高等数学习题解析

同济四版《高等数学》配套习题解析

胡东华　主　编

科学技术文献出版社
Scientific and Technical Documents Publishing House
北　京

图书在版编目(CIP)数据

高等数学习题解析/胡东华主编.-北京:科学技术文献出版社,2002.5

ISBN 7-5023-3543-9

Ⅰ.高… Ⅱ.邹… Ⅲ.高等数学-高等学校-教学参考资料 Ⅳ.013

中国版本图书馆 CIP 数据核字(1999)第 09978 号

出　　版　　者:科学技术文献出版社
邮 购 部 电 话:(010)68515544-2172
图书发行部电话:(010)68514009、68514035
图书发行部传真:(010)68514035
策　划　编　辑:胡东华
责　任　编　辑:林福山　杨　丹
责　任　校　对:林福山　杨　丹
封　面　设　计:胡东华
发　　行　　者:科学技术文献出版社发行　全国各地新华书店经销
印　　刷　　者:三河市富华印刷包装有限公司
版 (印) 次:2002 年 5 月第 2 版第 2 次印刷
开　　　　　本:850×1168　32 开
字　　　　　数:690 千
印　　　　　张:20.25
定　　　　　价:20.00 元

前　言

同济版《高等数学》是全国流行已久的经典教材，它具有结构严谨、逻辑清晰、叙述详细、通俗浅显的优点，全书例题较多，比较便于自学。但是，也有相当一部分同学反映，原教材附录的习题答案过于简单，在使用过程中多有不便，希望拥有一本与之完全相配套的内容详尽的习题解析集。

为此，我们召集了一批有经验的高校教师，对同济《高等数学》第四版习题作了相应的解析，以方便高校学生学习过程中参考和为自学高数者打开方便之门。

此书虽然在编写过程中得到专家同行的指点，编者也尽心努力，但由于编写时间相对仓促，书中肯定存在一些不足之处，欢迎读者批评指正。

编者

目　　录

前　言

习题解析

第四章　不定积分

第五章　定积分

第六章　定积分的应用

第七章　空间解析几何与向量代数

第八章　多元函数微分法及其应用

第九章　重积分

第一章 函数与极限

习题 1-1

1. 用区间表示变量的变化范围：

(1) $2 < x \leqslant 6$;　　(2) $x \geqslant 0$

(3) $x^2 < 9$;　　(4) $|x - 3| \leqslant 4$

2. 求函数

$$y = \begin{cases} \sin \dfrac{1}{x}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

的定义域和值域。

3. 下列各题中，函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 是否相同？为什么？

(1) $f(x) = \lg x^2, g(x) = 2\lg x$

(2) $f(x) = x, g(x) = \sqrt{x^2}$

(3) $f(x) = \sqrt[3]{x^4 - x^3}, g(x) = x\sqrt[3]{x - 1}$

4. 求下列函数的定义域：

(1) $y = \dfrac{1}{1 - x}$;　　(2) $y = \sqrt{3x + 2}$

(3) $y = \dfrac{1}{1 - x^2}$;　　(4) $y = \sqrt{x^2 - 4}$

(5) $y = \dfrac{1}{1 - x^2} + \sqrt{x + 2}$;　　(6) $y = \dfrac{1}{x} - \sqrt{1 - x^2}$

(7) $y = \dfrac{1}{\sqrt{4 - x^2}}$;　　(8) $y = \dfrac{2x}{x^2 - 3x + 2}$

5. 用描点法作出函数 $y = \dfrac{1}{x^2}$ 的图形。

6. 设 $f(x) = \sqrt{4 + x^2}$，求下列函数值：

$f(0), f(1), f(-1), f\left(\dfrac{1}{a}\right), f(x_0), f(x_0 + h)$

7. 若 $f(t)=2t^2+\frac{2}{t^2}+\frac{5}{t}+5t$,证明 $f(t)=f\left(\frac{1}{t}\right)$

8. 设 $y=\varphi(x)=\begin{cases}|\sin x|, & |x|<\frac{\pi}{3},\\ 0, & |x|\geqslant\frac{\pi}{3}\end{cases}$, 求 $\varphi\left(\frac{\pi}{6}\right),\varphi\left(\frac{\pi}{4}\right)$, $\varphi\left(-\frac{\pi}{4}\right),\varphi(-2)$,并作出函数 $y=\varphi(x)$ 的图形。

9. 下列函数中哪些是偶函数,哪些是奇函数,哪些既非奇函数又非偶函数?

