

886613

高等纺织院校教学参考书

纱线 力学 问题

陈人哲 著

纺织工业出版社



高等纺织院校教学参考书

纱线力学问题

陈人哲 著

纺织工业出版社

内 容 提 要

本书按理论力学系统, 研究讨论在纺织生产加工过程中所遇到的关于纱线的一些运动学、静力学和动力学问题。其研究讨论的对象也可从纱线推广到纤维条束、绳、缆、带、链等纵向一维挠性物体, 故其所得结论具有一定的普遍意义。

本书用作高等纺织院校纺织机械专业及纺织专业本科生及研究生的参考教材, 也可供生产技术人员和科研设计人员参考。

高等纺织院校教学参考书

纱 线 力 学 问 题

陈人哲 著

*

纺织工业出版社出版

(北京东长安街12号)

纺织工业出版社印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行

各地新华书店经售

*

87×1092毫米 1/16 印张: 113 字数: 310千字

1989年6月 第一版第一次印刷

印数: 1—1,200 定价: 2.60元

ISBN 7-5064-0227-0/TS·0223(课)

目 录

前言.....	(1)
第一章 纱线运动学	(4)
第一节 基本运动学关系.....	(4)
第二节 圈条运动.....	(6)
第三节 卷绕运动两端折回曲线.....	(9)
第四节 导纱运动与纱线不匀.....	(17)
第五节 曲面短程线与纱线的切向滑动.....	(27)
参考资料.....	(33)
第二章 纱线静力学.....	(34)
第一节 静态悬链线.....	(34)
第二节 纱线在曲面上的静力学平衡.....	(41)
第三节 圆柱面卷绕的纱线平衡.....	(52)
第四节 圆锥面卷绕的纱线平衡.....	(70)
第五节 纱线或链带在柱面上的滑动.....	(96)
第六节 纱线在几何旋转面上的滑动.....	(118)
参考资料.....	(131)
第三章 纱线动力学.....	(132)
第一节 动态悬链线.....	(132)
第二节 纱线振动与波动.....	(137)
第三节 气圈方程.....	(140)
第四节 气圈形态与张力变化.....	(149)
第五节 气圈纱线的空间曲线.....	(158)
第六节 转杯纺纱曲线形态与张力.....	(177)
第七节 布卷或纱轴的退绕惯性力.....	(182)
参考资料.....	(186)
习题.....	(187)
附录.....	(197)
(一) 纱线在圆柱面上的摩擦力.....	(197)
(二) 退绕滑动近似式.....	(198)
(三) 卷绕滑动与动程缩短值.....	(198)
(四) 圆环面上的短程线方程.....	(199)
(五) 考虑空气阻力时的转杯纺纱曲线方程.....	(201)
参考资料.....	(203)

前 言

纱线和织物是细长型和薄型的挠性物体，因此其力学特性是：只能纵向抗拉而不能纵向抗压，其抗弯刚度非常小，故为分析简单计，我们往往完全略去其抗弯刚度不计，而只考虑所受的拉力（或张力），这在很多情况下是不会引起任何显著的误差的。

这里所谓纱线，应包括丝、索、绳、缆等各种细长物体在内，在一定意义上当然也可包括条、束、带、链等各种物体在内，把它们都看作是一维的或纵向的挠性物体，都服从同样的力学规律。一般说来，织物当然是二维的挠性物体，但在其加工过程中有时只需考虑其纵向运动或纵向受力，那么也就可以把它暂且看作一维挠性物体来处理。因此，本书虽然不是主要研究织物而是研究纱线在其加工过程中所遇到的一些力学问题，但在纱线研究中所得到的某些结论同样也适用于只考虑纵向运动或纵向受力的织物。又例如，传动用的皮带本是二维扁形物体，但实际上在研究皮带运动时，往往把它看作一维纵向的挠性物体就可以了。再有象链条那样的传动件，它是由许多链节组合成的，但作为近似处理，把它看作均匀连续物体也是许可的；因此，纱线力学的某些结论对链条来讲有时同样也能适用。例如后面第二、三章中对悬链线的分析研究严格地讲应该适用于纱线条带或绳索，但近似地也能适用于链条而没有多大误差。

本书将不讨论与纱线本身材料特性有关的纺织材料力学方面的问题，而是按照理论力学的课程系统，分为运动学、静力学和动力学三章来讨论纱线等一维挠性物体在其加工运动过程中所遇到的一些典型力学问题。当然，这样划分只不过是为了讨论和学习上的方便而已，在生产实践中所遇到的具体问题往往是多方面的和综合性的，是不能截然分割的，这点应予注意。

本书第一章，即纱线运动学，讨论了纱线在作复合运动时的运动学关系；又因本书的研究对象可以从纱线推广到一般细长物体，所以把圈条器和条筒的复合圈条运动也包括在内了。此外第一章还研究了往复导纱运动所造成的往复动程与卷绕动程之间的动程差，以及往复导纱运动对纱线不匀的影响，例如转杯纺纱卷绕成筒子时，由于往复导纱运动会造成卷绕线速度的变化，而引纱速度却是不变的，这样就会对纱线产生不利影响，通过理论分析，可以定量地算出这一影响大小。此章最后还研究了纱线在曲面上的切向滑动与短程线问题。

