这些羣的綫性表示論或它們的拓扑或微分几何的研究，并不包括在本书中；在証明中牽涉到的唯一常用工具几乎就是綫性代数，但卻是在几何語言和概念的強烈影响下綫性代数所采取的形式。

J. 狄多涅

爱范斯頓，1954年10月1日。

---

1) 指“Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete”(数学及其边緣部門的結果)丛书——譯者注。

2) 关于不包括在本书范围内的“例外”羣方面近来的重要工作，可以参考富莱登塔尔 (H. Freudenthal)[1,2,3]，梯茨(J. Tits)[3]及薛佛侶(C. Chevalley)[3,4,5]。

目　录

第一章　直射变换与对射变换

§1. 綫性映射与半綫性映射

我們假定讀者已經熟知綫性代数的基本概念与一些初等結果（例如，見布巴基（N. Bourbaki）[1]；我們采用这本书的符号）．除非另有声明，我們永远把向量空間了解为（交換的或非交換的）体[1] K 上有限維的右向量空間 E．

設 K 和 K' 是两个体，而 σ 是从 K 到 K' 之上的一个同构映射；設 E 是 K 上的向量空間，F 是 K' 上的向量空間．从 E 到 F 之中的一个对于同构 σ 的半綫性映射是由 E 到 F 之中的一个映射而具有性質

$$u(x+y)=u(x)+u(y) \qquad \text{对于 } x\in E,\ y\in E,$$
$$u(x\lambda)=u(x)\lambda^{\sigma} \qquad \text{对于 } x\in E,\ \lambda\in K.$$

E 的一个子空間在 u 之下的象是 F 的一个子空間；F 的一个子空間在 u 之下的反象是 E 的一个子空間．u 的秩定义为 $u(E)$ 的維数，它也等于 u 的核 $u^{-1}(0)$ 的反維数．

設 K'' 是第三个体，τ 是从 K' 到 K'' 之上的一个同构映射；設 G 是 K'' 上的一个向量空間，v 是从 F 到 G 之中的一个对于同构 τ 的半綫性映射，那么 $w=vu$ 就是从 E 到 G 之中的一个对于从 K 到 K'' 之上的同构 $\sigma\tau$ 的半綫性映射．如果 u 是从 E 到 F 之上的一个一一映射，u^{-1} 就是从 F 到 E 之上的一个对于同构 σ^{-1} 的半綫性映射．

如果 $K'=K$，那么从 E 到 F 之中的綫性映射只不过是一个对于 K 的单位自同构的半綫性映射．

---

1) 我們約定，体中的乘法不一定交換．如果体中的乘法滿足交換律，我們就說这个体是域．如果一个体不是域，那么它的乘法一定不可換——譯者注．

設 $(a_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ 是 E 的一組基，从 E 到 F 之中的一个半綫性映射 u 只要給了同构 σ 和 F 中的元素 $z_i = u(a_i)$ 就完全确定了. 实际上，对于 $x = \sum_{i=1}^{n} a_i\xi_i$，我們有 $u(x) = \sum_{i=1}^{n} z_i\xi_i^{\sigma}$. 如果 $(b_j)_{1\leqslant j\leqslant m}$ 是 F 的一組基，而 $z_i = u(a_i) = \sum_{j=1}^{m} b_j\alpha_{ji}$，那么映射 u 由 m 行 n 列的矩陣 $A = (\alpha_{ij})$ 所确定，我們把这个矩陣称为 u 对于基 (a_i) 和 (b_j) 的矩陣. 如果 u 是从 E 到 F 之上的一个一一映射(当 $m = n$ 时)，那么 u^{-1} 对于基 (b_j) 和 (a_i) 的矩陣就是 $(A^{-1})^{\sigma^{-1}}$. 如果 v 是从 F 到 G 之中的一个对于同构 τ 的半綫性映射，而 B 为 v 对于 F 的基 (b_j) 和 G 的基 (c_k) 的矩陣，那么 vu 对于基 (a_i) 和 (c_k) 的矩陣就是 $B \cdot A^{\tau}$.

我們把从体 K 上的向量空間 E 到它自身之上的一个半綫性映射称为 E 的**直射变换**. E 的一切直射变换組成一羣，显然 K 上两个同一維数的向量空間的直射变换羣同构. 于是我們用 $\Gamma L_n(K)$ 表 K 上选定的一个 n 維向量空間 E (例如 K^n 就可以看作 K 上的一个右向量空間)的直射变换羣.

