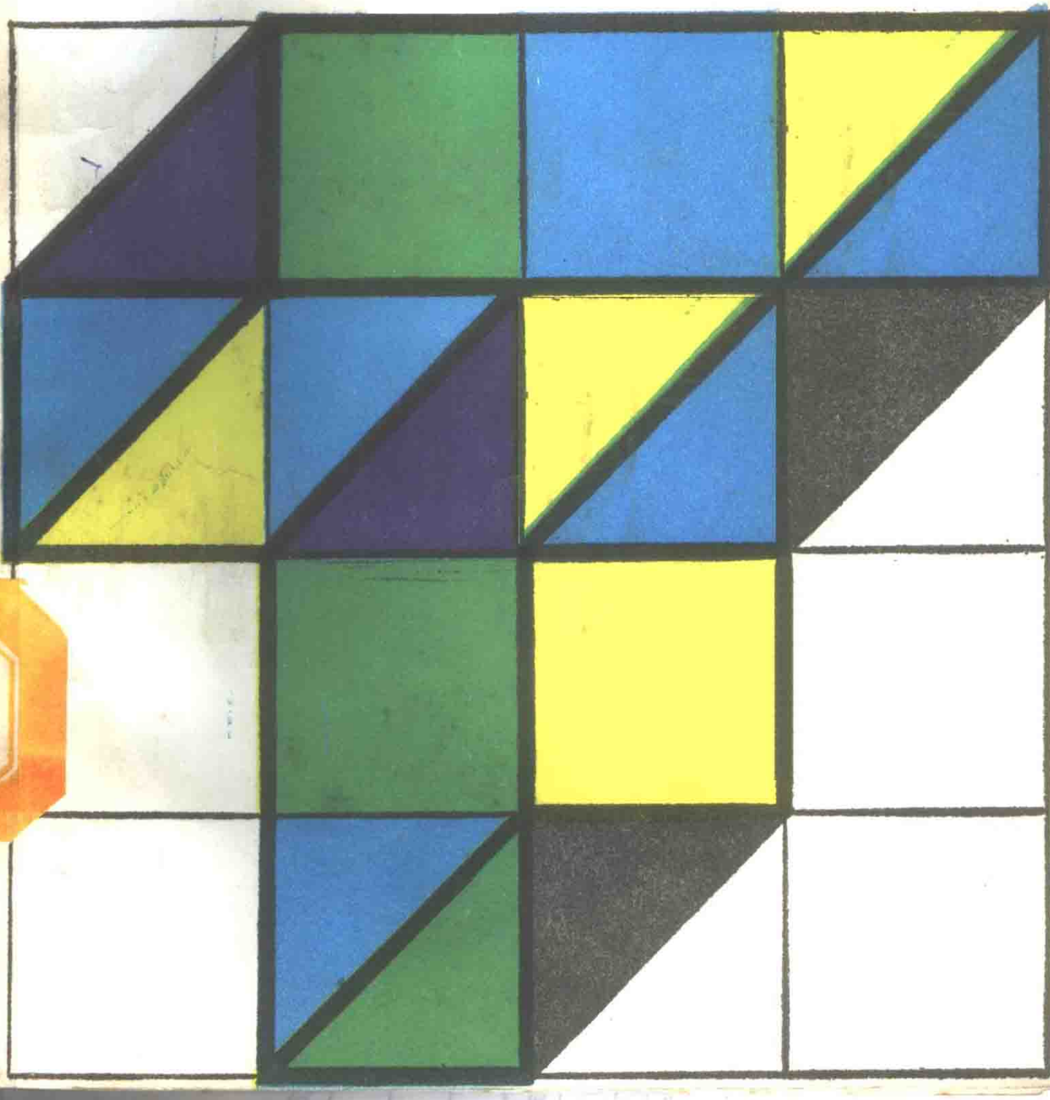
弹性理论基础

tanxinglilunjichu

黄怡筠　程兆雄　编著



弹性理论基础

黄怡筠　程兆雄

北京理工大学出版社

内容简介

本书详细阐述了弹性力学的基本理论及一些具体问题的解法。介绍了变分提法和一些近似解法。全书共十一章，每章后附有足够数量的习题。

这是一本为需要深入了解和牢固掌握弹性理论的基本概念、基本理论和基本方法的初学者编写的教材。本书以工科院校非力学专业研究生为主要对象，也可作力学专业本科生的基础教材，也可供其他读者选用。