(1) $y=x^2(1-x^2)$;　　(2) $y=3x^2-x^3$

(3) $y=\frac{1-x^2}{1+x^2}$;　　(4) $y=x(x-1)(x+1)$

(5) $y=\sin x-\cos x+1$;　　(6) $y=\frac{a^x+a^{-x}}{2}$

10. 设 $f(x)=2x^2+6x-3$,求 $\varphi(x)=\frac{1}{2}[f(x)+f(-x)]$ 及 $\psi(x)=\frac{1}{2}[f(x)-f(-x)]$,并指出 $\varphi(x)$ 及 $\psi(x)$ 中哪个是奇函数?哪个是偶函数?

11. 设下面所考虑的函数都是定义域在对称区间 $(-l,l)$ 上的,证明:

(1) 两个偶函数的和是偶函数,两个奇函数的和是奇函数;

(2) 两个偶函数的积是偶函数,两个奇函数的积是偶函数,偶函数与奇函数的积是奇函数;

(3) 定义在对称区间 $(-l,l)$ 上任意函数可表示为一个奇函数与一个偶函数的和。

12. 试证下列函数在指定区间内的单调性:

(1) $y=x^2$, $(-1,0)$;

(2) $y=\lg x$, $(0,+\infty)$;

(3) $y=\sin x$, $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$。

13. 设 $f(x)$ 为定义在 $(-l,l)$ 内的奇函数,若 $f(x)$ 在 $(0,l)$ 内单调增加,证明 $f(x)$ 在 $(-l,0)$ 内也单调增加。

14. 下列各函数中哪些是周期函数?对于周期函数,指出其周期:

(1) $y=\cos(x-2)$;　　(2) $y=\cos 4x$

(3) $y=1+\sin\pi x$;　　(4) $y=x\cos x$

(5) $y=\sin^2 x$

15. 求下列函数的反函数:

(1) $y=\sqrt[3]{x+1}$；　　(2) $y=\dfrac{1-x}{1+x}$

(3) $y=\dfrac{ax+b}{cx+d}(ad-bc\neq 0)$。又问当 a,b,c,d 满足什么条件时，这反函数与直接函数相同？

16. 对于函数 $f(x)=x^2$，如何选择邻域 $U(0,\delta)$ 的半径 δ，就能使与任一 $x\in U(0,\delta)$ 所对应的函数值都在邻域 $U(0,2)$ 内？

17. 设函数 $f(x)$ 在数集 X 上有定义，试证：$f(x)$ 在 X 上有界的充分必要条件是它在 X 上既有上界又有下界。

习题解析

1. **解**　(1) $(2,6]$；　　$[0,+\infty)$

(3) $(-3,3)$；　　(4) $[-1,7]$

2. **解**　函数的定义域为 $(-\infty,+\infty)$；值域为：$[-1,1]$

3. **解**　(1) 不同。因为定义域不同，$f(x)$ 的定义域是 $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$，而 $g(x)$ 的定义域为 $(0,+\infty)$。

(2) 不同。因为对应法则不同，$f(x)=x$，而 $g(x)=|x|$

(3) 相同。因为定义域、对应法则均相同。

4. **解**　(1) 要使函数有意义，需且只须 $1-x\neq 0$，即 $x\neq 1$，所以函数 $y=\dfrac{1}{1-x}$ 的定义域为 $(-\infty,1)\cup(1,+\infty)$。

(2) 要使函数有定义，需且只须 $3x+2\geqslant 0$，即 $x\geqslant\dfrac{-2}{3}$，所以函数 $y=\sqrt{3x+2}$ 的定义域为 $\left[-\dfrac{2}{3},+\infty\right)$。