第二章，即纱线静力学，讨论了静态悬链线以及纱线在各种旋转曲面（常见的柱面和锥面可以看作是旋转曲面的简单特例）上的平衡和滑动问题，也包括纱线卷绕在曲面上的稳定性或防滑问题。通过力学分析，写出平衡方程，求解这些方程，就可得出在各种情况下的纱线张力变化及其曲线形态变化。当纱线在柱面上的滑动方向与柱面轴线方向相垂直时，这当然是一种最常见的简单情况，只要应用一般欧拉张力公式就可以了。但这里有一个特例：对于梳棉机盖板在曲轨上的滑动来讲，如果要计算所需的驱动力多大，那么一方面我们固然可以把盖板和盖板链近似地看作是均匀连续物体，但另一方面由于它们的重量很大而不可略而不计，故此时就必须对常用的欧拉张力公式加以修正。

对于纱线的滑动来讲,在一般情况下其自重当然是不必考虑的,但如果要研究纱线在曲面上按倾斜方向作较复杂方式的滑动时,那也必须对欧拉张力公式进行修正或补充。这方面的实例也很多,例如纱线穿过导纱眼、气圈环和钢丝圈时的滑动,纱线在织针上的滑动,以及纱线退绕时在纱层表面上的滑动等等都是。

至于卷绕稳定性问题,则主要是要考虑防止纱线的滑动。当纱线是按螺旋线形式卷绕在圆柱形卷装面上时,因该螺旋线在展开平面上是一直线,在圆柱面上即是短程线,稳定性自属最佳,其平衡不成问题。但在卷绕动程两端纱线反向折回时,其折回曲线必然偏离短程线,就很有可能会产生滑动而需要研究一下此时防止滑动的条件究竟应是什么。至于圆锥形卷绕,即使是管身卷绕部分的螺旋线在展开平面上也不是直线,也就不是圆锥面上的短程线,因而总有自行滑向短程线的趋势。所以对于圆锥形卷绕来讲,我们不但要研究其动程两端的折回曲线,而且还要研究管身卷绕螺旋线的稳定性问题。

所谓静力学平衡问题,从广义来讲,本来并不限于静止物体的静力学平衡。当物体作恒速直线运动时,因无加速度存在,同样也必然满足静力学平衡方程。但当纱线在曲面上作恒速滑动时,虽然此时没有切向加速度,但还是有法向加速度存在,故严格说来,应是动力学问题,而不是静力学问题。不过在一般情况下,此时的法向惯性力往往很小而可略去不计,故仍允许看作是静力学问题而用静力学平衡方程来处理。如果惯性力较大而必须考虑时,那就属于本书第三章的讨论范围了。

第三章,即纱线动力学中讨论了纱线的振动与波动,以及动态悬链线和气圈问题。这里的纱线气圈问题一方面与纱线的振动与波动密切相关,另一方面又可与动态悬链线通过同一组微分方程综合表达而形成一个比较广泛的统一体系。我们在生产过程中所碰到的纱线悬链线较多是动态的,较少是静态的;但不论是静态的或是动态的,都可通过对悬链线下垂程度的测定,而把纱线的张力很方便地计算出来。同样通过对气圈形态的现场测定,也可以很方便地把气圈纱线张力计算出来,这样的计算方法甚为简便实用,对于实际生产来讲这是很有现实意义的。

通过上述统一表达的微分方程组,不但可以研究动态悬链线和气圈纱线的空间曲线和张力,而且还可以把转杯纺纱时的纱条平面曲线及其张力研究也包括在内。不论在哪种情况下,我们都可以得出一个统一、简单而通用的张力公式,此与流体力学上有关的定理公式十分相似,都可利用功能原理证明之,有其很重要的理论意义。此外,第三章的最后还应用功能原理和力矩动量矩原理讨论了转杯纺纱假捻盘对纱线曲线的作用问题,以及布卷或纱轴退绕时惯性力的计算问题。

本书应用理论力学的基本原理和数学方法研究分析了纺织生产过程中所碰到的一些纱线力学问题,进行了较深入的探讨,各章还都列举了一系列例题,进行分析计算,并根据算得的结果列出了很多数据图表,以供参考。故本书可用作大学本科生及研究生教材,也可供科技生产人员参考。

在生产实践中虽有很多关于这方面的力学问题应予深入探讨,但目前这类专著还很少见。本书虽是根据作者多年来教学与工作的经验积累写成,但也只是一种初步的尝试而已,涉及面也是比较偏而狭的,许多重要方面还有待今后继续努力探索。由于只是初步尝试,一定有很多挂漏差错之处,恳切希望广大读者不吝批评指正。

本书承中国纺织大学严灏景教授审阅并提出改进意见，还承张善同、苗麟及毛立民等同志协助计算和绘制图表曲线，特此谨致谢意。

陈人哲

1988年1月

第一章 纱线运动学

第一节 基本运动学关系

首先我们研究一下基本运动学关系。在纺织生产过程中，如果略去纱线的伸长变化不考虑的话，那么，纱线沿其前进方向上的运行速度 V 一般都是始终保持恒定不变的。这个速度 V 也就是机器单头的生产速度，当然是一个表示生产水平的重要特征数据；但却不要因为它恒定不变而把它看作是绝对速度。所谓“绝对速度”，我们仍应遵循一般研究机械运动时所用的近似定义，理解为相对于地面或相对于机架的相对速度。当我们把地面或机架近似地取作静止坐标系或参考系时，纱线在沿其本身方向前进过程中的运行速度或生产速度有时就不是所谓“绝对速度”，而只是在动坐标系中的相对速度。