对于 K 中的一切 $\alpha \neq 0$，映射 $x \to x\alpha$ 是一个对于 K 的內自同构 $\xi \to \alpha^{-1}\xi\alpha$ 的直射变换 h_α; 我們把 h_α 称为对于 α 的**位似变换**. 一切位似变换組成 $\Gamma L_n(K)$ 的一个正規子羣 H_n，而 $\alpha \to h_\alpha$ 是从体 K 的乘法羣 K^* 到羣 H_n 之上的一个**反同构**. 位似变换可以刻划作将 E 中維数 k 的一切子空間都保持不变的直射变换 (对于任意一个 k 的值，$1 \leqslant k \leqslant n$).

E 的直射变换中的那些**綫性映射**[1]組成 $\Gamma L_n(K)$ 的一个正規子羣 $GL_n(K)$，称为**体 K 上 n 个变数的一般綫性羣**; 而它同构于体 K 上 n 級可逆矩陣所組成的乘法羣. 子羣 H_n 和 $GL_n(K)$ 在 $\Gamma L_n(K)$ 中互为**中心化子**(見第二章 §1)，它們的交 Z_n 是它們的公

---

1) 我們也把从 E 到 F (同一体 K 上的向量空間) 之上的一一綫性映射称为从 E 到 F 之上的一个同构，那么 $GL_n(K)$ 的元素就是向量空間 K^n 的自同构.

共中心，由中心位似变換 $x\to x\gamma$ 所組成，其中 γ 跑过体 K 的中心 Z 的乘法羣 Z^*，而 Z^* 与 Z_n 同构.

如果 V 和 W 是 E 的同一維数的两个向量子空間，那么永远存在一个綫性变換 $u\in GL_n(K)$，使得 $u(V)=W$. 換言之，对于任何 r，$1\leqslant r\leqslant n-1$，羣 $GL_n(K)$ 传递地作用在全体 r 維子空間所組成的集上.

对于任何直射变換 u，設 $\varphi(u)$ 是它所对应的 K 的自同构，映射 $u\to\varphi(u)$ 就是从 $\Gamma L_n(K)$ 到体 K 的自同构羣 A 之上的一个同态. 这个同态的核是 $GL_n(K)$，因此 $\Gamma L_n(K)/GL_n(K)\cong A$.

商羣 $P\Gamma L_n(K)=\Gamma L_n(K)/H_n$ 可以看作体 K 上 $n-1$ 維的右射影空間 $P(E)=P_{n-1}(K)$（可以将它看作 E 的一切直綫所組成的空間）的射影直射变換羣，我們以 $u\to\bar{u}$ 表从 ΓL_n 到 $P\Gamma L_n$ 之上的自然同态. 对于一个射影直射变換 $\bar{u}$，不只是对应着 K 的一个同构 σ，而是对应着 K 的自同构羣 A 对于它的内自同构羣 I（与 K^*/Z^* 同构）的一个陪集 $\bar{\sigma}=\bar{\varphi}(u)$，$\bar{\varphi}$ 是从 $P\Gamma L_n(K)$ 到 A/I 之上的一个同态，它的核是 $P_{n-1}(K)$ 到它自身之上的射影綫性映射所組成的羣 $PGL_n(K)=GL_n(K)/Z_n$（K 上 n 个变数的一般射影羣）；由此推出 $P\Gamma L_n(K)/PGL_n(K)\cong A/I$.

§2. 伸縮变換与平延

此地不拟接触任意体 K 上的向量空間 E 中的直射变換的分类問題，我們只說一下这个問題就是要給出何时两个直射变換 u 和 v 具有关系 $v=tut^{-1}$，而 $t\in GL_n(K)$ 的判断标准. 关于交換域 K 和綫性映射 u，这个問題已由古典的初等因子理論所解决（例如見 N. 布巴基(Bourbaki)[2]）. N. 賈柯勃逊(Jacobson)[1,2 和 3]，T. 納卡亚馬 (Nakayama)[1,2]，K. 阿薩諾 (Asano) 与 T. 納卡亚馬 (Nakayama)[1]和 J. 哈恩杰斯(Haantjes)[1]将这个理論推广到任意直射变換去. 在这里只考察以后我們要用到的一些特殊情形.

設 V 和 W 是 E 的两个維数分别为 p 和 $n-p(1\leqslant p<n)$ 的互补子空間，将 V 和 W（整体地）保持不变的 E 的直射变換 u 由它

对于V和W的限制v和w所决定;这种直射变换組成一羣,与直乘积$\Gamma L_p(K)\times\Gamma L_{n-p}(K)$的一个子羣同构,它由对应于$K$中相同的自同构的那些$v$和$w$所組成的元素对$(v, w)$所組成. 显然这个子羣包含将$V$和$W$保持不变的那些綫性直射变换所組成的羣$GL_p(K)\times GL_{n-p}(K)$,这是它的一个正規子羣.