(3) 要使函数有意义，需且只须 $1-x^2\neq 0$，即 $x\neq\pm 1$，所以函数 $y=\dfrac{1}{1-x^2}$ 的定义域为 $(-\infty,-1)\cup(-1,1)\cup(1,+\infty)$。

(4) 要使函数有意义，需且只须 $x^2-4\geqslant 0$，即 $x\geqslant 2$ 或 $x\leqslant -2$，所以函数 $y=\sqrt{x^2-4}$ 的定义域为 $(-\infty,-2]\cup[2,+\infty)$。

(5) 要使函数有意义，需且只须 $\begin{cases}1-x^2\neq 0\\x+2\geqslant 0\end{cases}$，　即 $\begin{cases}x\neq\pm 1\\x\geqslant -2\end{cases}$，所以原函数的定义域为 $[-2,-1)\cup(-1,1)\cup(1,+\infty)$。

(6) 要使函数有意义，需且只须 $\begin{cases}x\neq 0,\\1-x^2\geqslant 0\end{cases}$，即 $\begin{cases}x\neq 0\\-1\leqslant x\leqslant 1\end{cases}$，故原函数

的定义域为$[-1,0)\cup(0,1]$。

(7) 要使函数有意义,需且只须$4-x^2>0$,即$-2<x<2$,所以原函数的定义域为$(-2,2)$。

(8) 要使函数有意义,需且只须 $x^2-3x+2\neq 0$,即 $x\neq 1$ 且 $x\neq 2$,所以原函数的定义域为$(-\infty,-1)\cup(1,2)\cup(2,+\infty)$。

5. **解**

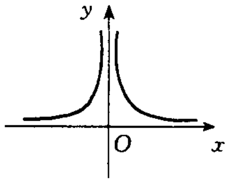

图 1-1-1

6. **解** $f(0)=\sqrt{4+0}=2\quad f(1)=\sqrt{4+1^2}=\sqrt{5}$

$$f(-1)=\sqrt{4+(-1)^2}=\sqrt{5}$$

$$f\left(\frac{1}{a}\right)=\sqrt{4+\frac{1}{a^2}}=\frac{1}{|a|}\sqrt{4a^2+1}$$

$$f(x_0)=\sqrt{4+x_0^2},f(x_0+h)=\sqrt{4+(x_0+h)^2}$$

7. **证明** $f\left(\frac{1}{t}\right)=2\left(\frac{1}{t}\right)^2+\frac{2}{\left(\frac{1}{t}\right)^2}+\frac{5}{\frac{1}{t}}+5\frac{1}{t}$

$$=2t^2+\frac{2}{t^2}+\frac{5}{t}+5t=f(t)$$

8. **解** $\varphi\left(\frac{\pi}{6}\right)=\left|\sin\frac{\pi}{6}\right|=\frac{1}{2},\varphi\left(\frac{\pi}{4}\right)=\left|\sin\frac{\pi}{4}\right|=\frac{\sqrt{2}}{2}$

$$\varphi\left(-\frac{\pi}{4}\right)=\left|\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right|=\frac{\sqrt{2}}{2}。$$

因为$|-2|>\frac{\pi}{3}$,所以$\varphi(-2)=0$。

$y=\varphi(x)$ 的图形为

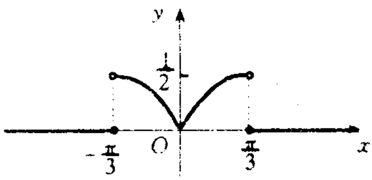

图 1-1-2

9. **解**　(1) 因为 $f(-x)=(-x)^2[1-(-x)^2]=x^2(1-x^2)=f(x)$，所以 $y=x^2(1-x^2)$ 为偶函数。

(2) 因为 $f(-x)=3(-x)^2-(-x)^3=3x^2+x^3$，所以 $f(-x)\neq f(x)$ 且 $f(-x)\neq -f(x)$，即 $f(x)$ 既非奇函数又非偶函数。