至于动坐标系应如何取法，则要根据具体情况，主要看如何能使解题或分析方便而定。举例说，在纺纱或退绕过程中当纱线形成稳定形状的气圈形态时，可取动坐标系随气圈曲线一起回转，作为参考系，那么纱线在此参考系中的相对速度 V 即是生产速度，等于罗拉输出速度，也应等于筒管的卷绕线速度。又如在翼锭纺纱时并不形成气圈，此时可把动坐标系取在锭翼上，随锭翼一起回转，那么机器的生产速度或筒管的卷绕线速度就应等于纱线在此动坐标系中的相对速度 V_r 。不论在哪种情况下，纱线的绝对速度 V_a 均应等于此相对速度 V_r 与牵连速度 V_e 的矢量和：

$$V_a = V_e + V_r \quad (1-1)$$

这里的 V_e 是回转坐标上相应各参考点的线速度（圆周速度）。我们在锭翼部分或在气圈部分根据上式按矢量和所求得的 V_a ，从生产角度来看一般都是没有什么重要意义的。

至于在卷绕点处，例如在粗纱自锭翼压掌孔眼引出而绕上筒管纱层表面之处，则 V_e 应是锭翼压掌孔眼处的圆周速度，即导纱速度（ $V_e = V_d$ ），而粗纱在此处的绝对速度则应等于管纱卷装表面在此处的线速度（ $V_a = V_s$ ）。它是由两个分速度所组成：一是管纱卷装回转的表面圆周速度 V_s ，另一个是管纱升降的往复速度 V'_s ，它们应满足下式（见图1-1●）：

$$V_a = V_s + V'_s$$

而
即

$$V_s = V_a - V'_s \quad (1-2)$$

$$V_{s/a} = V_s - V'_s$$

从另一角度来看，我们也可把坐标系取在筒管上，随管纱卷装一起回转和升降运动，那么此时应得

$$V_e = V_s, \text{ 而 } V_r = V_a$$

●在图1-1中的 V_a 是纱的绝对速度， $V_{s/a}$ 是纱相对于导纱器的相对速度。在图1-2中的 V_d 是导纱器的绝对速度， $V_{d/a}$ 则是导纱器相对于纱的相对速度。

于是式(1-2)将成为 (见图1-2) :

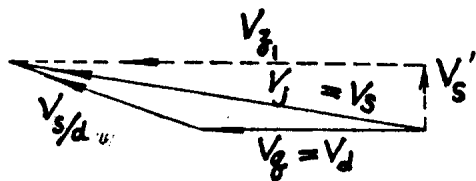


图1-1

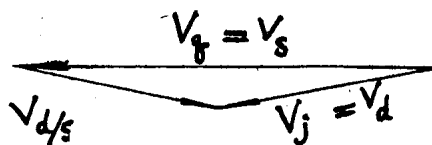


图1-2

$$V_{d/s} = V_d - V_s = (V_j - V_g)$$

相对速度 $V_{d/s}$ 与 $V_{s/d}$ 正负相反而数值相等, 即:

$$|V_{d/s}| = |V_{s/d}| = V \quad (1-3)$$

按图中几何关系, 根据勾股定理可求得

$$V^2 = (V_s - V_d)^2 + V_s'^2$$

设管纱卷绕半径为 r_k , 筒管和锭翼的角速度各为 ω_k 和 ω_i , 则有

$$V_s = r_k \omega_k$$

$$V_d = r_k \omega_i$$

代入上式后可得

$$r_k (\omega_k - \omega_i) = \sqrt{V^2 - V_s'^2}$$

在翼锭纺纱过程中卷绕半径 r_k 逐层递增, 那么筒管转速 ω_k 就应按上式所示规律而逐层递减, 这一般是通过周转轮系和铁炮变速机构来完成的 (上式适用于管导式翼锭纺纱)。

在络筒和卷纬时的卷绕运动当然要比翼锭纺纱时简单得多, 因为此时的卷装回转运动只需完成卷绕就行, 不需要同时再去完成加捻作用。此时的卷装本身通常就只作回转运动, 不作往复运动; 而导纱眼或导纱点则仅作往复运动, 不作回转运动。又, 此时导纱速度与绕纱速度二者之间同样也应利用(1-1)式所示的基本运动学关系来进行分析; 其动坐标系可以取

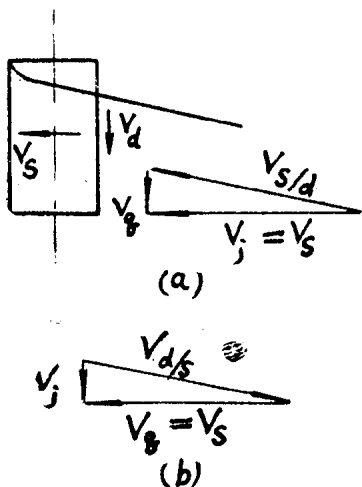


图1-3

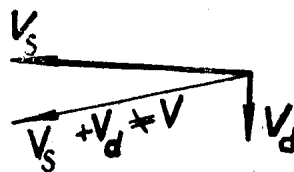


图1-4

为随导纱点一起运动 (即 $V_s = V_d$)，参见图1-3(a)，此时应得

$$V_{s/d} = V_s - V_d = V_s - V_s$$

或者也可取动坐标系随管纱一起作回转运动 (即 $V_s = V_d$)，见图1-3(b)，此时应得

$$V_{s/d} = V_s - V_d = V_s - V_s$$

图中三个速度矢量构成一封闭直角三角形，三角形的斜边即卷绕线速度，其值为 V 。根据勾股定理，应得 V^2 必须等于两条直角边平方之和：

$$V^2 = V_s^2 + V_d^2$$

但是，如从矢量关系来看，因该斜边代表相对速度，所以它应该等于两条直角边之差。如果认为它应等于两段直角边之和，虽然数值上能吻合，但方向上就错了，参见图1-4。这点很重要，绝不能搞错。