弹性理论基础

黄怡筠　程兆雄　编著

●

北京理工大学出版社出版

新华书店北京发行所发行　各地新华书店经售

永清县印刷厂印刷

●

850×1168毫米　32开本　15.75印张　354千字

1988年12月第一版　1988年12月第一次印刷

ISBN7-81013-067-6/O.15

印数：1—3000册　定价：3.70元

前 言

弹性理论是力学专业一门重要的理论基础课，又是工科院校许多非力学专业的技术基础课。近几十年来，科学技术的飞速发展使本课程的地位日显重要，成为越来越多的工科专业的研究生、本科生的必修课程。

弹性理论在叙述的系统性、严密性和应用的广泛性以及解法的多样性方面近年都有发展，内容在不断丰富。同时，在教学上又受到学时数的限制。为了适应上述情况，虽国内已有不少弹性理论教材，但编写一本篇幅不过多而与现行教材有较大差异的教科书似仍有必要。

本书是为初次学习弹性理论，而又需要在基本概念、基本理论、基本方法上了解得较深入，掌握得较牢固的读者编写的。具体以工科院校非力学专业的研究生为主要对象。本书也可作力学专业本科生的基础教材，还适当兼顾有一定基础的在职工程技术人员进修或自学的需要。

本书对应力概念、变形特性和本构关系都作了详尽阐述。对于具体问题求解力求简明。最后二章介绍了各种近似解法，其中变分法单设一章，这是因变分法在弹性理论中有其特殊地位。

书中采用了场论、矩阵、张量和变分等数学工具，希望这样做能加深而不是冲淡对弹性理论本身的理解。为了有利读者学习后续课程和阅读各类文献，混合采用多种数学表示形式是完全必要的。

各章附有足够数量的习题。一些习题有助加深概念、巩固理论，另一些则旨在训练解题能力。

在增强教材的可读性方面，也作了一些努力。

本书承薛大为教授、赵学仁、余世芳二位副教授审阅了原稿，特此表示衷心感谢。

编者 1987年3月

目　　录

第一章　绪　论

§1.1　弹性理论的内容

弹性理论也称弹性力学，是固体力学的一个重要分支，它是研究在外力作用下弹性体内产生应力，应变和位移的一般规律的学科。

固体力学最古老的分支学科是材料力学，它研究的是构件正常工作时必须满足的强度、刚度、稳定性问题。为了解决这些问题，自然要研究外力作用下的应力、应变和位移。但是材料力学主要只解决了几何形状为杆的构件，而对板、壳、块等非杆状结构，一般不能解。就是对于杆，也解决得较粗糙和不彻底。

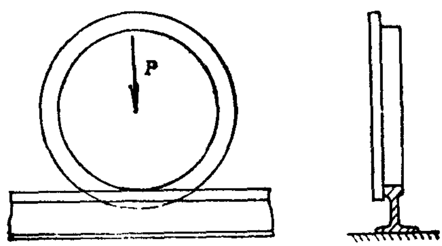


图1-1

图1-1表示一个火车车轮压在钢轨上。

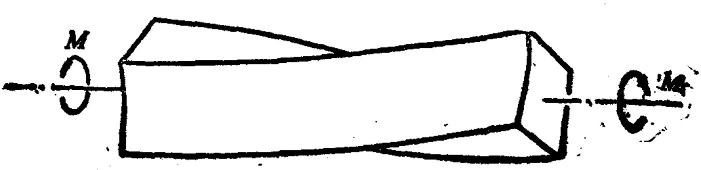


图1-2

图1-2表示矩形截面杆受扭转。

图1-3表示带小孔的平板受拉伸。

以上问题在材料力学中都解决不了，而在弹性理论中则可得到精确的解答。在工程中，还有许多这样类似的问题。

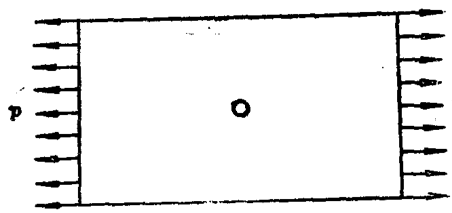


图1-3

弹性理论研究的是弹性体受力变形的一般规律，它对弹性体的几何形状和外力作用方式原则上没有任何限制，在处理方法上，它又解除了材料力学中一些不很自然的假设（如杆弯曲时的平面假设）。这必然要求在理论上有更高的严密性和更强的逻辑性，同时数学工具必然用得更多、更复杂、更完备。任何一门工程学科向高级、成熟发展，都会有这种"假设减少，数学增多"的特征，固体力学也不例外。随之，在应用上必然更普遍、更广泛、更精确。