(3) 因为 $f(-x)=\dfrac{1-(-x)^2}{1+(-x)^2}=\dfrac{1-x^2}{1+x^2}=f(x)$，所以 $f(x)$ 为偶函数。

(4) 因为 $f(-x)=(-x)[-(x)-1][-(x)+1]=-x(x-1)(x+1)$ $=-f(x)$，所以 $f(x)$ 为奇函数。

(5) 因为 $f(-x)=\sin(-x)-\cos(-x)+1=-\sin x-\cos x+1$，所以 $f(-x)\neq -f(x)$ 且 $f(-x)\neq f(x)$，即 $f(x)$ 既非奇函数又非偶函数。

(6) 因为 $f(-x)=\dfrac{a^{(-x)}+a^{-(-x)}}{2}=\dfrac{a^x+a^{-x}}{2}=f(x)$，所以 $f(x)$ 是偶函数。

10. **解**
$$\begin{aligned}\varphi(x)&=\frac{1}{2}\{(2x^2+6x-3)+[2(-x)^2+6(-x)-3]\}\\&=2x^2-3\\\varphi(x)&=\frac{1}{2}\{(2x^2+6x-3)-[2(-x)^2+6(-x)-3]\}\\&=6x\end{aligned}$$

显然，$\varphi(x)$ 为偶函数，而 $\psi(x)$ 为奇函数。

11. **证明**　(1) 设 $f_1(x),f_2(x)$ 为两个任意的偶函数，

令　$F(x)=f_1(x)+f_2(x)$，

则 $F(-x)=f_1(-x_1)+f_2(-x)=f_1(x)+f_2(x)=F(x)$。

故 $F(x)$ 为偶函数。

设 $g_1(x),g_2(x)$ 为两个任意的奇函数，令　$G(x)=g_1(x)+g_2(x)$，

则 $G(-x)=g_1(-x)+g_2(-x)=-g_1(x)-g_2(x)=-G(x)$。

故 $G(x)$ 为奇函数。

(2) 设 $f_1(x),f_2(x)$ 为任意两个偶函数，令　$F(x)=f_1(x)\cdot f_2(x)$，

则 $F(-x)=f_1(-x)\cdot f_2(-x)=f_1(x)\cdot f_2(x)=F(x)$。

故 $F(x)$ 为偶函数。

设 $g_1(x),g_2(x)$ 为任意两个奇函数，令 $G(x)=g_1(x)g_2(x)$，

则
$$\begin{aligned}G(-x)&=g_1(-x)g_2(-x)=[-g_1(x)][-g_2(x)]\\&=g_1(x)g_2(x)=G(x)。\end{aligned}$$

故 $G(x)$ 为偶函数。

设 $f(x)$ 为任一偶函数，而 $g(x)$ 为任一奇函数，令 $T(x)=f(x)g(x)$

则
$$\begin{aligned}T(-x)&=f(-x)g(-x)=f(x)[-g(x)]\\&=-f(x)g(x)=-H(x)\end{aligned}$$

故 $T(x)$ 为奇函数。

(3) 设 $f(x)$ 为定义于 $(-l,l)$ 上的任意一个函数，令

$$\varphi(x)=\frac{1}{2}[f(x)+f(-x)],\psi(x)=\frac{1}{2}[f(x)-f(-x)]$$

因为
$$\begin{aligned}\varphi(-x)&=\frac{1}{2}[f(-x)+f(-(-x))]\\&=\frac{1}{2}[f(-x)+f(x)]=\varphi(x)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\psi(-x)&=\frac{1}{2}[f(-x)-f(-(-x))]\\&=\frac{1}{2}[f(-x)-f(x)]\\&=-\frac{1}{2}[f(x)-f(-x)]=-\psi(x)\end{aligned}$$