采用同样的記号,我們現在来研究将V中每个元素都保持不变的直射变换u,显然u一定是綫性的,而且由它在V的一个补空間W上的限制所决定. 对于$x\in W$,我們可以写$u(x)=v(x)+w(x)$,其中$v(x)\in V$而$w(x)\in W$,v是从W到V之中的一个綫性映射,w是从W到它自身之上的一个綫性映射. 綫性映射v和w依賴于V的补空間W的选取,但是过渡到商空間去,w就誘导出从E/V到它自身之上的一个綫性映射,而这个綫性映射只依賴于u.

我們来研究$p=n-1$这个更特殊的情形.換言之,V是一个已知超平面的情形. 設$W=aK$是与V互补的一条直綫,并假設$w(a)=a\alpha$,元素$\alpha\in K^*$并不由u完全决定,而是α的共軛$\lambda\alpha\lambda^{-1}$所組成的共軛类$\dot{\alpha}$由$u$所完全决定. 有两个情形需要分别研究,即$\dot{\alpha}$化为或不化为$K$的单位元素1这两个情形. 如果$\dot{\alpha}\neq\{1\}$,我們就說$u$是一个伸縮变换;这时我們容易証明存在着一条而且是唯一的一条与V互补的直綫$W_0=a_0K$被u(整体地)不变. 如果$\dot{\alpha}=\{1\}$而u不是单位元素,我們就說u是一个以V为超平面的平延,那么对于一切$x\in E$,我們可以写$u(x)=x+a\rho(x)$,其中ρ是E上的一个綫性型而具有性質$V=\rho^{-1}(0)$. 同时$a\in V$. ρ和a并不完全由u所决定,我們可以用$\lambda\rho$, $\lambda\in K^*$,来代替ρ而同时用$a\lambda^{-1}$来代替a,子空間$V_0=aK\subset V$称为平延u的直綫. 这时沒有被u保持不变而不属于V的直綫.

以V为超平面的那些伸縮变换和平延加上单位元素就組成$GL_n(K)$的一个子羣$D(V)$,以V为超平面的那些平延加上单位元素就組成$D(V)$的一个正規阿倍尔子羣,而这个羣与V的加法羣,即K^{n-1}同构;商羣$D(V)/T(V)$与乘法羣K^*同构. 如果在射

影空間 $P_{n-1}(K)$ 中将对应于 V 的超平面取作"无穷远超平面"，羣 $D(V)$ 和 $T(V)$ 就有簡单的几何解释；这时 $D(V)$ 就是 K^{n-1} 中将每条直綫都变成与它自己平行的一条直綫的仿射变换所組成的羣，而 $T(V)$ 就是 K^{n-1} 中的平移羣.

两个伸縮变換（或 $D(V)$ 中的两个伸縮变換）在 $GL_n(K)$ 中共軛（或在 $D(V)$ 中共軛），当且仅当它們对应于 K^* 中的同一个共軛元素类 $\dot{\alpha}$. 任意两个平延永远在 $GL_n(K)$ 中共軛（$n \geqslant 2$），$T(V)$ 中的两个平延在 $D(V)$ 中共軛，当且仅当它們对应于同一条直綫 $V_0 \subset V$.

一个綫性变換 $v \in GL_n(K)$ 与一个平延 $u \in T(V)$ 交換的充分必要条件是：1° $v(V) = V$；2° $v(V_0) = V_0$（V_0 是对应于 u 的直綫）；3° 如果 $u(x) = x + a\rho(x)$ 而 $v(a) = a\lambda$，則 $\rho(v(x)) = \lambda\rho(x)$. 两个平延相交換的充分必要条件是它們每一个的直綫都包在另外一个的超平面之中. 羣 $T(V)$ 在羣 $GL_n(V)$ 中的中心化子是（直）乘积 $Z_nT(V)$. 实际上，这样的一个变換 u 将超平面 V 保持不变，而它对于 V 的限制将 V 中的直綫都保持不变，那么这个限制就是一个中心位似变換 h_γ 对于 V 的限制（第二章 § 1）. 由此推出 $h_\gamma^{-1}u$ 是一个以 V 为超平面的伸縮变換或平延，而我們容易看到它只能是平延.

§ 3. 对合与半对合

羣 $GL_n(K)$ 中的对合是綫性变換 u 具有性质 $u^2(x) = x$ 者（我們也把它写作 $u^2 = 1$），这样一个綫性变換的形状随着体 K 的特征数 $\neq 2$ 或等于 2 而有所区别：

1° 如果 K 的特征数 $\neq 2$，E 就是两个子空間 U^+，U^-（可能化为 0）的直接和而 $u(x) = x$ 当 $x \in U^+$，$u(x) = -x$ 当 $x \in U^-$；我們把 U^+ 和 U^- 分别称为对合 u 的正子空間和負子空間. 如果 $\dim(U^+) = p$，我們还把 u 称为一个 $(p, n-p)$ 型的对合（或一个 $(p, n-p)$-对合）. $(p, n-p)$ 型对合或 $(n-p, p)$ 型对合（$p \leqslant n/2$）在 $PGL_n(K)$ 中的象称为 p-对合.