第二节 圈条运动

相对来讲，纤维条的弯曲刚度当然要比纱线大得多，但作为近似分析，不考虑纤维条的断面粗细而略去其弯曲刚度不计，在一定程度上也是许可的。

图1-5所示为圈条机构简图及其运动学原理。当圈条盘把纤维条圈放在条筒内时，因为盘和筒都在转，所以在纤维条与圈条盘和条筒三者之间就有一个比较复杂的相对运动，此时纤维条的输送速度，即它相对于斜管的相对速度 $V_{s/s}$ 在斜管内是沿倾斜方向的，但在出斜管口后的铺放运动中，该速度就转变为水平方向了，可是其大小仍旧不变：

$$V_{s/s} = V_{s/s} = V$$

式中： $V_{s/s}$ ——纤维条对于斜管的相对速度；

$V_{s/s}$ ——纤维条对于斜管口的相对速度。

纤维条一出管口，就铺在条筒卷装面上，随条筒一起回转。要使纤维条既不因松弛而堵塞斜管，又不至于紧张而牵动条筒内已铺好的卷装，那么纤维条在出斜管后的绝对速度（水平方向）就必须等于条筒在该点（铺放点）的绝对速度： $V_s = R\omega_r$ （参见图1-5，图中O为条筒中心，O₀为圈条盘中心）；式中 $R = OP$ ，是由条筒中心到斜管出口处，即到圈条铺放点P的半径距离（是变化的），而 ω_r 则是条筒回转的角速度。现在把动坐标取在圈条盘，那么在该点P上的牵连速度应是：

$$V_q = r_0\omega_0$$

式中 $r_0 = O_0P$ ，即圈条盘中心到P点的半径距离，而 ω_0 为圈条盘回转的角速度。根据(1-1)式应得

$$V_{s/s} = V_s - V_q = R\omega_r - r_0\omega_0 \quad (1-4)$$

这里要注意纤维条的铺放速度，即生产速度，应该等于纤维条在斜管内或在斜管出口处的相对速度，而并不等于其绝对速度 $R\omega_r$ 。

当然我们也可以把动坐标取在条筒上，随条筒一起回转，此时应得

$$V_s = R\omega_r$$

斜管出口P点的绝对速度为

$$V_s = r_0\omega_0$$

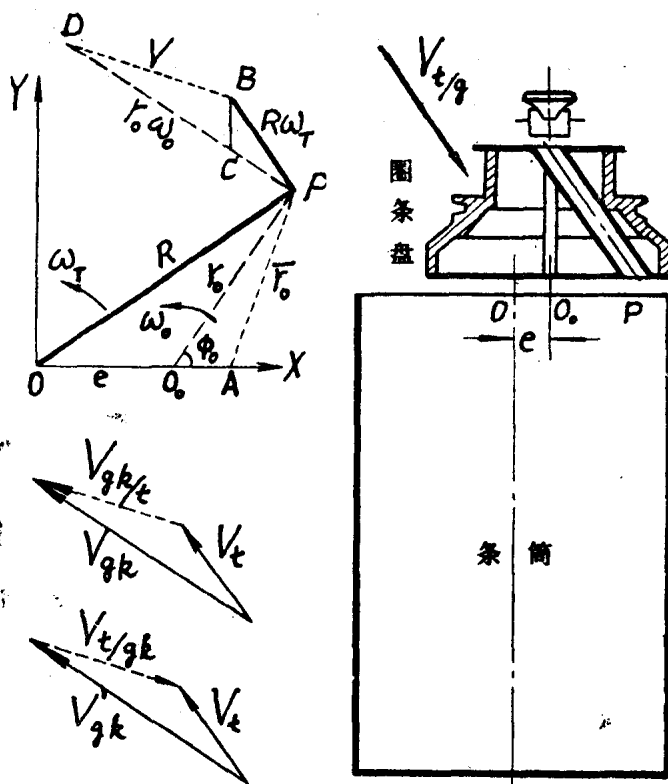


图1-5

于是可得纤维条的铺放速度应等于

$$\vec{V}_{gk/t} = \vec{V}_g - \vec{V}_t = \vec{r}_0 \vec{\omega}_0 - R \vec{\omega}_r \quad (1-5)$$

与 (1-4) 式相比, 大小关系完全相同, 只是正负方向相反而已:

$$|\vec{V}_{t/gk}| = |\vec{V}_{gk/t}| = V$$

参见图1-5所示三角形PBD及其矢量关系。

在图1-5中作 $PA \perp DB$ ($=V$), 与 OO_0 延长相交于A点, 再作 $BC \perp OO_0$, 则因下列三角形的相应边均互相垂直而形成两对相似三角形, 即 $\triangle BCP \sim \triangle OO_0P$, $\triangle BCD \sim \triangle AO_0P$,

由第一对相似三角形可得

$$\frac{BC}{e} = \frac{PC}{r_0} = \frac{PB}{R} = \omega_r$$

$$\therefore BC = e\omega_r, \quad PC = r_0\omega_r$$

由第二对相似三角形则可得

$$\frac{V}{AP} = \frac{BC}{O_0A} = \frac{r_0\omega_0 - PC}{r_0} = \omega_0 - \omega_r$$

所以

$$\begin{cases} O_0A = \frac{BC}{\omega_0 - \omega_r} = \frac{e\omega_r}{\omega_0 - \omega_r} = \frac{e}{i-1} \\ AP = V/(\omega_0 - \omega_r) \end{cases} \quad (1-6)$$

$$(1-6a)$$

式中 $i = \omega_0 / \omega_r$, 是 ω_0 与 ω_r 之间的恒速比; 当它们同向回转时取正值, 反向回转时则取负值。又因 i 和 e 都是常数, 故 (1-6) 式就表示 O_0A 也是一常值, 那么 A 就是 OO_0 连心线上的一个固定点。至于 (1-6a) 式则表示, 要维持 V 值恒定不变, 就必须使 AP 长度维持不变。但 A 点既是一个固定点, 而 AP 长度又要保持不变, 那么 P 点的轨迹必然是以 A 为中心的一个整圆^[1]。