弹性理论若从19世纪20年代法国科学家纳维(Navier)提出开创性论文算起，已有160多年历史，是发展得很成熟的一门学科。在自然科学中，弹性理论占有重要地位，它给出了固体受力变形的完整而清晰的图景。弹性力学方程组是19世纪物理学三个著名的偏微分方程组之一㊀。在工程应用中，弹性理论发挥了极大的作用。飞机、潜艇、人造卫星、火箭、水坝、桥梁等各种大型结构的设计都离不开弹性理论。

虽然弹性理论有极大的实用价值，但作为一门课程，由于本身理论的严密性和逻辑性，却使得它与一般工程技术课程不太相象而显现理科课程的特色。学习前，不仅需要具备一般的高等数学知识，也还要求对偏微分方程、场论、矩阵、变分法等数学分支有所了解。

在学习了本课程后，进一步学习塑性理论、板壳理论、断裂

㊀另外两个是粘性流体动力方程组和电磁场方程组。

力学、有限元、实验应力分析和稳定、振动、弹性波等就有了基础。

§1.2 基本假设

固体的结构是非常复杂的，呈现各种各样的特性，可以说至今尚未研究得很清楚。在研究固体的受力变形时，既不可能也不必要考虑所有这些特性，我们关心的是对强度问题有影响的那些特性。为此，必须提出一些假设，排除一些次要因素，使问题大为简化。

下面提出五条基本假设：

1.连续性假设 物理学揭示，物体是由各个层次的微小单元组成的，如晶粒、分子、原子及更深层次的粒子。显然，物体是不连续的。但当我们所研究的对象包含极大数量的微小单元时，起作用的是某种平均统计性质，则可以把物体看成连续的，即认为物体是由无空隙的占有整个特定空间域的介质组成，这就是连续性假设。这一假设给我们带来了极大的方便，它使得建立在函数连续性基础上的微分、积分、微分方程等数学工具可以被采用。

连续性假设能否成立当视具体问题而定。例如，在一麻袋装得很紧密的麦子上坐一个人可以认为这袋麦子是连续体；但当用一根细长的钢针刺入麦粒间隙之中时，就不能再将它看成连续体。又如，一金属块在受一般的宏观作用力时，可以认为是连续体；但当它受到基本粒子流的轰击时，就不再能视为连续体。

2.均匀性假设 认为物体内各点的力学性质完全相同，这叫均匀性假设。

在以后，我们常常取一个微元体来研究一个点的力学性质，这种微元体，在数学上讲是一个无穷小量，所以能表示一个点。但在物理上，它却又不能太小，它应包含很多分子、晶粒，这样

才呈现统观上的均匀性。实际上，连续性假设也运用了类似的思想。但要注意 均匀性与连续性是二个概念。把两块不同的金属焊接在一起，就成为一块连续但不均匀的物体；一把刃部淬过火的刀也是连续而不均匀的；混凝土结构，当足够大时，可以当作均匀体处理。但当研究对象小到可以与其中鹅卵石的尺寸相比较时，则不能看成是均匀的。对于一个在混凝土结构上打洞的工人来说，钢钎对准的是鹅卵石还是鹅卵石之间的水泥，手上的震感显然是完全不一样的。

3.各向同性假设 物体内一点的力学性质在各个方向都相同，称为各向同性。反之常称为各向异性。木材，竹材是各向异性材料，铸钢，铸铁是各向同性材料，压延加工成的金属材料是各向异性的，但有时仍然把轧制的各种型钢近似地看成各向同性材料。应该指出，有些工程材料，为了充分发挥效能，常常人为地制成各向异性，如夹层胶合板、蜂窝板等。