2° 如果K的特征数等于2，我們就有$u(x)=x+v(x)$，其中v是一个綫性变换具有性質$v^2=0$；换言之，$v(E)\subset v^{-1}(0)$．我們仍把$v^{-1}(0)$和$v(E)$称为对合u的子空間．如果$\dim(v(E))=p$，我們必需有$\dim(v^{-1}(0))=n-p$，因而$2p\leqslant n$．我們仍把u称为$(p, n-p)$型的对合或$(p, n-p)$-对合，而把它在$PGL_n(K)$中的象称为p-对合．特别，$(1, n-1)$型的对合只不过是平延（§ 2）．

我們說一个直射变换$u\in\Gamma L_n(K)$是一个半对合，如果它所对应的射影直射变换$\bar{u}$是$P\Gamma L_n(K)$中的一个对合；这就是說，如果$\bar{u}^2=1$，即$u^2(x)=x\gamma$，而$\gamma\in K^*$，对一切$x\in E$，又若σ是对应于u的K的自同构，那么将$u^3(x)$用两种方式表出，我們就得到条件

$$\gamma^\sigma=\gamma. \tag{1}$$

将$u^2(x\xi)$用两种方式表出，于是得到条件

$$\xi^{\sigma^2}=\gamma^{-1}\xi\gamma \tag{2}$$

对一切$\xi\in K$．这样，我們分别研究下面这两个情形：

A) γ不是形状$\lambda\lambda^\sigma$（而$\lambda\in K$）的元素．这时我們能够定义K的一个二次扩张K_0，它是K的一个扩张，在K上的（左及右）維数等于2，在K上有一組（左及右）基由1和一个元素ρ所組成而$\rho^2=\gamma$及$\eta\rho=\rho\eta^\sigma$对一切$\eta\in K$[1]．然后我們可以在E上定义一个在K_0上的右向量空間的結构如下：对于$\zeta=\xi+\rho\eta\in K_0$（$\xi\in K$, $\eta\in K$），令$x\zeta=x\xi+u(x)\eta$，那么E在K_0上的維数就是$n/2$，这附带也証明了在这个情形n一定是偶数（参看 J. Dieudonné[14][2]）．

B) $\gamma=\lambda\lambda^\sigma$而$\lambda\in K$，这时令$v(x)=u(x)\lambda^{-1}$，它是一个对于自同构$\tau$的半对合而$\xi^\tau=\lambda\xi^\sigma\lambda^{-1}$；同时我們有$v^2(x)=x$，$\xi^{\tau^2}=\xi$．設$K_1$是$K$中被$\tau$所不变的那些元素所組成的子体，那么有两个可能的情形：

---

1) 我們看到，既使K本身是域，如果σ不是单位自同构，那么K_0也是一个非交换的体；于是在我們的理論中引进非交換体的必要性就显然了．

2) 这篇論文的178—179頁所給出的体K_0的存在性的証明对于任何特征数的体K都可以应用，但是如果K的特征数是2而σ将K的中心中的每个元素都保持不变，这时K的扩张K_0就在K上不正規．

B1) $K_1 = K$, 即 τ 是单位自同构, 那么 v 就是 $GL_n(K)$ 中的一个对合. 在上面我們已經求得这样一个直射变换的一般形状;

B2) K 是 K_1 的一个二次扩张, 这时 E 就是 K_1 上的一个 $2n$ 維的右向量空間; 将 v 看作这个向量空間的一个綫性变换, 它就是 $GL_{2n}(K_1)$ 中的一个对合. 如果 K 的特征数 $\neq 2$, K 在 K_1 上就有一組由1和一个元素 ρ 所組成的基, $\rho^2 \in K_1$, $\rho^\tau = -\rho$; E 就是对于 v 的 (K_1 上的) 两个子空間 V^+ 和 V^- 的直接和. 因为 $v(x\rho) = -v(x)\rho$, 所以直射变换 $x \to x\rho$ 将 V^+ 变到 V^-, 因之 V^+ 和 V^- 有相同的維数 n, 而 V^+ 在 K_1 上的一組基 $(e_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ 也就是 E 在 K 上的一組基具有性质 $u(e_i) = e_i\lambda$ 对于 $1 \leqslant i \leqslant n$.