由图 1-5 可知, 当 AP 长度不变时, 则 r_0 ($= O_0P$) 的长度就必然要作相应的变化。由 $\triangle O_0PA$ 可求得其变化关系如下:

$$r_0 = O_0A \cos \phi_0 + [AP^2 - (O_0A \sin \phi_0)^2]^{\frac{1}{2}}$$

当 $\phi_0 = 0$ 时

$$r_{0(\max)} = AP + O_0A = \frac{V + e\omega_r}{\omega_0 - \omega_r} \quad (1-7)$$

当 $\phi_0 = \pi$ 时

$$r_{0(\min)} = AP - O_0A = \frac{V - e\omega_r}{\omega_0 - \omega_r} \quad (1-7a)$$

r_0 的大小变化说明圈条斜管的纤维条出口点必将在一定范围内作径向波动, 这样才能维持相对速度 V 值恒定不变。否则, 如果斜管内径太窄, 不允许 r_0 作一定的径向波动, 那就必然会引起 V 值的波动, 如下式所示:

$$V = (\omega_0 - \omega_r)AP = (\omega_0 - \omega_r)(r_0^2 + O_0A^2 - 2r_0 \cdot O_0A \cos \phi_0)^{\frac{1}{2}}$$

当 $\phi_0 = 0$ 时得

$$V_{\min} = (\omega_0 - \omega_r)(r_0 - O_0A) = (\omega_0 - \omega_r)r_0 - e\omega_r$$

当 $\phi_0 = \pi$ 时得

$$V_{\max} = (\omega_0 - \omega_r)(r_0 + O_0A) = (\omega_0 - \omega_r)r_0 + e\omega_r$$

但 V 值的波动是不允许的, 因为 V 值 (即铺放速度) 太小时会使管内纤维条松弛以至堵塞, 太大时又将形成意外牵伸, 增加条干不匀, 并将牵动条筒内已铺好的纤维条而使成形不正。所以斜管内径应足够宽裕, 以便允许 r_0 作这样的变动^①。

根据 (1-7)、(1-7a) 二式可得 r_0 变动时的平均值:

$$\bar{r}_0 = \frac{1}{2}(r_{0\max} + r_{0\min}) = AP = \frac{V}{\omega_0 - \omega_r}$$

故可得

$$V = \bar{r}_0 \omega_0 \left(1 - \frac{1}{i}\right)$$

式中 i 是圈条盘转速 ω_0 与条筒转速 ω_r 之间的传动比; 铺放速度 V 则应等于或略大于小压辊的输入速度, 以保持一定的紧张牵伸。圈条盘与小压辊之间的传动比就应按上式所示关系来设计^[2]。

①其变动量为: $\Delta r_0 = \frac{e}{\omega_0 / \omega_r - 1}$

第三节 卷绕运动两端折回曲线

在纱线卷绕时，如果作往复运动的导纱器眼并不紧贴在卷装表面而是与之保持一定距离的话，那么卷装表面卷绕点的运动必然会始终落后于导纱眼的运动，二者之间存在着一定差距，尤其在动程两端折回时，二者之间的运动关系更具有明显的不一致性。

设卷装表面为圆柱面，可把它展开为一平面，参见图1-6。从相对运动来考虑，我们可以把该卷装表面或该展开平面看作是静止不动的，今设导纱器作等速往复运动，在 Q_0 点突然折回，那么导纱眼或导纱点在该展开面上的相对轨迹应是折线 P_0Q_0Q 。该折线表示导纱点起先向下运动，其相应轨迹在 Q_0 点左侧为一倾斜直线 P_0Q_0 ，通过 Q_0 点后转为向上运动，则其相应轨迹即改变为另一倾斜直线 Q_0Q 。当导纱点在 Q_0 点时，相应的卷绕点则在 P_0 ，二者之间的周向距离为 l ，并且在运动过程中始终保持 l 不变。当导纱点尚未到达 Q_0 点而只是沿 P_0Q_0 方向上运动时，卷绕点虽与导纱点始终保持一定的差距，但仍在导纱点后面同样沿着该倾斜直线 P_0Q_0 的方向作追踪运动，直到 P_0 点为止。此后当导纱点突然折回按 Q_0Q 直线运动时，相对应的卷绕点就将自 P_0 点开始按曲线轨迹 P_0P 而逐渐折回，现在就来求卷绕点 P 这一曲线运动轨迹，该曲线可称之为“折回曲线”。

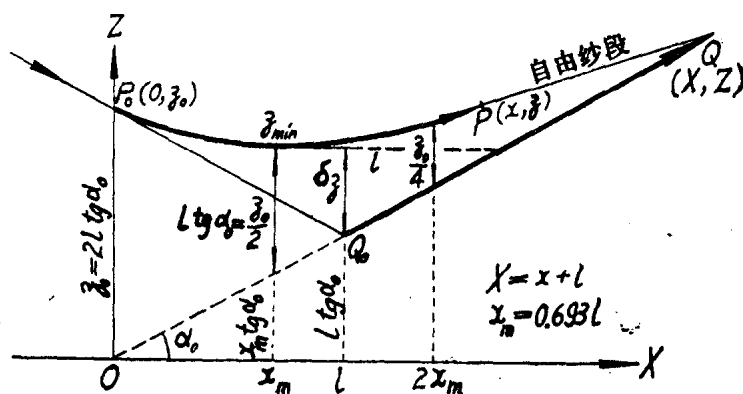


图1-6

在图1-6中，取纵坐标轴 OZ 过 P_0 点（即纱线卷绕曲线的开始转折点），且平行于圆柱面的轴线方向；取坐标原点 O 在 Q_0Q 的延长线上，并取横坐标轴 OX 表示圆周方向。