所以 $\varphi(x)$ 为偶函数，$\psi(x)$ 为奇函数。

而 $f(x)=\frac{1}{2}[f(x)+f(-x)]+\frac{1}{2}[f(x)-f(-x)]=\varphi(x)+\psi(x)$

所以 $f(x)$ 可以表示为一个偶函数与一个奇函数的和。

12. **解** (1) 设 $x_1,x_2\in(-1,0)$ 且 $x_1<x_2$，

$$f(x_2)-f(x_1)=x_2^2-x_1^2=(x_2-x_1)(x_2+x_1)$$

因为 $-1<x_1<x_2<0$，所以 $x_1+x_2<0$ 且 $x_2-x_1>0$，

故 $f(x_2)-f(x_1)<0$，即 $f(x_2)<f(x_1)$。

因而 $f(x)$ 在 $(-1,0)$ 单调减少

(2) 设 $x_1,x_2\in(0,+\infty)$ 且 $x_1<x_2$，

因为 $f(x_2)-f(x_1)=\lg x_2-\lg x_1=\lg\frac{x_2}{x_1}$，

又 $\frac{x_2}{x_1}>1$，所以 $\lg\frac{x_2}{x_1}>0$，从而 $f(x_2)-f(x_1)>0$

即 $y=\lg x$ 在$(0,+\infty)$内单调增加。

(3) 设 $x_1,x_2\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$且 $x_1<x_2$。

因为 $f(x_2)-f(x_1)=\sin x_2-\sin x_1=2\cos\frac{x_2+x_1}{2}\sin\frac{x_2-x_1}{2}$

而 $-\frac{\pi}{2}<\frac{x_1+x_2}{2}<\frac{\pi}{2},0<\frac{x_2-x_1}{2}<\frac{\pi}{2}$,

所以,$\cos\frac{x_2+x_1}{2}>0;\sin\frac{x_2-x_1}{2}>0$,从而 $f(x_2)-f(x_1)>0$。

即 $y=\sin x$ 在$\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$内单调增加。

13. **证明** 设 $x_1,x_2\in(-l,0)$且 $x_1<x_2$,则

$f(x_2)-f(x_1)=f(-(-x_2))-f(-(-x_1))\xlongequal{\text{奇函数}}-f(-x_2)+f(-x_1)$。

又 $-x_2,-x_1\in(0,l)$且 $-x_1>-x_2$,故由 $f(x)$在$(0,l)$内的单增性知:

$$f(x_2)-f(x_1)=f(-x_1)-f(-x_2)>0$$

从而 $f(x)$在$(-l,0)$内也是单调增加的。

14. **解** (1) 是周期函数,周期 $T=2\pi$;

(2) 是周期函数,周期 $T=\frac{2\pi}{4}=\frac{\pi}{2}$;

(3) 是周期函数,周期 $T=\frac{2\pi}{\pi}=2$;

(4) 不是周期函数;

(5) 是周期函数。因为 $y=\sin^2x=\frac{1-\cos2x}{2}$,所以周期为 $T=\frac{2\pi}{2}=\pi$。

15. **解** (1) 因为 $y=\sqrt[3]{x+1}$,所以 $x=y^3-1$,从而 $y=\sqrt[3]{x+1}$ 的反函数为 $y=x^3-1$。

(2) 因为 $y=\frac{1-x}{1+x}$,所以 $x=\frac{1-y}{1+y}$,从而 $y=\frac{1-x}{1+x}$ 的反函数为

$$y=\frac{1-x}{1+x}。$$

(3) 因为 $y=\frac{ax+b}{cx+d}$,所以 $x=\frac{-dy+b}{cy-a}$,从而 $y=\frac{ax+b}{cx+d}$ 的反函数为