如果 K 的特征数等于 2, K 就在 K_1 上有一組由 1 和一个元素 θ 所組成的基, $\theta^2 + \theta = \beta \in K_1$ 而 $\theta^\tau = \theta + 1$; 我們可以写 $v(x) = x + w(x)$ 而 $w(E) \subset w^{-1}(0) = V$, 同时如果 p 是 $w(E)$(在 K_1 上) 的維数, 那么 $p \leqslant n$. 容易驗証 $w(x\theta) = w(x)\theta + w(x) + x$, 那么, 如果 $x \in V$, 則 $w(x\theta) = x$; 又因为 $w(V\theta)$(在 K_1 上) 的維数頂多等于 $w(E)$ 的維数, 我們一定有 $p = n$ 而 $w(E) = V$. 此外, 因为 $x \to x\theta$ 是一个直射变换, 所以 $V\theta$ (在 K_1 上) 的維数就等于 V 的維数, 因而等于 n; 又因为 $V \cap (V\theta) = \{0\}$, 所以 V 和 $V\theta$ 互补. 最后这就証明了, 如果 $(e_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ 是 V 在 K_1 上的一組基, 那么它也是 E 在 K 上的一組基而具有性质 $u(e_i) = e_i\lambda$ 对于 $1 \leqslant i \leqslant n$. 因此这时的結果与 K 的特征数 $\neq 2$ 的情形一样.

§4. 射影对合的中心化子

設 $\bar{u}$ 是 $P\Gamma L_n(K)$ 中的一个对合, 我們要研究 $\bar{u}$ 在 $P\Gamma L_n(K)$ 中的中心化子 $\bar{H}$, 即与 $\bar{u}$ 相交换的射影直射变换 $\bar{v}$ 所組成的羣. 同样要研究对应于 $\bar{v}$ 的那些 $v \in \Gamma L_n(K)$ 所組成的子羣 H. 这样的一个直射变换 v 由与 u"射影可换"这个性质所刻划, 即 $v(u(x)) = u(v(x))a$ 对于一个 $a \in K$, 这个关系式也可以簡記作 $vu = uv \cdot a$. 如果 σ 和 τ 分别是对应于 u 和 v 的 K 的自同构, 那么在上面的关系式中用 $x\xi$ 来代替 x, 我們首先得到条件

$$\xi^{\sigma\tau} = a^{-1}\xi^{\tau\sigma}a \tag{3}$$

对一切 $\xi \in K$(我們令 $\xi^{\sigma\tau} = (\xi^{\sigma})^{\tau}$). 如果 $u^2(x) = x\gamma$, 我們还有条件(1)和(2);此外,将 $u(v(u(x)))$ 用两种方法表出,我們就得到条件

$$\gamma^{-1}\gamma^{\tau} = a^{\sigma}a. \tag{4}$$

我們再注意,为了研究起初的問題,可以随意用 $u\cdot\alpha$ 和 $v\cdot\beta$ 去代替 u 和 v, 而 α 和 β 是 K^* 中的任意元素; 这样 a 就被 $\alpha^{-1}\beta a\alpha^{\tau}\beta$ 所代替. 而 γ 就被 $\gamma\alpha^{\sigma}\alpha$ 所代替. 与 §3 的討論相一致, 我們仍然分別研究下面这几种情形(我們仍采用 §3 的記号):

A) γ 不是形状 $\lambda\lambda^{\sigma}(\lambda \in K)$ 的元素. 将 E 看作是 K_0 上 $n/2$ 維的向量空間, 我們就看到 u 变成了直射变换 $x \to x\rho$; 由于关系式(3)和(4)成立,我們可以把 K 的自同构 τ 扩张成 K_0 的一个自同构 τ 使得 $\rho^{\tau} = \rho a$, 那么条件 $v(x\rho) = v(x)\rho a$ 可以写作 $v(x\rho) = v(x)\rho^{\tau}$, 换言之 v 是K_0上的向量空間 E 的一个对于自同构 τ 的直射变换. 反之,要使这样一个直射变换 v 与 u 射影可换,必須而且只須它所对应的 K_0 的自同构 τ 适合下面两个条件: 1° 它将K(全局地)保持不变; 2° $\rho^{\tau} = \rho a$, $a \in K$. 于是羣H就是 $\Gamma L_{n/2}(K_0)$ 的一个子羣, 由那些对应于适合上面两个条件的自同构 τ 的直射变换所組成. 我們注意,H 永远包有一般綫性羣 $GL_{n/2}(K_0)$, 而它是 H 的正規子羣.

B) $\gamma = \lambda\lambda^{\sigma}, \lambda \in K^*$. 用 $u \cdot \lambda^{-1}$ 去代替 u, 就化为 $\gamma = 1$ 而 $\sigma^2 = 1$ 的情形.