设导纱点 Q 的坐标为 (X, Z) ，又设 OQ_0Q 的倾斜角为 α_0 。（即纱线在圆柱面上卷绕的螺旋角），则有

$$Z = X \tan \alpha_0$$

在图1-6中的 P 点为对应于 Q 点的卷绕点，设 P 的坐标为 (x, z) ，与导纱点 Q 的周向距离保持为 l 不变（ $X = x + l$ ）。这 PQ 纱段是在“自由空间”内，尚未绕到卷装面上去，故可称之为“自由纱段”。如不考虑惯性阻力、空气阻力和纱线自重等的影响，那么此段纱线 PQ 应是一直线，且应与绕在卷装面上的曲线纱段 P_0P 在 P 点处连续，即相切，如下式所示[3]，

$$\frac{dz}{dx} = \frac{Z-z}{X-x} = \frac{Z-z}{l} = \frac{X \operatorname{tg} \alpha - z}{l} \quad (1-8)$$

即 $l \frac{dz}{dx} = Z - z = (x+l) \operatorname{tg} \alpha_0 - z = l \operatorname{tg} \alpha_0 - (z - x \operatorname{tg} \alpha_0)$

或 $l \frac{d}{dx} (z - x \operatorname{tg} \alpha_0) = - (z - x \operatorname{tg} \alpha_0)$

解得 $\frac{z - x \operatorname{tg} \alpha_0}{z_1 - x_1 \operatorname{tg} \alpha_0} = e^{-\frac{x-x_1}{l}} \quad (1-9)$

式中积分常数 x_1 和 z_1 可以是折回曲线上任一固定点的坐标；为简单计，也可取为初始点 P_0 ，则， $x_1 = x_0 = 0$ ， $z_1 = z_0 = 2l \operatorname{tg} \alpha_0$ ，代入后可得

$$z - x \operatorname{tg} \alpha_0 = z_0 e^{-x/l} = z_0 (e^{-0.693})^{x/0.693l} = z_0 \left(\frac{1}{2}\right)^{x/l} \quad (1-9a)$$

式中 l 指半衰期周长。

由 (1-9a) 式可知，纱线曲线是按指数规律逐步逼近倾斜直线 Q_0Q ($z \rightarrow x \operatorname{tg} \alpha_0$) 的；换言之，该导纱点直线轨迹 Q_0Q 即是卷绕点折回曲线的渐近线：每当 x 增加 $0.693l$ 时， P 点与 OQ_0 之间的纵向距离就要减半 ($\because e^{-0.693} = \frac{1}{2}$) 而逐渐趋近 Q_0Q 。 $0.693l$ 就可称之为半衰期周

长 l ，以周向长度来表示。

现在来求极值 $z_{\min}$ ，即求卷绕动程的端点位置。对 (1-9a) 式求导，并令其等于 0，

$$\frac{dz}{dx} = \operatorname{tg} \alpha_0 - \frac{z_0}{l} e^{-x/l} = \operatorname{tg} \alpha_0 (1 - 2e^{-x/l}) = 0$$

所以 $x_m = l \cdot \ln 2 = 0.693l = l_s$

代入 (1-9a) 式即得 $z_{\min} = l_s \operatorname{tg} \alpha + \frac{z_0}{2} = l_s \operatorname{tg} \alpha + l \operatorname{tg} \alpha_0$

因导纱动程的端点在 Q_0 点，故可得卷绕动程与导纱动程二者之间的轴向差在两端各为：

$$\delta_s = z_{\min} - l \operatorname{tg} \alpha_0 = l_s \operatorname{tg} \alpha_0 (= 0.693l \operatorname{tg} \alpha_0) \quad (1-10)$$

以上分析中假定导纱器在动程两端突然折回，但由于导纱器的惯性作用，这种突然折回实际上是不可能的。考虑现实可能性，设导纱点在动程两端按等减速运动折回，则其在展开平面上的相对轨迹应是一抛物线（参见图 1-7），其方程为：

$$Z = X \operatorname{tg} \alpha + X^2/2h = \frac{(X + h \operatorname{tg} \alpha_0)^2}{2h} - \frac{h \operatorname{tg}^2 \alpha_0}{2} \quad (1-11)$$

$$Z' = \frac{X + h \operatorname{tg} \alpha_0}{h}, \quad Z'' = \frac{1}{h} \quad (1-11a)$$

$$a = \frac{d^2 Z}{dt^2} = \frac{d^2 Z}{dX^2} \left(\frac{dX}{dt} \right)^2 = V^2/h$$