本书的某些理论推导，常常解除这一假设，显然，所得的一切结论，自然也适用于各向同性材料。

4.线弹性假设 物体受力后，应力与应变之间有单值函数关系，且当外力卸除后，变形立即消失，即变形可逆，物体的这种性质，称为理想弹性或完全弹性，有时简称为弹性。

若应力应变之间服从线性规律，即一个是另一个的线性函数，则称为线弹性。

在材料力学中，把线弹性规律称为广义虎克（Hooke）定律。在弹性力学中有时简称为虎克定律。

在变形不大的情况下，大部分工程材料都可以足够精确地认为满足线弹性规律。同时，应该指出，任何材料又都不会绝对符合线弹性规律，所以，它也只是一种假设。本书只是在个别讨论基本理论的章节中才不受此假设的限制。

5.小变形假设 这一假设认为物体受力后的变形是微小的。所谓变形微小是指物体因变形而产生的位移比物体尺寸小得多，

而且应变和转角都比1小得多。通常认为不大于千分之几的量级。这些概念在材料力学中也已引出过。这里要明确指出：应变小并不足以保证位移小和转角小。例如，一很薄的弹簧钢片，两端加上弯矩，钢片内的应力和应变都可能不大，而端点的位移和转角却可能很大。机械钟表中的发条就是这样的，它是不符合小变形假设的。

应该指出，这五条假设的重要性是不一样的，如小变形假设和线弹性假设的解除都会引起非线性。非线性问题是近几十年来十分活跃的研究领域，虽然在数学上将复杂得多。需要特别指出的是，连续性这一假设是带有根本性的，它是弹性理论，也是一切连续介质力学的理论基石，解除它将引起整个思维体系和数学手段的根本改变。

只有在以后学了弹性理论的一些基本概念和基本理论后，才有可能对这五条假设有深入的了解。实际上，人们并不是预先提出了什么假设后再去进行研究，而只是在研究的进程中，遇到需要时，才提出适当的假设的。

第二章 应力分析

§2.1 体力和面力

作用在物体上的外力可分为体力和面力。体力指分布在体积内的力，如引力、惯性力、磁力等。通常物体内各点的体力是不同的，也就是说，体力是位置的函数。为了描述体力，可在物体内取一个小部分，它包含某点A，如图2-1所示。此小部分的体积为ΔV，其上作用的力为$\Delta \boldsymbol{Q}$，现令$\Delta V\to 0$，ΔV始终包含A点，则得极限

$$\boldsymbol{F}=\lim_{\Delta V\to 0}\frac{\Delta \boldsymbol{Q}}{\Delta V}$$

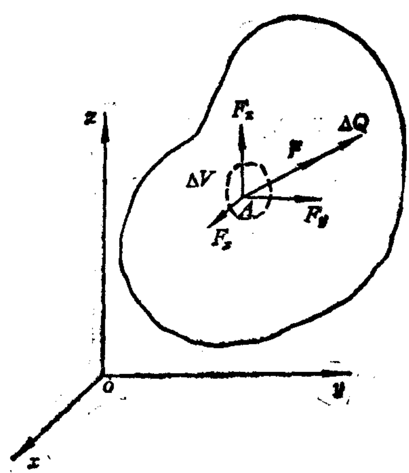


图:

$\boldsymbol{F}$称为A点处的体力集度，简称体力。因$\Delta \boldsymbol{Q}$是矢量而ΔV是标量，所以$\boldsymbol{F}$显然是一个具有［力］［长度］$^{-3}$量纲的矢量。按国际单位制（SI制）其单位为N/m^3称为牛顿每立方米。

要注意到，我们这样做时已经不自觉地运用了连续性假设，因为如果没有连续性假设，$\Delta V\to 0$这一过程就可能无法实施。

引用微分符号，可以把上式更简洁地写为

$$\boldsymbol{F}=\frac{d\boldsymbol{Q}}{dV}\tag{2-1}$$

面力是指分布在物体表面的力，如液体压力、气体压力、两固体之间的接触力等。为了描述面力，可以仿照体力的办法，在表面上取一个小部分，它包含某表面点 B，如图2-2所示。

此小部分的面积为 ΔS，其上作用的力为 $\Delta \boldsymbol{R}$ 令 $\Delta S \to 0$，但始终包含 B 点，则得极限

$$\boldsymbol{P} = \lim_{\Delta S \to 0} \frac{\Delta \boldsymbol{R}}{\Delta S}$$