$$y=\frac{-dx+b}{cx-a}。$$

要使反函数与直接函数相同,需且只须

$$\frac{ax+b}{cx+d}=\frac{-dx+b}{cx+a}$$

对任意 x(定义域内的) 均成立,亦即

$$c(a+d)x^2+(d-a)(d+a)x-(d+a)b=0。$$

因此 $\begin{cases} c(a+d)=0 \\ (d-a)(d+a)=0 \\ (d+a)b=0 \end{cases}$

亦即只须　①$a+d=0$,或

②$a+d\neq 0$ 但 $b=c=0, d=a\neq 0$。

16. **解**　要使 $f(x)\in U(0,2)$,即 $|f(x)|<2$

由于 $f(x)=x^2$,所以只须 $|x|<\sqrt{2}$。

故取 $\delta=\sqrt{2}$,则当 $x\in U(0,\delta)$ 时,$f(x)\in U(0,2)$。

(显然取任何小于$\sqrt{2}$ 的正数作半径 δ 亦可)。

17. **证明:1°　必要性**

设 $f(x)$ 在 X 上有界,即存在数 $M>0$ 使得

$$|f(x)|\leqslant M,\quad x\in X$$

因而

$$-M\leqslant f(x)\leqslant M,\quad x\in X$$

亦即 $f(x)$ 在 X 上既有上界(M),又有下界($-M$)。

2°　充分性

设 $f(x)$ 在 X 上有上界 M_1,下界 M_2,即

$$M_2\leqslant f(x)\leqslant M_1, x\in X$$

令 $M=\max(|M_1|,|M_2|)$,则 $-M\leqslant M_2, M_1\leqslant M$

因而　$-M\leqslant f(x)\leqslant M, x\in X$

即　$|f(x)|\leqslant M, x\in X$

故 $f(x)$ 在 X 上有界。

习题 1-2

1. 求下列函数的定义域:

(1) $y = \sin\sqrt{x}$;　　(2) $y = \tan(x+1)$

(3) $y = \arcsin(x-3)$;　　(4) $y = \sqrt{3-x} + \arctan\dfrac{1}{x}$

(5) $y = \ln(x+1)$;　　(6) $y = e^{\frac{1}{x}}$

2. 设 $f(x) = \arcsin x$,求下列函数值:

$f(0), f(-1), f\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right), f\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right), f(1)$

3. 设 $G(x) = \dfrac{1}{2}\arccos\dfrac{x}{2}$,求下列函数值:

$G(0), G(1), G(\sqrt{2}), G(-\sqrt{3}), G(-2)$

4. 设 $F(x) = e^x$,证明:

(1) $F(x)\cdot F(y) = F(x+y)$;

(2) $\dfrac{F(x)}{F(y)} = F(x-y)$。

5. 设 $G(x) = \ln x$,证明:当 $x > 0, y > 0$,下列等式成立:

(1) $G(x) + G(y) = G(xy)$;

(2) $G(x) - G(y) = G\left(\dfrac{x}{y}\right)$。

6. 利用 $y = \sin x$ 的图形,作出下列函数的图形:

(1) $y = \dfrac{1}{2} + \sin x$;　　(2) $y = \sin;\left(x + \dfrac{\pi}{3}\right)$

(3) $y = 3\sin x$;　　(4) $y = \sin 2x$;

(5) $y = 3\sin\left(2x + \dfrac{2}{3}\pi\right)$。

7. 利用图形的"叠加",作出下列函数的图形:

(1) $y = x + \dfrac{1}{x}$;　　(2) $y = x + \sin x$;

(3) $y = \sin x + \cos x$。

8. 求下列函数的反函数:

(1) $y = 2\sin 3x$;　　(2) $y = 1 + \ln(x+2)$;

(3) $y = \dfrac{2^x}{2^x+1}$。

9. 在下列各题中,求由所给函数复合而成的函数,并求这函数分别对应于给定自变量值 x_1 和 x_2 的函数值:

(1) $y = u^2$, $u = \sin x$, $x_1 = \frac{\pi}{6}$, $x_2 = \frac{\pi}{3}$;

(2) $y = \sin u$, $u = 2x$, $x_1 = \frac{\pi}{8}$, $x_2 = \frac{\pi}{4}$;

(3) $y = \sqrt{u}$, $u = 1 + x^2$, $x_1 = 1$, $x_2 = 2$;

(4) $y = e^u$, $u = x^2$, $x_1 = 0$, $x_2 = 1$;

(5) $y = u^2$, $u = e^x$, $x_1 = 1$, $x_2 = -1$

10. 设 $f(x)$ 的定义域是$[0,1]$,问(1)$f(x^2)$,(2)$f(\sin x)$,(3)$f(x+a)$,$(a>0)$,(4)$f(x+a)+f(x-a)(a>0)$ 的定义域各是什么?