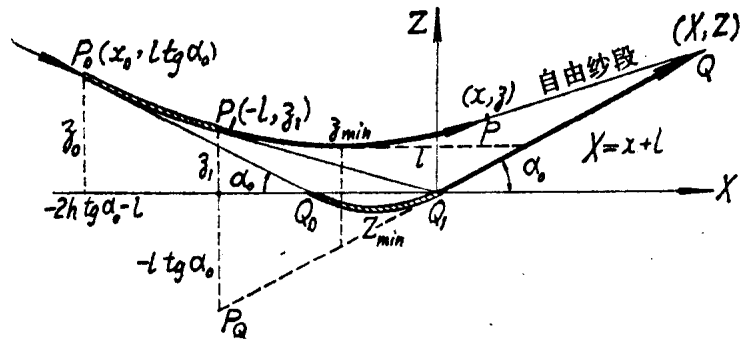


图1-7

式中 h 为抛物线焦点到准线的垂距,也等于其顶点处的曲率半径, V_s 为卷装表面的圆周速度,而 a 则是导纱点在两端折回时的加速度。该抛物线段的宽度为 $Q_0Q_1=2h \tan \alpha_0$,高度为 $h \tan^2 \alpha_0 / 2$,而其对称轴则是 $X + h \tan \alpha_0 = 0$,抛物线段的一个边界点 Q_1 取为坐标原点,另一个边界点 Q_0 的横坐标则为

$$X_{Q_0} = -2h \tan \alpha_0$$

根据(1-8)式应得

$$l z' + z = Z$$

当 Z 为代数多项式时,此微分方程的解应为

$$\begin{cases} z = Z - l Z' + l^2 Z'' - l^3 Z''' + \dots + C e^{-x/l} \\ z' = Z' - l Z'' + l^2 Z''' - l^3 Z^{(4)} + \dots - \frac{C}{l} e^{-x/l} \end{cases} \quad (1-11b)$$

以(1-11a)式代入后即得

$$z = Z - l \frac{X + h \tan \alpha_0}{h} + \frac{l^2}{h} + C e^{-x/l} (= Z - l z') \quad (1-12)$$

$$z' = Z' - l Z'' - \frac{C}{l} e^{-x/l} = \frac{X - l + h \tan \alpha_0}{h} - \frac{C}{l} e^{-x/l} \quad (1-12a)$$

现在来求积分常数 C 。因按 P_0Q_0 两点的坐标: $z_0 = l \tan \alpha_0$, $Z_0 = 0$, $X_0 = -2h \tan \alpha_0$

代入(1-12)式得
$$l \tan \alpha_0 = -l \left(\frac{-h \tan \alpha_0}{h} \right) + \frac{l^2}{h} + C e^{2h \tan \alpha_0 / l}$$

故得
$$C' = -\frac{l^2}{h} e^{-2h \tan \alpha_0 / l} = -\frac{l^2}{h} e^{-2u} \left(u = \frac{h \tan \alpha_0}{l} \right)$$

其次即可根据 $Q_1(0, 0)$ 来求相应卷绕点 P_1 的坐标位置,只要以 $X_1 = Z_1 = 0$ 代入(1-12)式即得

$$z_1 = 0 - l \tan \alpha_0 + \frac{l^2}{h} + C = \frac{l^2}{h} (1 - e^{-2u}) - l \tan \alpha_0 \quad (1-13)$$

因为 Q_1 是导纱轨迹抛物线段(第I段)的终点,故上式所表示的这一点 P_1 也应是卷绕曲

线第I段上相对应的终点。当导纱点过了 Q_1 点以后,它将按倾斜直线 Q_1Q 继续折回,那么相对应的卷绕点也将自 P_1 点开始而转入第II段曲线 P_1P 。

通过 P_1 点作一垂线(// Z 轴),与 QQ_1 的延长线相交于 P_0 点,则此交点 P_0 的横坐标为 $-l$,而纵坐标应为 $-l \operatorname{tg} \alpha_0$,于是可得

$$P_1P_0 = z_1 - (-l \operatorname{tg} \alpha_0) = \frac{l^2}{h} (1 - e^{-2u})$$

参见(1-13)式即得上述关系。再根据(1-9)式可知,曲线段II上任意点 P 至直线 QQ_1 的轴向距离(// Z 轴)应该按该式所示的指数规律而逐步衰减,即

$$z - x \operatorname{tg} \alpha_0 = (z_1 - x_1 \operatorname{tg} \alpha_0) e^{-[z - (-l)]/l} = P_1P_0 e^{-(z+l)/l} \quad (1-14)$$

此式也即所求该卷绕纱线折回段(II)的曲线方程,由此就可求出其极值 $z_{\min}$ 。如图1-7所示,设与 $z_{\min}$ 相对应的横坐标为 x_m ,代入上式后即得

$$z_{\min} - x_m \operatorname{tg} \alpha_0 = P_1P_0 e^{-(z_{\min}+l)/l} = l \operatorname{tg} \alpha_0, \text{ 即 } z_{\min} = (x_m + l) \operatorname{tg} \alpha_0$$

$$\therefore \frac{z_{\min}}{l \operatorname{tg} \alpha_0} = \frac{x_m + l}{l} = \ln \frac{P_1P_0}{l \operatorname{tg} \alpha_0} = \ln \left(\frac{l^2}{h} \frac{1 - e^{-2u}}{l \operatorname{tg} \alpha_0} \right) = \ln \frac{1 - e^{-2u}}{u}$$

$$x_m/l = \ln[(1 - e^{-2u})/u] - 1$$

但导纱动程端点是在 $Z_{\min} = -h \operatorname{tg}^2 \alpha_0 / 2$ 之处,因此它与卷绕动程端点之间的差距就应是

$$\delta_z = z_{\min} - Z_{\min}$$

$$\text{故可得} \quad \frac{\delta_z}{l \operatorname{tg} \alpha_0} = \frac{z_{\min}}{l \operatorname{tg} \alpha_0} - \left(-\frac{h \operatorname{tg} \alpha_0}{2l} \right) = \ln \frac{1 - e^{-2u}}{u} + \frac{u}{2} \quad (1-15)$$