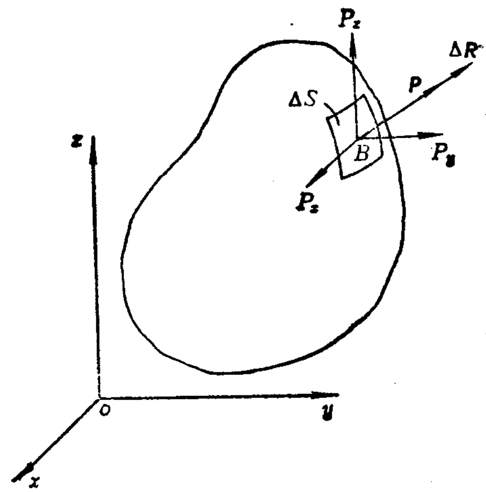


图2-2

$\boldsymbol{P}$ 称为 B 点处的面力集度，简称面力，显然 $\boldsymbol{P}$ 是一个具有[力][长度]$^{-2}$量纲的矢量，单位为 N/m^2 称为牛顿每平方米，按国际单位制的规定，这是一个具有专门名称的导出单位，叫帕斯卡(Pascal)，简称帕(Pa)，即 $1Pa = 1N/m^2$，自然，上式也可简写为

$$\boldsymbol{P} = \frac{d\boldsymbol{R}}{dS} \tag{2-2}$$

对于矢量，通常有二种表示方法，一种是用一有大小和方向的有指向(用箭头表示)的线段标以黑体字（如 $\boldsymbol{F}, \boldsymbol{P}$）表示，这种表示法形象直观，但进行运算时不很方便，另一种便是用它在给定坐标系中沿坐标轴的三个分量来表示。图2-1示出了体力 $\boldsymbol{F}$ 分解为 F_x、F_y、F_z，图2-2示出了面力 $\boldsymbol{P}$ 分解为 p_x、p_y、p_z。

如果我们注意到这些分量也可以理解为矢量在坐标轴的投影，那么，也就可以不再把它们看成矢量，而认为是一些实数表示的标量。其正负号这样规定：与坐标轴同向为正，反向为负。

在本书中矢量的这两种表示法都采用，何处用何种表示法当视方便而定。

体力和面力通常都作为已知条件给出，从场论观点看，我们应该知道二个矢量场：一个空间域内（物体所占空间）的体力矢量场$\boldsymbol{F}$和一个面域上(物体边界构成的曲面)的面力矢量场$\boldsymbol{P}$。或者说应该知道六个标量场或标量函数，它们是：$F_x(x,y,z)$、$F_y(x,y,z)$、$F_z(x,y,z)$、$p_x(x,y,z)$、$p_y(x,y,z)$、$p_z(x,y,z)$。为了简洁，常将(x,y,z)略去不写，即简写为F_x、F_y、F_z、p_x、p_y、p_z，它们都是坐标x,y,z的实函数。

§2.2 截面法 分离体 应力

物体受力后将会产生内力和变形，这里先讨论内力。为此，必须引出应力的概念。应力的概念虽然在材料力学中早已建立，但讨论得比较肤浅，这里将详细地进行分析。

图2-3（a）表示一受平衡力系作用的物体，今用一假想的平面C将物体分成Ⅰ和Ⅱ两部分，弃去其中之一（如Ⅱ），并将Ⅱ部分对Ⅰ部分的作用以力来代替，这就是内力。对于Ⅰ来说，它是在此内力和作用在Ⅰ部分上的外力共同作用下保持平衡的，即内力对平衡所起的作用与外力是一样的，这种方法称为**截面法**，Ⅰ称为**自由体**或**分离体**。截面法和分离体的概念是非常重要的，本书将一再应用，在此处截面法只是作为“暴露”内力的一个手段来使用。

如何来表述内力呢？我们可在平面C上取一个小部分，它包含某点K，如图2-3(b)所示，此小部分的面积为ΔS，其上所作用的内力为ΔG。我们把下式定义的内力集度称为**应力**，

$$\dot{T}=\lim_{\Delta S\to 0}\frac{\Delta G}{\Delta S}$$