11. 设 $f(x) = \begin{cases} 1 & |x| < 1 \\ 0 & |x| = 1 \\ -1 & |x| > 1 \end{cases}$ $g(x) = e^x$,

求 $f[g(x)]$ 和 $g[f(x)]$,并作出这两个函数的图形。

12. 证明本节公式(2)、(3)、(4)。

公式(2)、(3)、(4) 为:

$$\operatorname{sh}(x-y) = \operatorname{sh}x\operatorname{ch}y - \operatorname{ch}x\operatorname{sh}y \tag{2}$$

$$\operatorname{ch}(x+y) = \operatorname{ch}x\operatorname{ch}y + \operatorname{sh}x\operatorname{sh}y \tag{3}$$

$$\operatorname{ch}(x-y) = \operatorname{ch}x\operatorname{ch}y - \operatorname{sh}x\operatorname{sh}y \tag{4}$$

13. 证明:(1) $\operatorname{sh}x + \operatorname{sh}y = 2\operatorname{sh}\frac{x+y}{2}\operatorname{ch}\frac{x-y}{2}$;

(2) $\operatorname{ch}x - \operatorname{ch}y = 2\operatorname{sh}\frac{x+y}{2}\operatorname{sh}\frac{x-y}{2}$。

14. 已知一物体与地面的摩擦系数是 μ,重量是 P,设有一与水平方向成 α 角的拉力 F,使物体从静止开始移动(图 1-2-1),求物体开始移动时拉力 F 与角 α 之间的函数关系式。

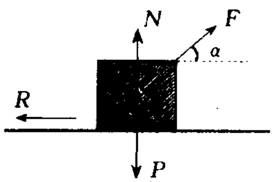

图 1-2-1

15. 已知水渠的横断面为等腰梯形,斜角 $\varphi = 40°$(图 1-2-2),当过水断面

$ABCD$ 的面积为定值 S_0 时，求湿周 $L(L = AB + BC + CD)$ 与水深 h 之间的函数关系式，并说明定义域。

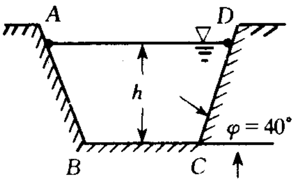

图 1-2-2

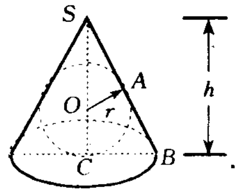

图 1-2-3

16. 一球半径为 r，作外切于球的圆锥(图 1-2-3)，试将其体积表示为高的函数，并说明定义域。

17. 火车站收取行李费的规定如下：当行李不超过 50kg 时，按基本运费计算，如从上海到某地每 kg 收 0.15 元，当超过 50kg 时，超重部分按每千克 0.25 元收费。试求上海到该地的行李费 y(元) 与重量 x(kg) 之间的函数关系式，并画出这函数的图形。

习题解析

1. 解 (1)$[0, +\infty)$

(2)$x \neq k\pi + \frac{\pi}{2} - 1 \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots)$

(3)$2 \leqslant x \leqslant 4$，即$[2,4]$

(4)$(-\infty,0) \cup (0,3)$

(5)$(-1, +\infty)$

(6)$(-\infty,0) \cup (0, +\infty)$

2. 解 $f(0) = 0, f(-1) = -\frac{\pi}{2}, f\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{\pi}{3}$,

$f\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -\frac{\pi}{4}, f(1) = \frac{\pi}{2}$

3. 解 $G(0) = \frac{\pi}{4}, G(1) = \frac{\pi}{6}, G(\sqrt{2}) = \frac{\pi}{8}$,

$G(-\sqrt{3}) = \frac{5}{12}\pi, G(-2) = \frac{\pi}{2}$

4. 证明 (1)$F(x) \cdot F(y) = e^x \cdot e^y = e^{x+y} = F(x+y)$；

(2)$\frac{F(x)}{F(y)} = \frac{e^x}{e^y} = e^{x-y} = F(x-y)$。