左右两边分别乘以 $h \operatorname{tg} \alpha_0 / l = u$ 则可得

$$\frac{\delta_z}{l} - \frac{h}{l} = u \ln \frac{1 - e^{-2u}}{u} + \frac{u^2}{2}$$

再因抛物线轴是 $x + h \operatorname{tg} \alpha_0 = 0$,故得卷绕端点 $(x_m, z_{\min})$ 到此轴线的垂距是 $\delta_z = -h \operatorname{tg} \alpha_0 - x_m = l \left(-u + 1 - \ln \frac{1 - e^{-2u}}{u} \right)$ 。今以 u 为横坐标,以 $\delta_z / l \operatorname{tg} \alpha_0$ 、 $h \delta_z / l^2$ 以及 $\frac{\delta_z}{l} =$

$(-h \operatorname{tg} \alpha_0 - x_m) / l = 1 - u - \ln \frac{1 - e^{-2u}}{u}$ 为纵坐标,分别作出三根曲线,如图1-8左上部分

所示。

如把倾斜直线 P_0Q_0 与 QQ_1 延长相交,则此交点即假定导纱运动突然折回时的动程终点,其纵坐标为“ $-h \operatorname{tg}^2 \alpha_0$ ”,那么相对于这一终点来讲的卷绕动程差 Δ_z 应如下式所示:

$$\frac{\Delta_z}{l \operatorname{tg} \alpha_0} = \frac{z_{\min} + h \operatorname{tg}^2 \alpha_0}{l \operatorname{tg} \alpha_0} = \ln \frac{1 - e^{-2u}}{u} + u \quad (1-15a)$$

当 $u \ll 1$ 时则可按下级数展开后作近似计算:

$$\ln(1 - e^{-2u})/u = \ln \left(2u - 2u^2 + \frac{4}{3}u^3 - \dots \right) / u$$

$$= \ln 2 + \ln \left(1 - u + \frac{2}{3}u^2 - \dots \right)$$

$$= \ln 2 - \left(u - \frac{2}{3}u^2 \right) - \frac{1}{2} \left(u - \frac{2}{3}u^2 \right)^2 \dots \approx \ln 2 - u + \frac{u^2}{6}$$

按(1-15)式又可写成:

$$\frac{\delta_z}{l} = \operatorname{tg} \alpha_0 \left(\ln \frac{1 - e^{-2h \operatorname{tg} \alpha_0 / l}}{h \operatorname{tg} \alpha_0 / l} + \frac{h \operatorname{tg} \alpha_0}{2l} \right) \quad (1-15b)$$

分别取 $h/l = 0, 0.1, 0.2, \dots, 3.0$ 等, 按上式进行计算, 并以 α_0 为横坐标, 以 δ_z/l 为纵坐标, 按各 h/l 值分别作出一系列曲线, 如图1-8右面部分所示。其中当 $h \rightarrow 0$ 时, 则应得

$$\frac{\delta_z}{l} = \operatorname{tg} \alpha_0 \left(\ln \frac{2h \operatorname{tg} \alpha_0 / l}{h \operatorname{tg} \alpha_0 / l} + 0 \right) = 0.693 \operatorname{tg} \alpha_0$$

这是一根正切曲线, 与(1-10)式完全相同。

但应注意图1-7中 P_1 点的纵坐标比 Q_1 点高, 要是反过来 P_1 点的纵坐标比 Q_1 点低的话, 那么 P_1, Q_1 的斜率就将是正的, 在图中的 P_1, P 段内就将不再有极值存在; 然而, 此时曲线 P_0, P_1 段的斜率就将从 P_0 处的负值转变为 P_1 处的正值, 这样就必然会在其间通过一个斜率为零的点, 也就是说, 此时在 P_0, P_1 段内就必然会有极值 $z_{\min}$ 存在, 其存在条件应该是

$$z'(P_1) \leq Z(Q_1) = 0 \quad \text{或} \quad z_1 \leq 0$$

按(1-13)式即得

$$l \operatorname{tg} \alpha_0 \geq \frac{l^2}{h} (1 - e^{-2u})$$

或

$$u = \frac{h \operatorname{tg} \alpha_0}{l} \geq 1 - e^{-2u} \quad (1-15c)$$

当取“等号”时可以解得

$$-2u = -2 + 2e^{-2u} = -2 + 2e^{-2 + 2e^{-2 + 2e^{-2 + 2e^{-2 + \dots}}} = -1.593624$$

由此可知, 当 $u > 0.796812$ 时, 极值 $z_{\min}$ 即将位于曲线 P_0, P_1 段范围内, 现在就来求这一极值究竟等于多少。

首先根据(1-8)或(1-12)式, 令 $z' = 0$ 则可得 $z_{\min} = Z$

$$\text{再由(1-11)式可得} \quad z_{\min} = Z = \frac{(X_m + h \operatorname{tg} \alpha_0)^2}{2h} - \frac{h \operatorname{tg}^2 \alpha_0}{2}$$

$$\text{故得动程差为} \quad \delta_z = z_{\min} - Z_{\min} = z_{\min} - \left(-\frac{h}{2} \operatorname{tg}^2 \alpha_0 \right) = \frac{(X_m + h \operatorname{tg} \alpha_0)^2}{2h}$$

$$\text{又可得} \quad \delta_z = -x_m - h \operatorname{tg} \alpha_0 = -(\lambda_m - \lambda) - h \operatorname{tg} \alpha_0 = l - \sqrt{2h\delta}$$

即

$$\delta_z/l = 1 - \sqrt{2 \frac{h}{l} \frac{\delta_z}{l}}$$

这里 δ_z 即极值点 $(x_m, z_{\min})$ 到抛物线对称轴的垂距。