B1) 首先假定 σ 是单位自同构, 这时条件(4)給出 $a^2 = 1$, $a = \pm 1$.

α) 首先假定 K 的特征数 $\neq 2$. 如果 $vu = uv$, 我們就有 $v(U^+) = U^+$, $v(U^-) = U^-$,而且反之亦然. 如果 $vu = -uv$, 我們就有 $v(U^+) = U^-$, $v(U^-) = U^+$, 这只在 $n = 2p$ 而 u 是一个 (p, p)-对合时才是可能的. 因此,如以 H_0 表 u 在 $\Gamma L_n(K)$ 之中的中心化子, 則 H_0 在 H 中的指数是 1 或 2, 第二个情形只在 u 是一个 (p, p)-对合时才发生. 至于 H_0, 它同构于直乘积 $\Gamma L_p(K) \times$

$\Gamma L_{n-p}(K)$(如果 u 是一个 $(p, n-p)$-对合)的一个子羣,而由对应于K中相同的自同构的那些 v_1 和 v_2 所組成的元素对 (v_1, v_2) 所組成;羣积 $GL_p(K) \times GL_{n-p}(K)$ 是 H_0 的一个正規子羣.

β) 現在假定K的特征数等于 2, 我們有 $u(x) = x + w(x)$, 而 $w(E) \subset w^{-1}(0) = U$. 令 $p = \dim w(E)$, u 在 $\Gamma L_n(K)$ 中的中心化子H也是w在 $\Gamma L_n(K)$ 中的中心化子, 于是一切 $v \in H$ 都使 U 和 $w(E) = W$ 全局地不变. 設 H_0 是 H 的一个正規子羣,它由在商空間 E/U 上誘导出的半綫性映射是单位映射的那些 v 所組成,那么 v 必須是綫性的. 假定 U' 是U在E中的补空間,而对于一切 $v \in H$ 和一切 $x \in U'$ 令 $v(x) = v_1(x) + v_2(x)$,其中 $v_1(x) \in U'$ 而 $v_2(x) \in U$. 我們应該有 $w(v_1(x)) = v(w(x))$ 对于 $x \in U'$, 因此当 v_1 已知时, v 在 $W = w(U')$ 中就完全确定而在 W 对于U的一个补空間 W' 中可以任意选取只要使得将 W' 映到U中就行,于是首先我們看到 H/H_0 与 $\Gamma L_p(K)$ 同构. 在 H_0 中有一个正規子羣 H_1,它是由将U中每个元素都保持不变的 v 所組成的,容易看到它与加法羣 $K^{p(n-p)}$ 同构;另一方面,如果 $v \in H_0$, 我們就有 $v(x) = x$ 在 W 中,而且反之亦然.由此容易推出,在 H_0 的模 H_1 的每个倍集之中,都有一个 v 使得 $v(x)=x$ 在 $U'+W$ 中;因此 H_0/H_1 与 $v \in H^0$ 对于子空間U的限制所組成的羣 H_0' 同构. 設 H_2' 是由 H_0' 中将U的模W的每个倍集都保持不变的 v' 所組成的正規子羣, 我們很容易驗証 H_0'/H_2' 与 $GL_{n-2p}(K)$ 同构, 而 H_2' 与加法羣 $K^{p(n-2p)}$ 同构. 以 H_2 表 H_2' 在H中的完全反象,我們就得到H的一个正規羣列

$$H \supset H_0 \supset H_2 \supset H_1 \supset \{1\},$$

它們的商羣依次同构于

$$\Gamma L_p(K),\ GL_{n-2p}(K),\ K^{p(n-2p)},\ K^{p(n-p)}.$$

B2) 現在假定σ不是单位自同构,而且假定 K_1 是K中被σ所保持不变的元素所組成的子体,这时(4)給出 $a^\sigma a = 1$. 于是自同构σ将变换域 $Z(a)$ 全局地保持不变. 如果σ对于 $Z(a)$ 的限制是单位自同构,我們就有 $a^2 = 1, a = \pm 1$. 在相反的情形,因为σ是 2 阶元素, 就存在一个 $b \in Z(a)$ 使得 $a = b^{1-\sigma}$, 那么若用

$v \cdot b^{-1}$ 代替 v，我們仍然有 u 与 vb^{-1} 射影可換．因此我們永远可以假定 $a = \pm 1$．

此外，我們注意这时条件(3)給出 $\xi^{\tau\sigma} = \xi^{\sigma\tau}$ 对 $\xi \in K$，因此 K_1 被 K 的自同构 τ（全局地）保持不变．

α) 首先假定 K 的特征数 $\neq 2$．由 $\Gamma L_n(K)$ 中具有性质 $vu = \pm uv$ 的 v 所組成的子羣 H 包有 u 在 $\Gamma L_n(K)$ 中的中心化子 H_0，作为它的指数 2 的正規子羣，我們只限于討論 H_0．我們已知，如将 E 看作 K_1 上的 $2n$ 維向量空間，它就是 n 維子空間 U^+ 和 U^- 的直接和而 $U^- = U^+\rho$．設 τ 是对应于 $v \in H_0$ 的 K 的自同构，就应該有 $v(U^+) = U^+$，$v(U^-) = U^-$，而且反之亦然．于是 v 对于 U^+ 的限制就是这个（K_1 上的）空間的一个直射变换．此外，因为 $\rho^{\tau\sigma} = \rho^{\sigma\tau} = -\rho^\tau$，必須有 $\rho^\tau = \rho\alpha$ 而 $\alpha \in K_1$；如果令 $\xi^\omega = \rho^{-1}\xi\rho$ 对于 $\xi \in K_1$，那么 ω 是 K_1 的一个自同构，于是有

$$\xi^{\tau\omega} = \alpha\xi^{\omega\tau}\alpha^{-1}. \tag{5}$$

此外，如果 $\rho^2 = \beta \in K_1$，我們就应該有 $\beta^\tau = (\rho^\tau)^2 = \rho\alpha\rho\alpha$，由此推出

$$\beta^{-1}\beta^\tau = \alpha^\omega\alpha. \tag{6}$$

反之，如果 τ 是 K_1 的一个自同构且适合条件(5)和(6)对于一个适当的 $\alpha \in K_1$，那么 τ 能扩张成 K 的一个自同构使得 $\rho^\tau = \rho\alpha$，而且能将 U^+（在 K_1 上）的一个对于自同构 τ 的直射变换 v 扩张成 E（在 K 上）的一个直射变换，如令 $v(x\rho) = v(x)\rho^\tau$．因为这时 $v(U^-) = U^-$，就有 $v \in H_0$．因此得出結論，H_0 与 $\Gamma L_n(K_1)$ 中(对一个依賴于 τ 的 α) 适合条件(5)和(6)的 K_1 的自同构 τ 的直射变换組成的子羣同构．我們注意，一般綫性羣 $GL_n(K_1)$ 是 H_0(以及 H)的一个正規子羣．

β) 假定 K 的特征数为 2．我們已知，将 E 看作 K_1 上的 $2n$ 維向量空間，它就是 $V = w^{-1}(0)$ 与 $V\theta$ 的直接和，而 $\theta^2 + \theta = \beta \in K_1$ 及 $\theta^\sigma = \theta + 1$；此外(Dieudonné[14]，181 頁)，映射 $\xi \to D\xi = \theta\xi + \xi\theta$ 是体 K_1 的一个微分映射．v 属于 H 的充分必要条件是 $vw = wv$；将 $v(w(x)) = w(v(x))$ 对 $x \in V$ 写出，首先得到条

件 $v(V)=V$. 另一方面，我們有 $\theta^{\tau\sigma}=\theta^{\sigma\tau}=\theta^{\tau}+1$，因此 $\theta^{\tau}=\theta+\lambda$ 而 $\lambda\in K_1$；考虑到关系式 $w(x\theta)=x$ 对于 $x\in V$，我們就能驗証 $v(w(x\theta))=w(v(x\theta))$ 对于 $x\in V$，因此由关系式 $\theta^{\tau}=\theta+\lambda$ 推出：如果 $v(V)=V$，v 和 w 就交换. 注意，如果对关系式 $D\xi=\theta\xi+\xi\theta$ 运用 τ，我們就得到

$$(D\xi)^{\tau}-D(\xi^{\tau})=\lambda\xi^{\tau}+\xi^{\tau}\lambda. \tag{7}$$

另一方面，我們有

$$\beta^{\tau}-\beta=\lambda^2+\lambda. \tag{8}$$

反之，如果 τ 是对于一个适当的 $\lambda\in K_1$ 适合条件(7)和(8)的 K^1 自同构，我們就能将 τ 扩张成 K 的一个自同构使得 $\theta^{\tau}=\theta+\lambda$ 而将 V（在 K_1 上）对于自同构 τ 的一切直射变换 v 扩张成 E（在 K 上）的一个直射变换，如合 $v(x\theta)=v(x)\theta^{\tau}$. 我們推出，$H$ 与 $\Gamma L_n(K_1)$ 中（对一个依賴于 τ 的 λ）适合条件(7)和(8)的 K_1 的自同构 τ 的直射变换所組成的羣同构. 一般綫性羣 $GL_n(K_1)$ 是 H 的一个正規子羣.

关于 $GL_n(K)$ 中任意一个綫性变换 u 在 $GL_n(K)$ 中的中心化子的研究，可以参看 B. L. 范德威尔登 van der Waerden 和 O. 施来午 (Schreier)[1]以及 J. 狄多涅 (Dieudonné)[3]，这些研究都对体 K 加以某些限制.

§5. 对射变换与半双綫性形式

我們知道体 K 上的一个右向量空間 E 的对偶 E^* 是 K 上的一个左向量空間，它的維数等于 E 的維数；对于 $x\in E$ 及 $x'\in E^*$，我們时常用 $\langle x', x\rangle$ 来代替 $x'(x)$. 也可把 E^* 看作是与 K 相逆的体 K^0 上的右向量空間，仅当体 K 与 K^0 同构时，即仅当存在一个从 K 到它自身之上的一一映射 J 适合条件 $(\alpha+\beta)^J=\alpha^J+\beta^J$ 及 $(\alpha\beta)^J=\beta^J\alpha^J$ 时（这样的映射称为 K 的反自同构），才有从 E 到 E^* 之中的半綫性映射存在. 我們注意，当 K 是域时，K 的一个反自同构即是自同构，而且反之亦然. 从 E 到 E^* 之中的一个对于 K 的反自同构 J 的半綫性映射中 ϕ 具有性質

$$\varphi(x+y)=\varphi(x)+\varphi(y)\qquad \text{对 } x\in E,\ y\in E,$$
$$\varphi(x\lambda)=\lambda^J\varphi(x)\qquad \text{对 } x\in E,\ \lambda\in K.$$

对于这样的半綫性映射 φ，試从 $E\times E$ 到 K 中的映射 $(x,y)\to f(x,y)=\langle\varphi(x),y\rangle$ 与之相当，显然这个映射适合条件:

$$f(x_1+x_2,y)=f(x_1,y)+f(x_2,y),$$
$$f(x,y_1+y_2)=f(x,y_1)+f(x,y_2),$$
$$f(x\lambda,y)=\lambda^Jf(x,y),$$
$$f(x,y\mu)=f(x,y)\mu.$$

这样的映射称为 $E\times E$ 上对于反自同构 J 的半双綫性形式；当 K 是域而 J 是单位自同构时，f 就是 $E\times E$ 上的双綫性形式. 反之，这样的半双綫性形式显然可以表成而且可以唯一地表成形状 $\langle\varphi(x),y\rangle$，其中 φ 是从 E 到 E^* 中的一个半綫性映射. 設 $(e_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ 是 E 的一組基，$(e_i')_{1\leqslant i\leqslant n}$ 是 E^* 中与它对偶的一組基使得 $\langle e_i',e_j\rangle=\delta_{ij}$. 如果令 $\varphi(e_i)=\sum_{j=1}^{n}\alpha_{ij}e_j'$，就有 $\alpha_{ij}=\langle\varphi(e_i),e_j\rangle=f(e_i,e_j)$，因此对于 $x=\sum_i e_i\xi_i$，$y=\sum_i e_i\eta_i$ 就有 $f(x,y)=\sum_{i,j}\xi_i^J\alpha_{ij}\eta_j={}^tx^J\cdot A\cdot y$，其中 x 和 y 看作是由它們的坐标所組成的单列矩陣而令 $A=(\alpha_{ij})$；φ 对于基 (e_i) 和 (e_i') 的矩陣 A 称为半双綫性形式 f 对于 E 的基 (e_i) 的矩陣. 它的秩与基 (e_i) 的选取无关，也等于映射 φ 的秩，称为半双綫性形式 f 的秩.

如果 $(\bar{e}_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ 是 E 的另外一組基，P 是从 (e_i) 过渡到 $(\bar{e}_i)$ 的矩陣，而 A' 是 f 对于 $(\bar{e}_i)$ 的矩陣，我們就有 $A'={}^tP^JAP$. 当 K 是域时，矩陣 A 的行列式称为 f 对于基 (e_i) 的判别式 Δ；如果 Δ' 是 f 对于基 $(\bar{e}_i)$ 的判别式，那么有 $\Delta'=(\delta\delta^J)\Delta$，其中 δ 表示 P 的行列式.

从 E 到 E^* 上的一个对射变换，依定义是从 E 到 E^* 上的一一半綫性映射，或者說是一个秩等于 E 的維数的半綫性映射. 对应于对射变换 φ 的 $E\times E$ 上的半双綫性形式 f 称为非退化的，这样一个形式由下述性质所刻划：任何向量 $x\in E$ 使得 $f(x,y)=0$ 对